高等院校精品课系列教材
国家统计局优秀教材
上海普通高校优秀教材
上海市级精品课程教材

应用多元分析

第四版

王学民　编著

上海财经大学出版社

高等院校精品课系列教材
国家统计局优秀教材
上海普通高校优秀教材
上海市级精品课程教材

应用多元分析

（第四版）

王学民　编著

上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用多元分析/王学民编著．—4 版．—上海：上海财经大学出版社，2014.9

高等院校精品课系列教材

国家统计局优秀教材

上海普通高校优秀教材

上海市级精品课程教材

ISBN 978-7-5642-1917-8/F·1917

Ⅰ.①应… Ⅱ.①王… Ⅲ.①多元分析 Ⅳ.①O212.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 103767 号

□ 责任编辑　何苏湘

□ 书籍设计　钱宇辰

□ 责任校对　王从远

YINGYONG DUOYUAN FENXI

应 用 多 元 分 析

（第四版）

王学民　编著

上海财经大学出版社出版发行

（上海市武东路 321 号乙　邮编 200434）

网　　址：http://www.sufep.com

电子邮箱：webmaster @ sufep.com

全国新华书店经销

江苏省句容市排印厂印刷装订

2014 年 9 月第 4 版　2014 年 9 月第 1 次印刷

787mm×1092mm　1/16　19.25 印张　492 千字

印数：31 001—36 000　定价：36.00 元

前　言

多元统计分析(简称多元分析)是统计学中内容十分丰富、应用性极强的一个重要分支,它在自然科学、社会科学和经济学等各领域中得到了越来越广泛的应用,是一种非常重要和实用的多元数据处理方法。

像前两次修订一样,本书此次又对第三版作了全面大幅改写和适当扩充,使之在多方面都有了进一步的改进和提升。本教材主要是针对财经类院校统计学专业的本科生和研究生而写的,也可作为其他各专业读者的多元统计分析教材或教学参考书。整本书写得比较细致,便于自学,书中的绝大部分内容曾向上海财经大学统计与管理学院(原统计学系)的本科生和研究生分别讲授过十多届。

本教材有如下一些特点和说明:

(1) 全书对数学基础知识的要求较低,只需读者掌握初步的微积分、线性代数和概率统计知识。尽管如此,为便于读者能顺利地阅读本书,书中第一章对矩阵代数以及第四章第一节对一元统计推断知识都做了简单的回顾和介绍。

(2) 本教材以简明和深入浅出的方式阐述了多元统计分析的基本概念、统计思想和数据处理方法,在充分考虑到适合财经院校学生使用的前提下进行了严谨的论述,有助于学生深刻地理解并掌握多元分析的基本思想方法。

(3) 书中提供的大量例题和习题为读者展示了多元分析在社会科学和经济学等领域中的应用,每章的例题和习题安排侧重于对基本概念的理解和知识的实际应用,并不强调解题的数学技巧和难度。书中有不少例题和习题,其结论较重要或较有用,特在题序号后面标注“有用结论”,这些题目的结论本身或许比如何对其解题更为重要。为便于读者的学习(特别是自学),书后的附录给出了习题参考答案,并对稍有难度的习题都给出了提示或解答。

(4) 本书每一章后面都附有《SAS 的应用》,使用的是 SAS9.3 版本。此外,本教材还配有相应电子版的《JMP 的应用》和《SPSS 的应用》,这三款统计软件读者可选择使用。建议统计专业的读者以 SAS 为主 JMP(同为 SAS 公司的产品)为辅,两款软件各有所长,高低搭配,结合使用可以互补,很有益处。所有这些软件均使用尽可能新的版本。

(5) 书中的一些数学证明和理论性较强的内容被安排在了各章的附录或打“$*$”的章节(或段落)里,读者可根据自身情况决定取舍。

(6) 此次修订删除的章节有:原第三版中的§2.1(一元分布)、附录二(各类数值表)和

§4.3、§4.5(该两节的主要内容改写成了第四章的习题)。新增的章节有：§4.4、§4.6和§5.5。作了重大改写或扩充的章节有：§1.8、§2.3、§3.1、§3.3、§3.4、§4.2、§5.4、§6.3、§7.3、§8.4、§8.5、§9.4、§9.5、§10.2以及各章后面的附录1、附录4-2、附录4-3、附录7-2、附录9-2和书最后的附录。此外，一般的改写基本上贯穿全书。

全书共分十章。第一章介绍了多元分析中常用的矩阵代数知识，这是全书的基础。第二章至第四章介绍的基本上是一元统计推广到多元统计的内容，主要阐述了多元分布的基本概念和多元正态分布及其统计推断。第五章至第十章是多元统计独有的内容，这部分内容具有很强的实用性，特别是介绍了各种降维技术，将原始的多个指标化为少数几个综合指标，以便于对数据进行分析。

读者可进入："上财教学网"http://bb.shufe.edu.cn/，点击：教师主页→统计与管理学院→王学民，从中下载如下资料：(1)与本教材相配套的PPT课件；(2)书中(需使用SAS软件运算的)所有例题、习题的数据及SAS程序；(3)与本教材相配套的分章来写的《JMP的应用》和《SPSS的应用》；(4)其他配书资料。这些配书资料可能会作不定期的更新。

由于编者水平有限，再加上作者长期以来眼睛一直不能多看书，书中错误、不足之处在所难免，恳请读者批评指正。

王学民

2014年6月

目　录

第一章

矩阵代数

本章我们对书中需要用到的有关矩阵代数知识作一些简单的回顾和介绍，熟悉这些内容将为以后各章的阅读带来很大的方便。如果读者希望对这方面知识有更多、更详细的了解，可参考有关的教科书。

§1.1 定义

将 $p\times q$ 个实数 $a_{11},a_{12},\cdots,a_{pq}$ 排列成的一个有 p 行、q 列的矩形阵列

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

称为 $p\times q$ **矩阵**[①]，常记作 $\boldsymbol{A}=(a_{ij}):p\times q$，其中 a_{ij} 是第 i 行、第 j 列的元素。例如，矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 9 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

是一个 2×3 矩阵，其中 $a_{11}=5,a_{12}=2,a_{13}=9,a_{21}=3,a_{22}=7,a_{23}=1$。

若 $q=1$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 p 维**列向量**，记作

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$$

例如，带有元素 6,9 和 3 的 3 维列向量可写为

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

若 $p=1$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 q 维**行向量**，用转置符号记作

$$\boldsymbol{a}'=(a_1,a_2,\cdots,a_q)$$

例如，带有元素 2,7,3,4,3 的 5 维行向量可写为

$$\boldsymbol{a}'=(2,7,3,4,3)$$

---

① 本书中矩阵用大写的黑体字母表示，向量用小写的黑体字母表示。

$\sqrt{a'a}$ 称为向量 a 的**长度**，记作 $\|a\|$。若 $\|a\|=1$，则称 a 为**单位向量**。任一非零向量（即元素不全为零）a 被其长度 $\|a\|$ 相除后即为单位向量，即 $c=a/\|a\|$ 是一个单位向量。在 p 维欧式空间 R^p 中，p 维向量 a 既可看作是一个带有方向和长度的矢量，也可看作是一个带有 p 个分量坐标的点。

若 A 的所有元素全为零，则称 A 为**零矩阵**，记作 $\mathbf{0}_{pq}$ 或 $\mathbf{0}$。例如，

$$\mathbf{0}_{23}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

若 $p=q$，则称 A 为 p 阶**方阵**，$a_{11},a_{22},\cdots,a_{pp}$ 称为它的**对角线元素**，其他元素 $a_{ij}(i\neq j)$ 称为**非对角线元素**。

若方阵 A 的对角线下方的元素全为零，则称 A 为**上三角矩阵**。显然，$a_{ij}=0,i>j$。例如，

$$\begin{pmatrix}4&1&3\\0&8&9\\0&0&7\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}3&1\\0&4\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}2&5&0\\0&4&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

若方阵 A 的对角线上方的元素全为零，则称 A 为**下三角矩阵**。显然，$a_{ij}=0,i<j$。

若方阵 A 的所有非对角线元素均为零，则称 A 为**对角矩阵**，可记为 $\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{pp})$。例如，

$$\mathrm{diag}(2,1,3)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

若 p 阶对角矩阵 A 的所有 p 个对角线元素均为 1，则称 A 为 p 阶**单位矩阵**，记作 I_p 或 I。例如，

$$I_1=(1),\quad I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

若将矩阵 A 的行与列互换，则得到的矩阵称为 A 的**转置**，记作 A'，即

$$A'=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{p1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{p2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1q}&a_{2q}&\cdots&a_{pq}\end{pmatrix}$$

例如，若

$$A=\begin{pmatrix}1&3&1\\2&4&6\end{pmatrix}$$

则

$$A'=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\1&6\end{pmatrix}$$

若方阵 A 满足 $A'=A$，则称 A 为**对称矩阵**。显然，$a_{ij}=a_{ji}$。例如，

$$\begin{pmatrix}1&3\\3&4\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}9&0&0\\0&7&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}2&3&5\\3&0&1\\5&1&1\end{pmatrix}$$

§1.2　矩阵的运算

若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij}):p\times q$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij}):p\times q$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和定义为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij}):p\times q$$

若 c 为一常数，则它与 $\boldsymbol{A}$ 的积定义为

$$c\boldsymbol{A}=(ca_{ij}):p\times q$$

若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij}):p\times q$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij}):q\times r$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的积定义为

$$\boldsymbol{AB}=\left(\sum_{k=1}^{q}a_{ik}b_{kj}\right):p\times r$$

从上述定义中容易得出如下**规律**：

(1) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})'=\boldsymbol{A}'+\boldsymbol{B}'$。

(2) $(\boldsymbol{AB})'=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$。

(3) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2)=\boldsymbol{AB}_1+\boldsymbol{AB}_2$。

(4) $\boldsymbol{A}\left(\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{B}_i\right)=\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{AB}_i$。

(5) $c(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=c\boldsymbol{A}+c\boldsymbol{B}$。

例 1.2.1　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&4&2\\3&1&5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}6&0&2\\3&1&4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}$$

则

(1) $\boldsymbol{A}'=\begin{pmatrix}1&3\\4&1\\2&5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}'=\begin{pmatrix}6&3\\0&1\\2&4\end{pmatrix}$；

(2) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}7&4&4\\6&2&9\end{pmatrix}$；

(3) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})'=\boldsymbol{A}'+\boldsymbol{B}'=\begin{pmatrix}7&6\\4&2\\4&9\end{pmatrix}$；

(4) $\boldsymbol{CA}=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4&2\\3&1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&5&7\\11&11&19\end{pmatrix}$。

注意：$\boldsymbol{AC}$ 是没有定义的。

若两个 p 维向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 满足

$$\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_pb_p=0$$

则称 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ **正交**。几何上，正交向量之间相互垂直。

若方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{AA}'=\boldsymbol{I}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**正交矩阵**。例如，

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2\cdot1}}&\frac{-1}{\sqrt{2\cdot1}}&0\\\frac{1}{\sqrt{3\cdot2}}&\frac{1}{\sqrt{3\cdot2}}&\frac{-2}{\sqrt{3\cdot2}}\end{pmatrix}$$

由§1.4 可知，$\boldsymbol{AA}'=\boldsymbol{I}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}^{-1}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，因此正交矩阵可有这三种等价定义。

正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有着较好的几何意义。如将 p 维向量 $\boldsymbol{x}$ 看作是在 R^p 中的一个点，则 $\boldsymbol{x}$ 的各分量是该点在相应各坐标轴上的坐标。正交变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ax}$ 意味着对原 p 维坐标系作一刚性旋

转(或称正交旋转,此时$|\boldsymbol{A}|=1$)或反射(此时$|\boldsymbol{A}|=-1$)①,$\boldsymbol{y}$ 的各分量正是该点在新坐标系下的坐标。习题 1.7 是二维情形下的一种直观展示,在三维情形下同样可以有着直观的展示。由于

$$\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})'(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}$$

因此,在新、旧坐标系下,该点到原点的距离保持不变。

若方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为**幂等矩阵**。例如,

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

对称的幂等矩阵称为**投影矩阵**。

矩阵的分块是在处理阶数较高的矩阵时常用的方法。有时,我们把一个大矩阵看成是由一些小矩阵组成的,就像矩阵是由数组成的一样。设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij}):p\times q$,将它分成四块,表示成

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{c:c}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \hdashline \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{array}\right)$$

其中 $\boldsymbol{A}_{11}:k\times l,\boldsymbol{A}_{12}:k\times(q-l),\boldsymbol{A}_{21}:(p-k)\times l,\boldsymbol{A}_{22}:(p-k)\times(q-l)$。例如,若

$$\boldsymbol{A}_{11}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_{12}=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_{21}=(5,4),\quad \boldsymbol{A}_{22}=(6)$$

则

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:c}1 & 3 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ \hdashline 5 & 4 & 6\end{array}\right)$$

若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有相同的分块,则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{B}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21}+\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}+\boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix}$$

若 $\boldsymbol{C}$ 为 $q\times r$ 矩阵,分成

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12}\\ \boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{C}_{22}\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{C}_{11}:l\times m,\boldsymbol{C}_{12}:l\times(r-m),\boldsymbol{C}_{21}:(q-l)\times m,\boldsymbol{C}_{22}:(q-l)\times(r-m)$,则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12}\\ \boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{C}_{22}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{C}_{11}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{C}_{12}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{C}_{22}\\ \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{C}_{11}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{C}_{12}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{C}_{22}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

例 1.2.2(有用结论) 证明正交矩阵 $\boldsymbol{A}:p\times p$ 的 p 个列向量和 p 个行向量都是一组正交单位向量。

证明 将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分别按列向量和行向量分块,并记

---

① 反射相当于旋转后再将其中的一个轴作镜面反射。在三维空间中,经反射后右(左)手坐标系将变为左(右)手坐标系。在统计上,反射和旋转所起的作用完全相同,本书后面将只提旋转,因为它更易于理解。

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_p)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}'_{(1)}\\\boldsymbol{a}'_{(2)}\\\vdots\\\boldsymbol{a}'_{(p)}\end{pmatrix}$$

由 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$,得

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}'_1\\\boldsymbol{a}'_2\\\vdots\\\boldsymbol{a}'_p\end{pmatrix}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_p)=\boldsymbol{I}$$

于是

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}'_1\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}'_1\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}'_1\boldsymbol{a}_p\\\boldsymbol{a}'_2\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}'_2\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}'_2\boldsymbol{a}_p\\\vdots & \vdots & & \vdots\\\boldsymbol{a}'_p\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}'_p\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}'_p\boldsymbol{a}_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\0 & & & 1\end{pmatrix}$$

故有

$$\boldsymbol{a}'_i\boldsymbol{a}_j=\begin{cases}1, & 若\ i=j\\0, & 若\ 1\leqslant i\neq j\leqslant p\end{cases}$$

即 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_p$ 为一组正交单位向量。同理,由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{I}$ 可证 $\boldsymbol{a}_{(1)},\boldsymbol{a}_{(2)},\cdots,\boldsymbol{a}_{(p)}$ 也是一组正交单位向量。

从以上证明过程易看出,要验证一个方阵是否为正交矩阵只需验一下其所有列或所有行是否为一组正交单位向量即可。

§1.3 行列式

p 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的**行列式**定义为

$$|\boldsymbol{A}|=\sum_{j_1j_2\cdots j_p}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_p)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{pj_p} \tag{1.3.1}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_p}$ 表示对 $1,2,\cdots,p$ 的所有排列求和,$\tau(j_1j_2\cdots j_p)$ 是排列 $j_1,j_2,\cdots,j_p$ 中逆序的总数,称它为这个排列的**逆序数**,一个逆序是指在一个排列中一对数的前后位置与大小顺序相反,即前面的数大于后面的数。例如,$\tau(3142)=1+\tau(1342)=3+\tau(1234)=3$。

例 1.3.1

(1) $\begin{vmatrix}3 & 1\\2 & 6\end{vmatrix}=3\times6-2\times1=16$;

(2) $\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 2 & 0\\0 & 3 & 0 & 0\\4 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$ 是一个四阶行列式,在展开式中应该有 $4!=24$ 项,但不为零的项只有 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ 这一项,而 $\tau(4321)=6$,所以,该行列式为 $(-1)^6\times1\times2\times3\times4=24$。

由行列式的定义可以得到如下的一些**基本性质**:

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 的某行(或列)为零,则 $|\boldsymbol{A}|=0$。

(2) $|\boldsymbol{A}'|=|\boldsymbol{A}|$。

(3) 若将 $\boldsymbol{A}$ 的某一行(或列)乘以常数 c,则所得矩阵的行列式为 $c|\boldsymbol{A}|$。

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 是一个 p 阶方阵,c 为一常数,则 $|c\boldsymbol{A}|=c^p|\boldsymbol{A}|$。

(5) 若互换 $\boldsymbol{A}$ 的任意两行(或列),则行列式符号改变。

(6) 若 $\boldsymbol{A}$ 的某两行(或列)相同,则行列式为零。

(7) 若将 $\boldsymbol{A}$ 的某一行(或列)的倍数加到另一行(或列),则所得行列式不变。

(8) 若 $\boldsymbol{A}$ 的某一行(或列)是其他一些行(或列)的线性组合,则行列式为零。

(9) 若 $\boldsymbol{A}$ 为上三角矩阵或下三角矩阵或对角矩阵,则 $|\boldsymbol{A}|=\prod_{i=1}^{p}a_{ii}$。

(10) 若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均为 p 阶方阵,则 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$。

例 1.3.2 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均为 p 阶方阵,则 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 有相同的行列式。

(11) $|\boldsymbol{AA}'|\geqslant 0$。

证明 由本章稍后§1.7中的性质(6)和(5)即可证得。

(12) 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是方阵,则

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \tag{1.3.2}$$

证明 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij}):p\times p$,$\boldsymbol{B}=(b_{kl}):q\times q$,则由行列式的定义(1.3.1)可得

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}&=\sum_{\substack{j_1\cdots j_p\\ l_1\cdots l_q}}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_p(p+l_1)\cdots(p+l_q))}a_{1j_1}\cdots a_{pj_p}b_{1l_1}\cdots b_{ql_q}\\ &=\sum_{\substack{j_1\cdots j_p\\ l_1\cdots l_q}}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_p)}a_{1j_1}\cdots a_{pj_p}\cdot(-1)^{\tau(l_1\cdots l_q)}b_{1l_1}\cdots b_{ql_q}\\ &=\sum_{j_1\cdots j_p}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_p)}a_{1j_1}\cdots a_{pj_p}\cdot\sum_{l_1\cdots l_q}(-1)^{\tau(l_1\cdots l_q)}b_{1l_1}\cdots b_{ql_q}\\ &=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\end{aligned}$$

(13) 若 $\boldsymbol{A}:p\times q$,$\boldsymbol{B}:q\times p$,则

$$|\boldsymbol{I}_p+\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{I}_q+\boldsymbol{BA}| \tag{1.3.3}$$

证明 因为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_p & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_p & -\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_p+\boldsymbol{AB} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_q\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_p & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_p & -\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_p & -\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_q+\boldsymbol{BA}\end{pmatrix}$$

上述两个等式两边各取行列式,故得

$$|\boldsymbol{I}_p+\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{I}_q+\boldsymbol{BA}|$$

例 1.3.3(有用结论) 设 $\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}$ 为两个 p 维向量,则

$$|\boldsymbol{I}_p+\boldsymbol{xy}'|=1+\boldsymbol{y}'\boldsymbol{x}$$

设 $\boldsymbol{A}$ 为 p 阶方阵,将其元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列划去之后所得 $(p-1)$ 阶矩阵的行列式,称为元素 a_{ij} 的**余子式**,记为 M_{ij}。$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**。有以下公式成立

$$|\boldsymbol{A}|=\sum_{j=1}^{p}a_{ij}A_{ij}=\sum_{i=1}^{p}a_{ij}A_{ij} \tag{1.3.4}$$

$$\sum_{j=1}^{p} a_{kj}A_{ij}=0 \quad (k\neq i), \quad \sum_{i=1}^{p} a_{ik}A_{ij}=0 \quad (k\neq j)$$

例 1.3.4 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 6 & 5 & 10 & 1 \\ 7 & 10 & 7 & 6 \\ 9 & 8 & 12 & 2 \\ 4 & 9 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$

则 a_{32} 的余子式为

$$M_{32}=\begin{vmatrix} 6 & 10 & 1 \\ 7 & 7 & 6 \\ 4 & 11 & 3 \end{vmatrix}=-191$$

其代数余子式为

$$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-M_{32}=191$$

§1.4 矩阵的逆

若方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**非退化方阵**；若 $|\boldsymbol{A}|=0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**退化方阵**。设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是一非退化方阵，若方阵 $\boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{I}$，则称 $\boldsymbol{C}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**逆矩阵**，记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 必是一个非退化矩阵。令

$$\boldsymbol{B}'=(A_{ij})/|\boldsymbol{A}| \tag{1.4.1}$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式，则容易验证 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$。由于 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{B}$，因此 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是唯一的，且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$。

逆矩阵具有如下的**基本性质**：

(1) $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$。

(2) $(\boldsymbol{A}')^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})'$。

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 均为 p 阶非退化方阵，则

$$(\boldsymbol{AC})^{-1}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$$

(4) $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$。

(5) 若 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}'$。

(6) 若 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{pp})$ 非退化（即 $a_{ii}\neq 0$，$i=1,2,\cdots,p$），则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\mathrm{diag}(a_{11}^{-1},a_{22}^{-1},\cdots,a_{pp}^{-1})$。

(7) 若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为非退化方阵，则

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix} \tag{1.4.2}$$

例 1.4.1 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

于是 $|\boldsymbol{A}|=15$，$A_{11}=(-1)^{1+1}\times 6=6$，$A_{12}=(-1)^{1+2}\times 3=-3$，$A_{21}=(-1)^{2+1}\times(-1)=1$，$A_{22}=(-1)^{2+2}\times 2=2$，故 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为

$$A^{-1}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}6 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & \frac{1}{15}\\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{15}\end{bmatrix}$$

例 1.4.2 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 6 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 6\end{pmatrix}^{-1} & \begin{matrix}0\\ 0\end{matrix}\\ \begin{matrix}0 & \quad 0\end{matrix} & (-4)^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & \frac{1}{15} & 0\\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{15} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

§1.5 矩阵的秩

一组同维向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$,若存在不全为零的常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$,使得

$$c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0} \tag{1.5.1}$$

则称该组向量**线性相关**。若向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 不线性相关,就称为**线性无关**。如果等式(1.5.1)成立,则至少有一个向量 $\boldsymbol{a}_i$ 可以表示成该组其余向量的线性组合,这意味着该组有“多余”的向量,而在线性无关的向量组中却没有这种“多余”的向量。

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关行向量的最大数目称为**行秩**,其线性无关列向量的最大数目称为**列秩**。矩阵的行秩和列秩必相等,故统一将其称为 $\boldsymbol{A}$ 的**秩**,记作 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$。

矩阵的秩具有下述**基本性质**:

(1) $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=0$,当且仅当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$。

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 为 $p\times q$ 矩阵,且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$,则 $1\leqslant\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})\leqslant\min\{p,q\}$(若 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=p$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为**行满秩**的;若 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=q$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为**列满秩**的)。

(3) $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}')$。

(4) $\mathrm{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})+\mathrm{rank}(\boldsymbol{B})$。

(5) $\mathrm{rank}(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}),\mathrm{rank}(\boldsymbol{B})\}$。

(6) 若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 为非退化方阵,则

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{ABC})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{B})$$

(7) p 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 是非退化的,当且仅当 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=p$(称作 $\boldsymbol{A}$ 是**满秩**的)。

(8) $\mathrm{rank}(\boldsymbol{AA}')=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$。

证明 不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的阶数为 $p\times q$,则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解空间维数分别是 $q-\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$ 和 $q-\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})$。若 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解,则 $\boldsymbol{x}$ 也必然是 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解;反之,若 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解,则 $(\boldsymbol{Ax})'(\boldsymbol{Ax})=\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{Ax})=0$,从而 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$。所以两个线性方程组有完全相同的解空间,即有