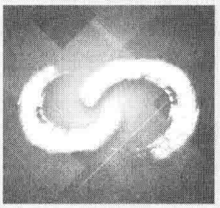
丛书主编：赵焕光

文化数学欣赏丛书－3

梦想相遇无穷

赵焕光　应裕林　章勤琼　著

科学出版社



丛书主编：赵焕光

阜阳师范学院图书馆
藏书

文化数学欣赏丛书 - 3

梦想相遇无穷

赵焕光　应裕林　章勤琼　著

科学出版社
北京

O172-49
05

内 容 简 介

本书以无穷概念为基础，以极限方法为工具，以微分积分为核心，以无穷运算为拓展，介绍最简无穷数学即微积分初步的数学文化内涵及其生活应用. 主要内容包括无穷启蒙、无穷集合、奇妙实数、数列极限、函数极限与连续函数、微分初步、积分初步、微分方程初步、无穷级数、无穷乘积与无穷迭代.

本书可作为高等院校所有专业的本(专)科生、硕士生、中学数学智优生、中学数学教师，具有一定数学基础知识的高校教师及其行政管理人员的数学文化修养提高读本，也可作为数学师范本科、数学教育硕士、重点中学拓展课程的选修课教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

梦想相遇无穷/赵焕光，应裕林，章勤琼著. —北京：科学出版社，2014.3
(文化数学欣赏丛书)
ISBN 978-7-03-039942-7

Ⅰ. ①梦… Ⅱ. ①赵… ②应… ③章… Ⅲ. ① 微积分-青年读物
Ⅳ. ① 0172-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014) 第 040376 号

责任编辑：王丽平／责任校对：张怡君
责任印制：赵德静／封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京通州皇家印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2014 年 3 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2014 年 3 月第一次印刷 印张：18 1/2
字数：370 000

定价：59.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

本书获得浙江省温州人经济研究中心、
温州大学社科联资助

序

A golden bridge between the finite and the infinite: Mathematics

Lizhen Ji, University of Michigan
December 31, 2013

1 The infinite

Ever since the beginning of the civilization, people have been thinking about and exploring the meaning of the infinite. In their finite life time and limited space and ability, they have often met difficult situations and have to turn to the infinite, or the God (or Gods), for many purposes.

Philosophers have also been thinking deeply, trying to understand and explain the infinite. But what is the infinite exactly? More precise questions on infinite phenomena were raised by the Greek philosophers and mathematicians thousands of years ago. They knew how to add and divide finite numbers. But how to understand infinite processes and handle infinite numbers?

A precise and systematical theory of infinite was a recent creation by a single mathematician, Cantor. In comparison with finite objects, people used to think that there is a single infinite set or quantity, which was isolated from the rest and had not much structure. But Cantor said that there are infinite sets of different sizes, and the world of infinite sets is complex and even richer than the world of finite sets, and it has a direct bearing on the latter.

The theory of Cantor, or rather his perspective, had forever changed the landscape of mathematics, starting from the foundation of mathematics to the forefront of the contemporary mathematics. In order to understand and enjoy mathematics: Its subtlety and beauty, it is necessary to meet and become familiar with the infinite.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

The book "A dreamy encounter with the infinite" by Zhao, Ying and Zhang gives a basic introduction to the theory of infinite from a mathematical, historical and philosophical point of view. It contains real mathematics, yet it is interesting and accessible to high school and college students. I wish that I could read this book when I was studying calculus in the first year of university many decades ago.

2 Limit and continuity

How to apply the infinite perspective and quantities to finite functions and spaces? There are *infintely small and infinitely large* quantities and spaces, and the interaction between them is like an eternal tango which has stimulated the never ending flow of the mathematics river. One of the best example is probably the dual theory of differentiation and integration, related by the fundmental theorem of Calculus.

In both theories, the notions of limit and continuity are crucial. How close is close enough? How big is big enough? The former requires something which is as small as desired, and the latter something as big as desired. In both cases, it is an infinite process.

Before defining these concepts, the spaces where functions live must and can support these infinite operations. The set of rational numbers is not sufficiently complete for these purposes, and irrational numbers need to be added in by an infinite process in spaces between rational numbers to form a set without hole or break, the continuous set of real numbers (or the continuous line $\mathbb{R}$ of real numbers). The book starts with the basic set theory, and the Dedekind cut construction of real numbers.

3 Completion

The completion of the set $\mathbb{Q}$ of rational numbers to the set $\mathbb{R}$ of real number is probably the first completion of $\mathbb{Q}$. There are several, or rather infinitely many, related completions and compactifications. Every student knows that the partial sums of the infinite sequence $1+2+2^2+2^3+\cdots$ form a sequence of rational numbers which diverges to the infinite of the real line $\mathbb{R}$, i.e.,

$$1+2+2^2+2^3+\cdots=+\infty.$$

But if we apply the famous formula,

$$x^0+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x},$$

without remembering the condition $|x| < 1$, the answer should be

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots = \frac{1}{1-2} = -1.$$

We have obtained a finite value -1 out of the infinite. But how can the sum of positive numbers be negative? It sounds impossible. Yet, it can be true and desirable to do so if we complete the field $\mathbb{Q}$ of rational numbers in a different way. We can declare that when n is really large, 2^n is really small. Such a measurement is true in the field of 2-adic numbers $\mathbb{Q}_2$, a special case of the field of p-adic numbers $\mathbb{Q}_p$, where p is a prime number.

One basic point of modern mathematics, or number theory, is that the embedding $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ is only one of the infinitely many completions of $\mathbb{R}$, one for each prime number p and the infinite ∞.

We need the infinite perspective to deal with finite rational numbers. The above example also shows that relations between *the infinitely small* and *infinitely large* can be more interesting than expected.

The heart of analysis consists of derivtives and integrals. We all know that Newton and Leibniz co-discovered calculus. What was the difference between their works? And what was known before them, who else made essential contributions? What happenned after their work?

This book gives a careful and lively discussion to answer these questions. Which calculus student does not want to learn the full story?

The introduction of integrals of continuous functions can be viwed as the beginning of another type of completion, which are infinite processes built on the earlier infinite process.

Given a finite interval, say $[0; 1]$, the space of continuous functions on $[0; 1]$ with a distance defined using the integral is not complete as in the case of the field $\mathbb{Q}$ of rational numbers. To understand this space better, we need to complete it by adding some ideal functions. This infinite process leads us out of this topic of this book (or out of functions considered) and into a much bigger world of functional analysis, one of the expertise of the first author of this book, Prof. Zhao.

As in the case of completions of $\mathbb{Q}$ into $\mathbb{R}$ and $\mathbb{Q}_p$, there are also infinitely many completions of this function spaces (Banach spaces and Hilbert spaces), which are filled in by measurable functions. These concepts are not important at this moment for the reader who does not known them yet. The essential point is that we need the infinite process to understand finite things.

4 Compactification and degeneration

There is another related interaction between finite and infinite objects. The real line $\mathbb{R}$ is infinite. If one walks on it in either direction, one can never reaches a point. But if we add one point at infinity, two directions at infinity of $\mathbb{R}$ wrap up, and we have obtained a circle. The crucial point here is to add an ideal point at infinity. The essential point of the Dedekind cut is to add ideal points between rational numbers.

The theory of compactification and the idea of going to infinity is used extensively in the contemporary mathematics. It is also related to considering degeneration of mathematical objects, for example, manifolds. This approach has been used to prove important results from the famous Mostow strong rigidity to the proof of the famous Poincare conjecture in the three dimensional topology by Perelman.

This book often merges philosophical discussions with mathematical results. This idea of taking a bigger perspective, viewing things from the infinity, is also useful in life. It filters out unimportant things and shows people what is really important in life, which is also how it is often used in mathematical proofs.

5 Conclusion

This book is a labor of love. The authors have tried to convey their enthusiasm towards mathematics and its broad connection with humanities, for example, the ancient Chinese literature, and the Chinese and Western philosophy. The book gives well-rounded descriptions of basic results and examples in mathematics related to the notions of the infinity, limit and calculus. It also covers both the continuous and discrete mathematical worlds. This book can be a good supplementary book besides the standard textbooks on calculus since many comments and historical facts will enlarge the reader's horizon. It can also serve as a bridge to the more advanced topics in mathematics as the above brief discussion shows.

Another feature of this book is that contains many quotes from famous mathematicians from the last few centuries. By reading this book, the reader can explore an essential concept and its ramifications together with the many great minds in the history of mankind.

This book is only one of the many books by Prof. Zhao and his co-authors to present a comprehensive picture of mathematics in a friendly and fun way. These books will contribute to a better understanding of mathematics for the people who are willing to pick them up and read or browse them. Their efforts and courage to carry out such a large project will be admired and appreciated by the educated public, mathematics students and mathematicians.

序译文

数学：连接有限与无限的金桥

季理真

(密歇根大学, 美国, 密歇根, 48109)

1. 无穷

自人类文明开始以来, 人们就已经开始思考并探索无穷的意义. 在有限的生命内, 由于空间与能力的限制, 人们经常会遇到不易解决的难题, 出于各种原因, 他们只能将问题转向无穷的上帝或众神.

哲学家们通常也会深入思考这一问题, 试着去理解并解释无穷. 但究竟什么是无穷？数千年以前, 古希腊哲学家已经提出更精确的问题, 他们知道如何对有限数字进行加与除. 但如何理解无穷过程并处理无限数字呢？

关于无穷的严格的系统理论是晚近才由奇特的数学家康托尔创造出来的. 与有限对象相比, 人们过去会认为存在一个单独的无穷集合或无穷量, 独立于所有其余的集合或量, 本身并没有什么结构. 但康托尔说存在不同形式的无穷集合, 而无穷集合的世界非常复杂, 甚至比有限集的世界还要丰富, 而且直接对其产生影响.

康托尔的理论, 或者说他的观点, 已经永远改变了数学的全部景观, 从数学的基础直至当代数学的最前沿. 因此, 为了理解并欣赏数学的精妙与美丽, 有必要接触并熟悉无穷.

温州大学赵焕光教授、应裕林副教授、章勤琼博士合著的《梦想相遇无穷》, 从数学、历史以及哲学的观点对无穷理论作了初步介绍. 这是一本真正讨论数学的文化著作, 全书不失趣味性与可读性, 而且适合高中与大学学生阅读. 我多么希望数十年前我在大学一年级开始学习微积分时, 能有机会阅读这样的书.

2. 极限与连续

如何将无穷的观点与数量应用到有限的函数与空间中？我们知道有无穷小与

无穷大的数量与空间, 而它们之间的相互作用就像一支永不停歇的探戈, 刺激着数学长河川流不息的发展. 其中一个最好的例子可能是微分与积分的对偶理论, 以及将两者联系起来的微积分基本定理.

在这两个理论中, 极限与连续的概念都非常关键. 如何接近才是足够接近? 多大才是足够大? 前者需要期望有多小就有多小, 而后者则是需要期望有多大就有多大. 这两种情形都是无限的过程.

在定义这些概念之前, 函数存在的空间必须能支持这些无限运算. 在有理数集内, 对达成上述目的并不完备, 需要在有理数之间通过一个无限的过程将无理数添加进去构成一个没有空洞或缺口的实数连续统集. 这本著作正是从基本的集合论与实数构造的戴德金分割开始的.

3. 完备性

从有理数集到实数集的完备可能是最早的完备化. 除此之外, 还有许多种, 甚至可以说有无穷多种相关的完备化和紧致化方式. 每个学生都知道无限级数

$$1+2+2^2+2^3+\cdots$$

的部分和形成一个发散于实数轴上无穷的有理数列, 即

$$1+2+2^2+2^3+\cdots=+\infty.$$

但若我们应用著名的公式

$$x^0+x^1+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x},$$

并且无视条件 $|x|<1$, 那答案将是

$$1+2+2^2+2^3+\cdots=\frac{1}{1-2}=-1.$$

这样, 我们就从无限的运算中得到了有限数 -1. 但是正数的和怎么能是负数呢? 这似乎是不可能的. 然而, 如果我们用不同的方式对有理数域进行完备化, 这样是可以正确而且可取的. 我们可以声明, 当 n 充分大时, 2^n 是充分小的. 这样一个度量在 2 进制数域 Q_2 中是成立的, Q_2 是 p 进制数域 Q_p 的一个特殊情况, 其中 p 是一个素数.

现代数学或数论的一个基本观点是从 Q 到 R 的嵌入的方式, 仅仅是无穷多种完备化中的一种. 在这些完备化中, 每一种都对应一个素数 p 或无穷 ∞.

我们需要用无穷的观点来处理有限的有理数. 上面的示例还显示出无穷大和无穷小之间的关系可以比人们预期的更有趣.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

分析的核心由微分与积分组成. 我们都知道, 牛顿和莱布尼茨共同发明了微积分. 他们之间工作的区别是什么? 在他们之前, 还有谁做出了重要贡献? 在他们的工作之后又发生了什么? 这本著作提供了细致且生动的论述来回答这些问题. 有哪个学习微积分的学生会不想知道这其中完整的故事呢?

连续函数积分的引入可以看作是另一种形式的完备化的开始, 它是一个建立在先前的无限过程之上的无限过程. 比如说, 给定一个有限区间 [0,1], 我们用积分定义一个在 [0,1] 上的连续函数的距离, 它像有理数域的情况一样不完备. 为了更好地理解这个空间, 我们需要通过添加一些理想的函数来使之完备化. 这个无穷过程将引导我们离开本书的话题 (或者说离开我们所考虑的函数) 并进入一个更广阔的泛函分析世界, 而这正是本书第一作者赵教授的专长之一.

就像将 Q 完备化为 R 和 Q_p 的情形一样, 若往其中添加可测函数, 关于这类函数空间 (巴拿赫空间和希尔伯特空间) 也有无限多种完备化方法. 这些概念对于目前还不了解它们的读者而言并不十分重要, 然而重要的一点是, 我们需要以无限的过程去理解有限的事情.

4. 紧致与退化

在有限与无限的对象之间还有另一个有关联的交互. 实直线 R 是无限的, 如果有人沿着实直线的任一方向行走, 他永远都到达不了某一个点. 但如果我们在无限中添加一个点, 将 R 无穷的两个方向包起来, 我们就得到了一个圆. 这里的关键之处是在无限中添加了一个理想的点. 戴德金分割的核心之处就是在有理数之间添加理想点.

紧致化的理论以及走向无限的想法在当代数学中被广泛地运用. 有关数学对象退化的探讨同样与之相关, 比如流形. 佩雷尔曼 (G. Perelman, 1966~, 俄罗斯数学家, 2006 年第 25 届数学家大会欲为他颁发菲尔兹奖, 但他拒绝领取) 在三维拓扑学中著名的庞加莱猜想和莫斯托 (G. D. Mostow, 1923~, 美国数学家, 获 2013 年沃尔夫奖) 强刚性重要结论的证明中都运用了这种方法.

该书常将哲学层面的讨论融入到数学结论中. 这种利用更广阔的视角从无穷的视野来看待事物的观点, 在生活中也非常有用. 它能够帮助人们过滤掉无关紧要的事物而突显出什么才是人生中真正重要的, 这一方法也常常被人们用到数学证明中.

5. 小结

这一著作是源于对数学的爱的劳动成果. 作者试图向读者传递他们对数学的热情以及数学与人文, 诸如中国古代文献以及中西方哲学的关联. 本书对与无穷、极

限以及微积分相关的数学结论与例子给出了全面的描述. 她同样涵盖了连续与离散数学的世界. 本书可以作为微积分标准教材之外良好的补充读物, 因为书中诸多的评论与历史事实可以拓宽读者的视野. 从上面的论述可以看出, 本书还能作为了解数学中更高深主题的桥梁.

本书的另一特点是其中引用了近几个世纪以来著名数学家的许多名言. 通过阅读本书, 读者可以与人类历史上的伟大心灵一起, 探索数学核心概念以及它们的分支.

本书仅是赵焕光教授与他的合作者们系列著作中的一本, 这一系列著作试图以一种友好与轻松的方式展现数学的综合面貌. 如果人们愿意挑选这一系列著作阅读或浏览, 将会有助于他们对数学有更好的理解. 作者们承担如此宏大工程所付出的努力及其勇气, 必将受到数学爱好者、数学学生和数学研究工作者的钦佩与赞赏.

附: 季理真教授简介

季理真, 1964 年出生于浙江温州, 1985 年赴美攻读硕士学位. 他于 1991 年在美获得博士学位 (博士导师为 Mark Goresky 与丘成桐) 后, 曾在麻省理工学院、普林斯顿高等研究院从事研究工作, 目前为美国密歇根大学教授, 研究领域主要是几何、拓扑及数论这些主流数学的交叉学科. 在其学术生涯中, 获荣誉无数, 代表性的有 Sloan 研究奖, Simons Fellowship, 美国自然科学基金会数学科学博士后奖和晨兴数学银质奖等, 其中晨兴数学奖为华人数学家大会的最高奖, 被誉为“华人菲尔兹奖”.

前　言

国家有强国富民的梦想, 人民有人生幸福的梦想. 每个人在不同的人生阶段都有不同的人生梦想, 这是不需争议的事实. 旧约圣经中有一句箴言: “没有愿景, 便会灭亡.” 人生没有梦想, 生命的航船就会迷失方向, 个人的正能量就不能很好地释放. 古希腊哲人苏格拉底 (Socrates, 公元前 469~ 前 399) 说过, 不经过察省的人生是不值得过的. 其实, 没有梦想的人生也是不值得过的. 法国思想家帕斯卡 (Blaise Pascal , 1623~1662) 曾说过: “人的全部尊严在于思想, 思想造就人的伟大.” 与其说是思想, 还不如说是梦想造就人的伟大. 梦想让人类的生活变得如此丰富多彩. 每一项伟大的发明、每一个人类进化和发展史上的里程碑、每一件伟业都是靠人类的双手创造出来的, 而这一切真正的功臣是源自人类内心的梦想. 进一步, 每个伟人的成就都是远大梦想的最终产品.

人们常说, 人的欲望是无穷的. 有生命体征的人必然有欲望, 灵魂干净的欲望往往能成为一股无形的力量, 引领人们不断提升自己、不断追求进步; 贪得无厌的欲望却有可能引诱人们走上犯罪道路, 成为走上邪恶道路的动力. 唯有正能量的欲望, 才能发展为美丽的梦想. 古印度的圣贤们认为:

有了微观世界, 也就有了宏观世界.
有了原子, 也就有了宇宙的诞生.
有了人的肉身, 也就有了宇宙之身.
有了人的思想, 也就有了宇宙思想.

实际上, 把这里的思想换作梦想, 把宇宙换作国家也很贴切. 国家是由每个活生生的、呼吸着的、思考着的个体 (公民) 组成的, 每个公民都有自己的梦想, 国家才会有梦想. 国家具有美丽的梦想, 才能够更好地生存和发展.

梦想通常不现实, 也不合逻辑, 这很正常. 伟大的英国剧作家萧伯纳 (George Bernard Shaw, 1856~1950) 说过: “理性的人适应这个世界, 非理性的人固执地想让世界适应自己, 因此所有进步都取决于非理性的人.” 事实上, 非理性的人总是顽强地用自己的生命能量书写自己的梦想赞歌. 当然, 并非所有的梦都能圆, 然而只要坚持不懈, 装上梦想的翅膀总能飞向远方. 印度教的圣经《吠陀》中有这样一句话: “每一粒种子都能够长成一片森林.” 的确, 一粒种子能够长成一千棵树木, 一千棵树木又可以长出另外的一千棵树木, 如此循环往复, 便是上百万棵树木, 一大

片森林便得以形成, 而这一切只源自一粒小小的种子. 这就是梦想的巨大力量.

"无穷", 是哲学、数学与科学共同探究的课题."相识无穷", 是哲学家、数学家与科学家们的长期梦想. 无穷既是人类最伟大的朋友, 又是人类心灵宁静的最大敌人. 实际上, 从古希腊开始的两千多年以来, 无穷一直在刺激人们的无限想象力, 无穷又像优雅的风笛诱惑一大批乐于探索的 "老鼠" 跳进无穷的黑洞中. 德国数学家希尔伯特 (David Hilbert, 1862~1943) 曾经说: "自远古以来, 无穷问题就比任何其他问题更加激动人的情感. 几乎没有任何其他概念如此有效地刺激着心智. 然而, 也没有任何其他概念比无穷更需要阐明." 在数学王国中不知有多少才华卓越的数学家不断燃烧自己的生命, 努力为数学无穷大厦添砖加瓦. 德国数学家康托尔 (Georg Cantor,1845~1918) 大胆探索无穷王国的秘密, 创建集合论为数学大厦奠基, 作出了令人敬仰不止的卓越贡献.

英国大科学家牛顿 (Newton, 1643~1727) 与德国大学者莱布尼茨 (Leibniz, 1646~1716) 从前人纷繁的成果中清理并提炼出精粹的思想方法, 各自独立创建微积分理论, 极大地推动数学与近代科学得到长足发展, 充分展示了无穷数学的巨大魅力. 毫不夸张地说, 没有牛顿与莱布尼茨的卓越贡献, 恐怕人造卫星至今还上不了天, 人们想到月球上行走的梦想恐怕只能永远是梦想. 时至今日, 微积分的优美思想仍然在分析学科及其应用科学进一步发展中起主导作用. 恩格斯曾高度评价这一人类智慧的结晶: "在一切理论成就中, 未必再有什么像 17 世纪下半叶微积分的发明那样被看作人类精神的最高胜利."

法国数学家柯西 (Cauchy, 1789~1857)、德国数学家魏尔斯特拉斯 (Weierstrass, 1815~1897) 等创建并不断完善的极限概念, 为捕捉无穷精灵找到卓有成效的工具, 给微积分打下坚实可靠的基础. 应用数学之王、瑞士数学家欧拉 (Leonhard Euler, 1707~1783)、高耸欧州科学金字塔尖上的法国数学家拉格朗日 (Lagrange, 1736~1813) 等, 也一直在无穷乐园里忙碌地耕耘着并且取得丰硕成果. 为无穷数学作出贡献的数学家名单还可列出很长很长 ······

本书以无穷概念为基础, 以极限方法为工具, 以微分积分为核心, 以无穷运算为拓展, 介绍最简无穷数学即微积分初步的数学文化内涵及其生活应用. 全书分 4 章. 第 1 章为探索无穷, 主要内容包括无穷启蒙、无穷集合及奇妙实数; 第 2 章为捕捉无穷, 主要内容包括数列极限、函数极限与连续函数; 第 3 章为魅力无穷, 主要内容包括微分 (屠龙宝刀)、积分 (积微成著) 及微分方程初步 (窥视世界); 第 4 章为乐在无穷, 主要内容包括无穷级数、无穷乘积与无穷迭代.

写作本书的主要目的是为以下几类人员提供一本能激发学习微积分兴趣的微积分文化阅读材料:

(1) 想学好微积分但是学得不够好, 特别是那些想尽早找到学习微积分窍门的文科学生以及高中数学智优生;

(2) 正在学习微积分, 希望进行深入思考、理解微积分本质的理工科学生 (包括数学专业的学生);

(3) 学习过微积分, 现在已经进入社会、参加工作的那些人, 特别是那些已经意识到在工作中不一定用具体的微积分知识但微积分的思想方法却随时影响到他们的工作质量的那些人;

(4) 至今还没有厌倦微积分, 特别是想把微积分作为拓展心智历练, 不断提升自身文化修养的那些人;

(5) 教授微积分及其相关学科的大、中学数学教师.

本书写作的思路与框架由我与应裕林副教授、章勤琼博士共同讨论形成, 初稿由我提供, 应裕林与章勤琼参与修改及其定稿工作. 本书在写作过程中参阅了大量文献, 为此向被本书引用的参考文献作者表示特别的感射. 本书在修改过程中得到温州大学数学学院诸多同仁的帮助; 吾妻钱亦青在书稿打印及文献查阅中付出巨大的努力; 本书得到浙江省重点学科 “应用数学”、浙江省省级教学团队 “数学课程与教学论团队”、浙江温州人经济研究中心、温州大学社科联、温州大学重点学科 “数学”、温州大学优势专业 “数学与应用数学”、温州大学重点教材建设等项目资助, 在此一并表示感谢!

赵焕光

2013 年 10 月

目 录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com