微波技术中的有限元方法

廖承恩　蒲国胜　编

西安电子科技大学情报资料室

一九八九年十月

前　言

有限元方法是五十年代初期发展起来的一种求解变分问题的数值计算方法，六十年代中期开始应用于电磁场问题的计算。这种方法把一个连续场域问题划分成有限个单元来近似求解，因而处理问题比较简单，且不受场域边界形状、介质均匀与否及导体带厚薄的限制，具有广泛的适应性，特别适合于几何形状和物理条件比较复杂的电磁场和微波技术问题，并已获得了愈来愈广泛的应用。

本书结合编者最近一二年的研究成果，比较系统地介绍有限元方法的基本原理，分专题介绍有限元方法在微波技术中的应用。全书共分五章：第一章有限元方法基本原理，结合电磁场方程介绍有限元方法的变分原理、剖分插值及有限元方法的一般求解程序；第二章微带传输线，介绍有限元方法在各种微带传输线特性求解中的应用；第三章介质波导（Ⅰ），介绍有限元法在各种介质波导特性求解中的应用；第四章介质波导（Ⅱ），结合介质波导特性的求解，介绍消除虚模的方法；第五章微波无源元件，介绍有限元方法在微波谐振器、平面电路环行器、H面波导接头与脊波导特性分析中的应用。

限于编者的水平，书中难免有不妥和错误之处，敬请读者批评指正。

编者　　1988年12月于

西安电子科技大学

目　　录

第一章　有限元法基本原理

§1·1　引　言

有限元方法是R·Courant于1943年首先提出来的一种椭圆型方程的数值解法。最初用于力学领域，六十年代中期开始用于电磁场问题的计算，并在一切连续场领域获得了广泛的应用。

有限元方法之所以能够获得迅速的发展和广泛的应用，是因为它具有牢固的数学基础和独特的优点。其数学基础主要建立在两个方面：一是变分原理，二是剖分插值。从第一个方面看，有限元法是传统的能量法即里兹-伽辽金方法的一种变形；从第二个方面看，有限元法则是差分方法即网格法的一种变形。可见有限元法是这两种方法相结合取长补短并进一步发展了的结果。这使有限元法具有很广泛的适应性，特别适合于几何形状、物理条件比较复杂的问题，便于处理边界条件，便于程序的标准化。

1965年A. M. Winslow首先将有限元法应用于电气工程中。随后，P. P. Silvester于1969年将有限元方法用来求解时变场的稳态解。近年来有限元法在求解电磁场问题中的应用不断得到发展。用有限元法求解非线性场及分层介质中的电磁场都有其独特的优点，处理方法比较简单，且不受场域边界形状的限制，对第二类、第三类及不同媒质分界面的边界条件都不必单独处理。

本章首先介绍有限元方法的基本原理、计算方法与使用要点，然后结合具体电磁场方程的有限元求解，阐述剖分插值原理，最后介绍求解曲线边界场域问题的自然坐标。

§1·2　有限元方法的变分原理

所谓变分问题就是求泛函的极值问题。泛函$J(\phi)$求极值函数与微分方程求边值条件下的解是等价的。因此，可将求解微分方程的边值问题化为变分问题。这就是所谓求解微分方程的变分原理。

要想把求解微分方程的问题化为变分问题来求解，需要解决两个问题。一是构造与所求解微分方程对应的泛函，使该泛函的变分方程正好就是所要求解的微分方程；二是相应函数的近似解法，即变分方法问题。

关于泛函的建立问题，迄今数学上还没有一个一般的方法，但电磁场中常遇到的一些偏微分方程相应的泛函都已被找到。

关于相应函数（或称试验函数）的近似解法，传统的变分法已为之奠定了基础。主

要的变分直接法有里兹（Ritz）法、尤拉（Euler）的有限差分法和最小二乘法等等。变分直接法的共同思想是把泛函的极值问题近似地转化为一般多元函数的极值问题，用有限维子空间中的函数去逼近无限维空间中的极值函数，从而近似地求得泛函的极值。

有限元法解题的第一步跟传统的变分法一样，首先是把所求解的微分方程问题转化为等价的变分问题，然后通过离散化处理构造一个分片解析的有限元子空间，把变分问题近似地转化为有限元子空间的多元函数极值问题，求此变分问题的近似解作为所求方程的近似解。这就是有限元法的变分原理。

相当多的电磁场问题所要求的并不是空间每点的场值，而是某一特征量，例如求谐振腔的谐振频率、传输线的特性阻抗等。这时，利用变分法来求就特别方便。在电磁场问题中，是把所要求解的问题表示成边值问题，即用偏微分方程和定解条件来描述电磁场问题。用有限元法求解，就需将偏微分方程变换成代数方程组，然后结合边界条件进行求解。具体来说，大致需要分如下几个步骤：

1. 找出与所求解边值问题相应的泛函及其变分问题；

2. 将求解的连续场域进行离散，即按一定方式将场域剖分成有限个单元，然后将剖分单元中任意一点的未知函数用该剖分单元中的形状函数及离散点上的函数值进行展开。这样，就把连续场域中无限个自由度函数类中的极值问题离散化为有限个自由度子类中的极值问题；

3. 求泛函的极值，导出联立代数方程组即有限元方程；

4. 用直接法或迭代法求解有限元方程。

下面以泊松方程为例来讨论变分原理。

对于静电场或恒定电场问题，描述它们的泛定方程是泊松方程$\nabla^2\phi=-\rho/\varepsilon$。对应于该方程的边界条件有三类：

(1) $\phi\big|_s=0$；

(2) $\dfrac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_s=0$；

(3) $\left[\dfrac{\partial\phi}{\partial n}+f_1(p)\phi\right]\Big|_s=0$

分别称之为齐次第一类、第二类和第三类边界条件。齐次第二类边界条件是齐次第三类边界条件的特例，即当$f_1(p)=0$的情况。在数学物理方程中，已经证明泊松方程边值问题与如下泛函取极值（即变分问题）的解等价：

$$J(\phi)=-\frac{1}{2}\int_v\varepsilon\phi\nabla^2\phi dv-\int_v\rho\phi dv=\min \qquad (1.2-1)$$

利用格林定理，可使上式中的被积函数降阶。即由恒等式

$$\begin{aligned}\varepsilon\nabla\cdot\phi\nabla\phi&=\varepsilon\phi\nabla\cdot\nabla\phi+\varepsilon\nabla\phi\cdot\nabla\phi\\&=\varepsilon\phi\nabla^2\phi+\varepsilon|\nabla\phi|^2\end{aligned}$$

对此式两边进行体积分，并应用高斯散度定理，得到

$$\int_v \varepsilon\nabla\cdot\phi\nabla\phi dv=\oint_s \varepsilon\phi\nabla\phi\cdot ds$$

$$=\int_v \varepsilon[\phi\nabla^2\phi+|\nabla\phi|^2]dv$$

或者

$$-\int_v\varepsilon\phi\nabla^2\phi dv=\int_v\varepsilon|\nabla\phi|^2dv-\oint_s\varepsilon\phi\nabla\phi\cdot ds \qquad (1.2-2)$$

将式(1.2-2)代入式(1.2-1)，经整理可得

$$J(\phi)=\frac{1}{2}\int_v\varepsilon|\nabla\phi|^2dv-\frac{1}{2}\oint_s\varepsilon\phi\frac{\partial\phi}{\partial n}ds-\int_v\rho\phi dv \qquad (1.2-3)$$

式中 s 是包围 v 的闭合边界。

对于齐次第一类和第二类边界条件，上式可简化成

$$J(\phi)=\frac{1}{2}\int_v\varepsilon|\nabla\phi|^2dv-\int_v\rho\phi dv \qquad (1.2-4)$$

对于齐次第三类边界条件，将条件 $\frac{\partial\phi}{\partial n}=-f_1(p)\phi$ 代入式(1.2-3)，经整理得到

$$J(\phi)=\frac{1}{2}\int_v[\varepsilon|\nabla\phi|^2-2\rho\phi]dv+\frac{1}{2}\oint_s\varepsilon f_1(p)\phi^2ds \qquad (1.2-5)$$

若 $\rho=0$，则上式简化成

$$J(\phi)=\frac{1}{2}\int_v\varepsilon|\nabla\phi|^2dv+\frac{1}{2}\oint_s\varepsilon f_1(p)\phi^2ds \qquad (1.2-6)$$

应用极限概念也可以证明边值问题与上述泛函极值问题等价，同时可说明自然边界条件与强加边界条件的区别。

设 $\varphi(x,y,z)$ 是使式(1.2-5)取极值的函数，令

$$\phi(x,y,z)=\varphi(x,y,z)+\eta h(x,y,z) \qquad (1.2-7)$$

代入式(1.2-5)，则泛函应是 η 的函数；当 $\eta\to0$ 时的值即为该泛函的极值。

将式(1.2-7)代入式(1.2-5)，且利用关系

$$|\nabla\phi|^2=\nabla\phi\cdot\nabla\phi=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2$$

可得

$$J(\phi)=J(x,y,z,\eta)=\int_v \frac{1}{2}\varepsilon\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\eta\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\eta\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\eta\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2\right]dv$$

$$-\int_v \rho(\varphi+\eta h)\,dv+\frac{1}{2}\oint_s \varepsilon f_1(p)(\varphi+\eta h)^2 ds \tag{1.2-8}$$

当参量η变化时，使$J(x,y,z,\eta)$取极值的必要条件是

$$\frac{\partial J(x,y,z,\eta)}{\partial\eta}=0$$

或者

$$\lim_{\eta\to 0}\frac{J(x,y,z,\eta)-J(x,y,z,0)}{\eta}=0$$

上式可定义为泛函J的变分δJ，即

$$\delta J=\lim_{\eta\to 0}\frac{J(x,y,z,\eta)-J(x,y,z,0)}{\eta}=0 \tag{1.2-9}$$

所以在变分学中，常称$\delta J=0$为泛函取极值的必要条件。将式（1.2-8）和（1.2-5）代入式（1.2-9），且因

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\eta\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\eta\frac{\partial h}{\partial x}+\eta^2\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2$$

于是得到

$$\int_v\left[\varepsilon\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial z}\right)-\rho h\right]dv$$

$$+\frac{1}{2}\oint_s 2\varepsilon f_1(p)\varphi h\,ds=0$$

利用$\nabla\varphi\cdot\nabla h=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial z}$，可将上式改写成

$$\int_v(\varepsilon\nabla\varphi\cdot\nabla h-\rho h)\,dv+\oint_s\varepsilon f_1\varphi h\,ds=0 \tag{1.2-10}$$

又因

$$\nabla\cdot h\nabla\varphi=h\nabla^2\varphi+\nabla h\nabla\varphi$$
$$\varepsilon\nabla h\cdot\nabla\varphi=\varepsilon\nabla\cdot h\nabla\varphi-\varepsilon h\nabla^2\varphi$$

所以

$$\int_v \varepsilon\nabla h\cdot\nabla\varphi\, dv=-\int_v \varepsilon h\nabla^2\varphi\, dv+\varepsilon\int_v \nabla\cdot h\nabla\varphi\, dv$$

再利用高斯散度定理及$\nabla\varphi\cdot d\vec{s}=\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds$，上式可写成

$$\int_v \varepsilon\nabla h\cdot\nabla\varphi\, dv=-\int_v \varepsilon h\nabla^2\varphi\, dv+\varepsilon\oint_s h\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds$$

将此式代入式（1．2－10），可得

$$\int_v(-\varepsilon\nabla^2\varphi-\rho)dv+\varepsilon\oint_s\left(f_1\varphi+\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)ds=0$$

（1．2－11）

上式要成立，则被积函数应分别等于零，于是得到

$$\begin{cases}-\varepsilon\nabla^2\varphi=\rho\\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}+f_1\varphi=0\end{cases}\qquad (1.2-12)$$

式（1．2－12）即齐次第三类边值问题。齐次第二类边值问题则是它的特例（即当$f_1=0$的情况）。

根据上面的分析可以清楚地看到，在取泛函J（ϕ）极值的过程中，齐次第二类和第三类边界条件已自动得到满足。还可以证明，非齐次第二类或第三类边界条件在求泛函极值过程中也自动满足，只不过不同的边值问题对应于不同的泛函极值问题。

由于在求泛函极值过程中，第一类边界条件没有自动满足，所以在求泛函极值过程中，第一类边值问题变分问题还必须考虑第一类边界条件。称这类边界条件为强加边界条件，相应的变分问题称为条件变分问题。

齐次第二类边界条件下的无条件变分问题应为

$$J(\phi)=\frac{1}{2}\int_v \varepsilon|\nabla\phi|^2dv-\int_v \rho\phi\, dv=\min \qquad (1.2-13)$$

若边值问题中尚有第一类边界条件，则相应的条件变分问题为

$$\begin{cases}J(\phi)=\frac{1}{2}\int_v \varepsilon|\nabla\phi|^2dv-\int_v \rho\phi\, dv=\min\\ \phi|_s=f_0(p)\end{cases}\qquad (1.2-14)$$

式中p表示在s面上任意点的坐标。

若在所研究的区域内没有自由电荷，即$\rho=0$，则其相应的条件变分问题为

$$J(\phi)=\frac{1}{2}\int_v \varepsilon|\nabla\phi|^2 dv=\min$$
$$\phi|_s=f_0(p) \qquad (1.2-15)$$

以上所研究的场域中，假设介质是均匀的，但是在实际问题中，经常遇到有分层介质的情况。在这种情况下，各均匀介质区域仍可用泛定方程描述，但在介质分界面上应通过分界面上的边界条件联系起来。在不同的均匀介质区域中，分别使用恒等式

$$\varepsilon\nabla\cdot\phi\nabla\phi=\varepsilon\phi\nabla\cdot\nabla\phi+\varepsilon\nabla\phi\cdot\nabla\phi$$
$$=\varepsilon\phi\nabla^2\phi+\varepsilon|\nabla\phi|^2$$

和高斯散度定理。但此关系式在介质分界面上不能成立。考虑图1.2－1所示由两层不同介质组成的场域。设在介质ε_1中的电位为ϕ_1，在介质ε_2中的电位为ϕ_2，介质分界面用s_0表示。

在区域v_1中，有

$$\int_{v_1}\varepsilon_1\nabla\cdot\phi_1\nabla\phi_1 dv$$
$$=\oint_{s_1+s_0^-}\varepsilon_1\phi_1\nabla\phi_1\cdot d\vec{s}$$
$$=\int_{v_1}\varepsilon_1[\phi_1\nabla^2\phi_1+|\nabla\phi_1|^2]dv \qquad (1.2-16)$$

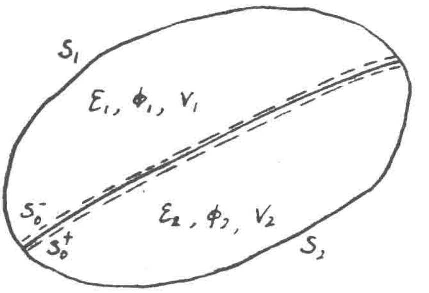

图 1.2－1 介质分界面

在区域v_2中，有

$$\int_{v_2}\varepsilon_2\nabla\cdot\phi_2\nabla\phi_2 dv=\oint_{s_2+s_0^+}\varepsilon_2\phi_2\nabla\phi_2\cdot d\vec{s}$$
$$=\int_{v_2}\varepsilon_2[\phi_2\nabla^2\phi_2+|\nabla\phi_2|^2]dv \qquad (1.2-17)$$

式中，s_0^-表示位于体积v_1内无限接近于s_0的分界面，s_0^+表示位于体积v_2内无限接近于s_0的分界面。由于s_0^-和s_0^+的正法线方向相反，所以若将上两式中的面积分项相加，则为

$$\int_{s_1}\varepsilon_1\phi_1\nabla\phi_1\cdot d\vec{s}+\int_{s_2}\varepsilon_2\phi_2\nabla\phi_2\cdot d\vec{s}+\int_{s_0}\left(\varepsilon_1\phi_1\frac{\partial\phi_1}{\partial n}-\varepsilon_2\phi_2\frac{\partial\phi_2}{\partial n}\right)ds$$
$$=\int_{s_1}\varepsilon_1\phi_1\nabla\phi_1\cdot d\vec{s}+\int_{s_2}\varepsilon_2\phi_2\nabla\phi_2\cdot d\vec{s}$$

这是因为在介质分界面上

$$\phi_1=\phi_2, \quad \varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}$$

于是，将式（1.2-16）和（1.2-17）合并，得到

$$\int_{v_1+v_2}\varepsilon\nabla\cdot\phi\nabla\phi dv=\int_{s_1+s_2}\varepsilon\phi\nabla\phi\cdot d\vec{s}$$
$$=\int_{v_1+v_2}\varepsilon[\phi\nabla^2\phi+|\nabla\phi|^2]d\tau$$

（1.2-18）

移项后即得到

$$-\int_{v_1+v_2}\varepsilon\phi\nabla^2\phi dv=\int_{v_1+v_2}\varepsilon|\nabla\phi|^2dv-\int_{s_1+s_2}\varepsilon\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds$$

（1.2-19）

式（1.2-19）与式（1.2-2）类似，因此前面得出的一些结论完全适用于具有分层介质中的拉普拉斯方程或泊松方程。由于不同介质分界面上的边界条件为齐次自然边界条件，所以用有限元法求解分层介质的电磁场问题异常方便。这也是有限元法的优点之一。

§1·3 拉普拉斯方程的有限元解

1. 平面问题的三角形单元

如果所要求解的问题是平面电磁场问题，其Laplace方程为

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0 \qquad (1.3-1)$$

设边界条件为

$$\phi|_L=0$$

则其对应的泛函为

$$\begin{cases} J(\phi)=\int_s\frac{1}{2}\varepsilon[(\frac{\partial\phi}{\partial x})^2+(\frac{\partial\phi}{\partial y})^2]dxdy=\min \\ \phi|_L=0 \end{cases}$$

（1.3-2）

现在选取最基本的三角元中的插值多项式，能满足完备性、一致性及相容性条件的最简单多项式是线性插值多项式。它可表示为（见图1.3-1）

$$\phi(x, y)=\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 y \tag{1.3-3}$$

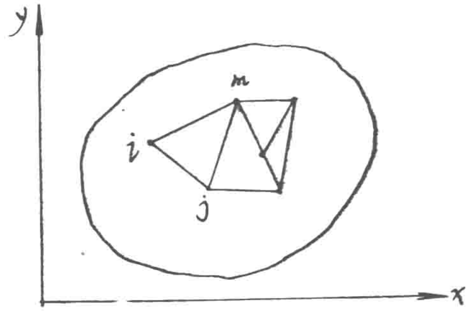

图1．3－1　平面三角单元

式中的三个未知数可由三角形的三个顶点处的坐标及电位值来决定，即有

$$\begin{cases} \varphi_i=\alpha_1+\alpha_2 x_i+\alpha_3 y_i \\ \varphi_j=\alpha_1+\alpha_2 x_j+\alpha_3 y_j \\ \varphi_m=\alpha_1+\alpha_2 x_m+\alpha_3 y_m \end{cases} \tag{1.3-4}$$

由此可解得

$$\begin{cases} \alpha_1=\dfrac{1}{2\Delta}(a_i \phi_i+a_j \phi_j+a_m \phi_m) \\ \alpha_2=\dfrac{1}{2\Delta}(b_i \phi_i+b_j \phi_j+b_m \phi_m) \\ \alpha_3=\dfrac{1}{2\Delta}(c_i \phi_i+c_j \phi_j+c_m \phi_m) \end{cases} \tag{1.3-5}$$

式中

$$\begin{array}{lll} a_i=x_j y_m-x_m y_j, & a_j=x_m y_i-x_i y_m, & a_m=x_i y_i-x_j y_i \\ b_i=y_j-y_m, & b_j=y_m-y_i, & b_m=y_i-y_j \\ c_i=x_m-x_j, & c_j=x_i-x_m, & c_m=x_j-x_i \end{array} \tag{1.3-6}$$

$\Delta=\dfrac{1}{2}(b_i c_j-b_j c_i)$ 表示该三角元的面积

将求出的α_1、α_2和α_3代入插值多项式（1．3－3），最后可得

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \frac{1}{2\Delta}[(a_i+b_i x+c_i y)\phi_i+(a_j+b_j x+c_j y)\phi_j \\ &\quad +(a_m+b_m x+c_m y)\phi_m] \\ &= \sum_{i,j,m} N_i^e(x, y)\phi_i \end{aligned} \tag{1.3-7}$$

式（1．3－7）表示三角单元中任一点电位与该单元各顶点电位值之间的关系。写成矩阵形式为

$$\phi(x, y)=[N_i^e \ N_j^e \ N_m^e]\begin{bmatrix}\phi_i \\ \phi_j \\ \phi_m\end{bmatrix}=[N]_e[\phi]_e \tag{1.3-8}$$

式中

$$\begin{cases} N_i^e(x, y)=\dfrac{1}{2\Delta}(a_i+b_i x+c_i y) \\ N_j^e(x, y)=\dfrac{1}{2\Delta}(a_j+b_j x+c_j y) \\ N_m^e(x, y)=\dfrac{1}{2\Delta}(a_m+b_m x+c_m y) \end{cases} \qquad (1.3-9)$$

可见$N_i^e(x, y)$、$N_j^e(x, y)$和$N_m^e(x, y)$与单元的几何尺寸、节点配置及插值多项式有关。换句话说，它们和单元的形状有关，所以称之为形状函数。式（1.3-9）即称为三节点三角元的形状函数。

由于$\phi(x_i, y_i)=\phi_i$，所以可将式（1.3-7）写成

$$\phi_i=N_i^e(x_i, y_i)\phi_i+N_j^e(x_i, y_i)\phi_j+N_m^e(x_i, y_i)\phi_m$$

不难看出

$$N_i^e(x_i, y_i)=1, \quad N_j^e(x_i, y_i)=0, \quad N_m^e(x_i, y_i)=0$$

同理可得

$$N_i^e(x_j, y_j)=0, \quad N_j^e(x_j, y_j)=1, \quad N_m^e(x_j, y_j)=0$$

和

$$N_i^e(x_m, y_m)=0, \quad N_j^e(x_m, y_m)=0, \quad N_m^e(x_m, y_m)=1$$

综合可得形状函数具有性质

$$N_i^e(x_j, y_j)=\delta_{ij} \qquad (1.3-10)$$

δ_{ij}是克罗内克尔符号，当$i=j$时，$\delta_{ij}=1$；当$i\neq j$时，$\delta_{ij}=0$。

将求解的场域剖分成e_0个三角单元，各单元只能以顶点相交，不同的单元相同顶点的电位相等，每个单元顶点的编号顺序必须一致。这样，泛函就可用单元积分的总和来表示，即式（1.3-2）可表示为

$$J(\phi)=\sum_{e=1}^{e_0}\int_{s_e}\frac{1}{2}\varepsilon\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy$$

$$=\sum_{e=1}^{e_0}J_e(\phi) \qquad (1.3-11)$$

式中

$$J_e(\phi)=\int_{s_e}\frac{1}{2}\varepsilon\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy$$

现在将上式中的被积函数用式（1.3-8）代替，由于式中的$[\phi]_e$是待定常数，

而$[N]_e$是坐标x，y的函数，所以有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = \left[\dfrac{\partial N_i^e}{\partial x}, \dfrac{\partial N_j^e}{\partial x}, \dfrac{\partial N_m^e}{\partial x} \right] \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_m \end{bmatrix} = \left[\dfrac{\partial N}{\partial x} \right]_e [\phi]_e \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = \left[\dfrac{\partial N_i^e}{\partial y}, \dfrac{\partial N_j^e}{\partial y}, \dfrac{\partial N_m^e}{\partial y} \right] \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_m \end{bmatrix} = \left[\dfrac{\partial N}{\partial y} \right]_e [\phi]_e \end{cases} \tag{1.3-12}$$

又因

$$\frac{\partial N_i^e}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta} b_i \quad 和 \quad \frac{\partial N_j^e}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta} c_i \qquad (i, j, m) \tag{1.3-13}$$

所以

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta} [b_i, b_j, b_m] \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_m \end{bmatrix} \tag{1.3-14}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta} [c_i, c_j, c_m] \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_m \end{bmatrix}$$

令

$$[\nabla \phi] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix}, \qquad [\nabla \phi]^T = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right]$$

则得

$$[\nabla \phi] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_m \end{bmatrix} = [B]_e [\phi]_e \tag{1.3-15}$$

式中

$$[B]_e = \frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix} b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{bmatrix} \qquad (1.3-16)$$

于是单元上的泛函（1．3－11）可用矩阵表示成

$$J_e(\phi)=\int_{s_e}\frac{1}{2}\varepsilon[\nabla\phi]^T[\nabla\phi]\,dx\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon\int_{s_e}\{[B]_e[\phi]_e\}^T\cdot\{[B]_e[\phi]_e\}\,dx\,dy$$

由于$[\phi]_e$不是坐标的函数，可把它移出积分号，因而

$$J_e(\phi)=\frac{1}{2}\varepsilon[\phi]_e^T\{\int_{s_e}[B]_e^T[B]_e\,dx\,dy\}[\phi]_e$$

$$=\frac{1}{2}[\phi]_e^T[K]_e[\phi]_e \qquad (1.3-17)$$

式中

$$[K]_e=\int_{s_e}\varepsilon[B]_e^T[B]_e\,dx\,dy \qquad (1.3-18)$$

称为单元的系数矩阵。

由于式（1．3－18）中的$[B]_e$不是坐标的函数，所以可把它移到积分号外，于是得到

$$[K]_e=\varepsilon[B]_e^T[B]_e\int_{s_e}dx\,dy$$

$$=\frac{\varepsilon}{4\Delta}\begin{bmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_m & c_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{bmatrix}$$

$$=\frac{\varepsilon}{4\Delta}\begin{bmatrix} b_i^2+c_i^2 & b_i b_j+c_i c_j & b_i b_m+c_i c_m \\ b_j b_i+c_j c_i & b_j^2+c_j^2 & b_j b_m+c_j c_m \\ b_m b_i+c_m c_i & b_m b_j+c_m c_j & b_m^2+c_m^2 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{\varepsilon}{4\Delta}\begin{bmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e & K_{im}^e \\ K_{ji}^e & K_{jj}^e & K_{jm}^e \\ K_{mi}^e & K_{mj}^e & K_{mm}^e \end{bmatrix} \qquad (1.3-19)$$

由式(1。3－19)可以看出，$[K]_e$ 是一个三阶对称方阵，共有9个元素，各元素都由三角元的顶点坐标确定。其一般式为

$$K^e_{rs}=K^e_{sr}=\frac{\varepsilon}{4\Delta}(b_r b_s+c_r c_s),\quad (r,s=i,j,m)$$

从所有线性二次泛函中得出的系数矩阵都是对称矩阵。这样，式(1。3－17)就可以写成

$$\begin{aligned}J_e(\phi)=&\frac{1}{2}[(K_{ii}\phi_i+K_{ij}\phi_j+K_{im}\phi_m)\phi_i\\&+(K_{ji}\phi_i+K_{jj}\phi_j+K_{jm}\phi_m)\phi_j\\&+(K_{mi}\phi_i+K_{mj}\phi_j+K_{mm}\phi_m)\phi_m]\\=&\frac{1}{2}\sum_{r=i,j,m}\sum_{s=i,j,m}K_{rs}\phi_r\phi_s\end{aligned}\tag{1.3-20}$$

式(1。3－20)为一实二次齐次多项式。通常称之为二次型。每个二次型必有一个与之对应的对称矩阵，所以上式中的 $[K]_e$ 也一定是对称矩阵。

若所求解场域剖分成 e_0 个单元，共有 N_0 个节点，则其总的泛函为

$$\begin{aligned}J(\phi)=&\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N_0}\sum_{i=1}^{N_0}K_{ij}\phi_i\phi_j\\=&\frac{1}{2}[\phi]^T[K][\phi]\end{aligned}\tag{1.3-21}$$

式中 $[K]$ 为 N_0 阶方阵，称为总系数矩阵。不难看出，总系数矩阵是一个对称矩阵，具有主对角元素占优的性质，是一个稀疏、带状矩阵。而 $[\phi]$ 是由 N_0 个节点电位组成的列阵。为求 $J(\phi)$ 的极值，必须令 $J(\phi)$ 对每个节点电位的一阶偏导数为零，即

$$\frac{\partial J(\phi)}{\partial\phi_i}=0\qquad(i=1,2,\dots,N_0)\tag{1.3-22}$$

将式(1。3－21)代入上式，可得

$$\sum_{j=1}^{N_0}K_{ij}\phi_j=0\quad(i=1,2,\dots,N_0)\tag{1.3-23}$$

写成矩阵形式为

$$[K][\phi]=[0]\tag{1.3-24}$$

式(1。3－24)即为拉普拉斯方程的有限元方程。求解此方程即可求得场域中各点的电位。

2．平面问题的矩形单元

也可将所求解的平面场域用有限个矩形单元来进行剖分。下面我们来导出矩形单元

特征式的系数矩阵。设单元的局部坐标原点选在矩形的形心处，两个坐标轴取在单元的两个对称轴上，矩形的边长分别为 $2a$ 和 $2b$（图 1．3－2）。

选取单元的场变量模型为

$$\phi(x,y)=\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 y+\alpha_4 xy \tag{1.3-25}$$

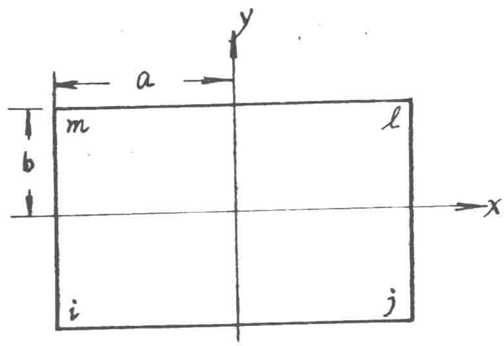

图 1．3－2　平面矩形单元

单元上各角点在局部坐标轴上的位置分别为：$i(-a,-b)$，$j(a,-b)$，$l(a,b)$，$m(-a,b)$。将各角点坐标代入式（1．3－25），可写出各角点的场变量值如下：

$$\left\{\begin{aligned}\phi_i&=\alpha_1+\alpha_2 x_i+\alpha_3 y_i+\alpha_4 x_i y_i\\&=\alpha_1-\alpha_2 a-\alpha_3 b+\alpha_4 ab\\\phi_j&=\alpha_1+\alpha_2 x_j+\alpha_3 y_j+\alpha_4 x_i y_j\\&=\alpha_1+\alpha_2 a-\alpha_3 b-\alpha_4 ab\\\phi_l&=\alpha_1+\alpha_2 x_l+\alpha_3 y_l+\alpha_4 x_l y_l=\alpha_1-\alpha_2 a+\alpha_3 b-\alpha_4 ab\\\phi_m&=\alpha_1+\alpha_2 x_m+\alpha_3 y_m+\alpha_4 x_m y_m=\alpha_1-\alpha_2 a+\alpha_3 b-\alpha_4 ab\end{aligned}\right. \tag{1.3-26}$$

由式（1．3－26）解出 α_1、α_2、α_3 和 α_4 并代入式（1．3－25），得

$$\begin{aligned}\phi(x,y)=\frac{1}{\square}[&(a-x)(b-y)\phi_i+(a+x)(b-y)\phi_j\\&+(a+x)(b+y)\phi_l+(a-x)(b+y)\phi_m]\end{aligned} \tag{1.3-27}$$

式中□为矩形单元的面积。令

$$\left\{\begin{aligned}N_i&=\frac{1}{\square}(a-x)(b-y)\\N_j&=\frac{1}{\square}(a+x)(b-y)\\N_l&=\frac{1}{\square}(a+x)(b+y)\\N_m&=\frac{1}{\square}(a-x)(b+y)\end{aligned}\right. \tag{1.3-28}$$

则式（1．3－27）可以写成

$$\phi=N_i\phi_i+N_j\phi_j+N_l\phi_l+N_m\phi_m$$

写成矩阵形式为