俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

An Introduction to Complex Analysis

复变函数引论

[俄] 普里瓦洛夫 著　闵嗣鹤 等译

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

俄罗斯数学精品译丛

"十二五"国家重点图书

复变函数引论

An Introduction to Complex Analysis

[俄] 普里瓦洛夫 著

闵嗣鹤 等译

哈尔滨工业大学出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书以莫斯科学派的逻辑方法组织复变函数内容，从基础知识到理论延拓，共分十三章，分别为：复数、复变数与复变函数、线性变换与其他的简单变换、柯西定理·柯西积分、解析函数项级数·解析函数的幂级数展开式、单值函数的孤立奇异点、残数理论、毕卡定理、无穷乘积与它对解析函数的应用、解析开拓、椭圆函数理论初步、保角映射理论的一般原则以及单叶函数的一般性质。基础知识讲解细致、全面，很好地构建了复变函数基础框架，拓展理论清晰、广泛，为复变函数的进一步学习和物理应用埋下了伏笔。

本书可作为数学专业学生、教师的教学参考书，也可为物理、工程专业的学生及科研人员提供理论参考。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数引论/(俄罗斯)普里瓦洛夫著；闵嗣鹤等译.
—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2013.9
ISBN 978-7-5603-4238-2

Ⅰ.①复…　Ⅱ.①普…②闵…　Ⅲ.①复变函数
Ⅳ.①O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 209889 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　李长波
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 26　字数 477 千字
版　　次　2013 年 9 月第 1 版　2013 年 9 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-4238-2
定　　价　68.00 元

◎ 目录

引　论

在数学中必须考虑的运算可以分为两类：正的运算与逆的运算．例如，对应于加法运算的逆运算是减法，对应于乘法的是除法，对应于正整数次乘方的就是开方．

对两个任意的正整数施行加法运算，结果我们总还是得到正整数；换句话说，从自然数系出发，通过正运算加法，我们不会超出这个系的范围．但逆运算 —— 减法就把我们引出了自然数系的范围之外，并且只有在把零与负整数合并到自然数系之后，这个逆运算的施行才成为永远可能．第二个逆运算 —— 除法，为了它自己的能够施行，就要求一个更广泛的数的概念，这个更广泛的概念是借助于分数的引进才完成的．全部整数与分数合称为有理数，这个有理数系，对于加法、减法、乘法与除法等前面四个代数基本运算来说，是封闭的，也就是说，对任意两个有理数（除了用零除以外）施行这些运算中的任何一个时，结果得到的将依旧是这个系中的元素 —— 有理数．最后，逆运算 —— 开方 —— 甚至在最简单的二次根的情形，就一方面给我们以非有理实数的例子，即所谓无理数，而另一方面给我们以 $y\sqrt{-1}$ 形式的数，其中 y 表示实数．$y\sqrt{-1}$ 形式的数，其中 y 是任意一个不等于零的实数，称为纯虚数．

从以上所提到的这些例子就已经可以看出，逆运算使我们感到数的概念有逐渐扩充的必要. 假如我们现在来看比开平方根还更复杂一些的逆运算——解 $ax^2+bx+c=0$ 形式的二次方程，其中 a,b 与 c 都是实数，那么我们就会看到，它的根将是 $x+y\sqrt{-1}$ 形式的数，其中 x 与 y 都表示实数. 这样的数称为复数. 当 $y=0$ 时复数退化成实数，而当 $x=0, y\neq 0$ 时它就成为纯虚数. 复数的全体，包含了全部实数，是一个对于所有的数学运算来说都封闭的数域. 例如，在代数学中大家都知道，任一个复系数的 n 次方程的根就全都是复数. 在复数域中能够施行所有的数学运算而使运算结果不至于超出这个数域的范围，这一点，在极大程度上说明了这种数在数学中所具有的巨大的意义.

在本书中我们将研究复变数 $z=x+y\sqrt{-1}$ 的函数的性质，其中 x 与 y 都是独立实变数. 复变函数有它自己的很多应用，一方面是在各种实用数学科目上，如理论物理、流体动力学、弹性理论、天体力学等，另一方面也在纯粹数学的各个部门上，如代数、解析数论、微分方程等. 除此之外，复变函数理论是一种异常谐和一致而且具有完整的逻辑系统的理论建筑，通晓这个理论中的一些基本问题，无疑地，必须是数学教育的内容之一.

为了指出复变函数的方法的力量，我现在只来提起在纯粹数学范围内借助于这种方法而做成的某些巨大成果：素数分布方面的最困难的问题就建立在与某一个复变函数的零点的分布的关系上；关于任意一个正整数表为有限个数的任意次方之和的华林问题也是在复变函数的方法的基础上解决的；天体力学方面最困难的问题，所谓“三体”问题，其一般形式也还是由于吸取了复变分析的方法而解决的. 最后我们还可以从读者所熟知的一些基本数学部门中举出许多例子来说明复变函数所具有的巨大意义与它的特殊作用.

以下仅限于少数几个例子的叙述. 例如关于每一个代数方程至少有一个复数根的命题是代数学的基本定理. 其次，复数在有理函数的积分与常系数线性微分方程求解的问题中所具有的意义，在积分学中，也是众所熟知的. 我们还必须指出，许多古典分析的问题，只是由于复变分析的出现才得到了明确的形式并找到了完全的解答. 例如，大家所知道的欧拉恒等式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ 就曾经用来揭破如下所述的贝努利与莱布尼兹的诡论：

由于

$$\arctan x=\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$$

我们把分式 $\frac{1}{1+x^2}$ 分解为部分分式[①]

① 以后我们总用记号 i 表示 $\sqrt{-1}$.

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{x-\mathrm{i}}-\frac{1}{x+\mathrm{i}}\right)$$

积分后，就求出

$$\arctan x=\frac{1}{2\mathrm{i}}\ln\frac{\mathrm{i}-x}{\mathrm{i}+x}$$

令 $x=1$，我们得到

$$\arctan 1=\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\ln\frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}+1}=\frac{1}{4\mathrm{i}}\ln\left(\frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}+1}\right)^2=\frac{1}{4\mathrm{i}}\ln(-1)=$$
$$\frac{1}{8\mathrm{i}}\ln(-1)^2=\frac{1}{8\mathrm{i}}\ln 1=0$$

这就是说$\frac{\pi}{4}=0$.

欧拉指出了指数函数 e^z 的周期性之后就揭破了这个诡论. 事实上，用 $-\mathrm{i}z$ 来代替欧拉恒等式中的 x，我们得到

$$\mathrm{e}^z=\cos(-\mathrm{i}z)+\mathrm{i}\sin(-\mathrm{i}z)=\cos\mathrm{i}z-\mathrm{i}\sin\mathrm{i}z \tag{1}$$

在这个等式中用 $z+2\pi\mathrm{i}$ 代替 z，我们就有

$$\mathrm{e}^{z+2\pi\mathrm{i}}=\cos(\mathrm{i}z-2\pi)-\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}z-2\pi)=\cos\mathrm{i}z-\mathrm{i}\sin\mathrm{i}z=\mathrm{e}^z$$ ①

也就是说，当我们用 $z+2\pi\mathrm{i}$ 代替 z 时，函数 e^z 不改变它的数值，换句话说，$2\pi\mathrm{i}$ 是这个函数的周期. 因此，从等式 $\mathrm{e}^z=w$ 所确定的自然对数 $z=\ln w$，对应于一个确定的 w 的值，由于 e^z 的周期性，就有无穷多个不同的数值，其中每两个值彼此相差一个 $2\pi\mathrm{i}$ 的倍数. 当 $w>0$ 时，$z=\ln w$ 有一个数值是实数，所有其他的数值全是虚数. $w<0$ 时，则 $z=\ln w$ 的数值无例外地全是虚数. 所以，对数函数是多值的，假如我们取 $\ln 1=2\pi\mathrm{i}$，诡论就无从立足了.

欧拉恒等式揭露出三角函数与指数函数之间的关系，另外，如果在公式(1)中用 $-z$ 代替 z，我们有

$$\mathrm{e}^{-z}=\cos\mathrm{i}z+\mathrm{i}\sin\mathrm{i}z \tag{2}$$

对恒等式(1)与(2)施用加法与减法，我们就得到

$$\mathrm{ch}\, z=\frac{\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z}}{2}=\cos\mathrm{i}z,\quad \mathrm{sh}\, z=\frac{\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{-z}}{2}=-\mathrm{i}\sin\mathrm{i}z$$

这些公式给出了双曲线正弦函数与双曲线余弦函数通过三角函数的表达式，而这样一来，从普通三角函数的公式出发就可以得到全部的双曲线三角函数的公式.

我们还要从幂级数的理论中来指出一个事实，它的完满的解释只有从复变函数的观点才能给出来. 在分析中大家都知道，展开式

---

① 这里我们利用了复变数的正弦函数与余弦函数的周期性. 这将在第二章，§4 第 7 段中证明.

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots$$

只有当x的值满足不等式$|x|<1$时才成立.如果限制在实变数x的范围,我们就没有可能去发现原来函数的性质以及它的级数只有在x的值适合条件$-1<x<+1$时才收敛这一事实之间的关系.因为事实上,函数$\frac{1}{1+x^2}$对于从$-\infty$到$+\infty$的区间内的任何x的值都是确定的,而且自变数的值-1与$+1$对于它又并非是什么特别的数值.因此我们不能了解为什么级数$1-x^2+x^4-x^6+\cdots$当x的值满足不等式$x\leqslant-1$与$x\geqslant+1$时就不再收敛.然而,如果在复数域中来考虑这个现象,它的背景就完全可以弄清楚了.实际上,分式$\frac{1}{1+x^2}$的分母当$x=\pm\mathrm{i}$时为零,从而自变数的这两个值对于我们的函数来说是它的奇异值.当我们把复数$\alpha=a+b\mathrm{i}$表示为以a与b为坐标的平面上的点,则由于上面指出的两个奇异点与坐标原点的距离等于1,我们可以断定:给定的函数在以坐标原点为中心,以1为半径的圆的内部没有奇异点,而在它的圆周上却有奇异点.这种情况,我们将在正文中加以证明,就决定了给定的级数当x的值的模大于1时的发散性.

最后关于本教程的计划有几句话.在头几章里我们将研究一些在实数分析中已知的基本概念与运算在复数域中的推广,例如极限、导数、积分等;这样一来,类似于实数域中的情形,我们将建立一系列研究复变函数的分析工具.在这个基础有了之后,我们才来研究所谓解析函数的一类可导的复变函数的基本性质,也就是说,我们来阐明这类函数的理论的最重要部分.

第一章 复数

§1 复数及其运算

1. 复数概念

具有一定顺序的一对实数 a 与 b 称为一个复数 α：$\alpha=(a,b)$. 假如 $b=0$，我们可以把这相应的一对简记作 a，就是说规定 $(a,0)=a$. 所以，全部实数是全部复数的一部分. 在作为一对实数引进了复数的概念之后，我们来确定这些数的基本运算法则.

因为全部实数是全部复数的一部分，所以，当建立复数的基本算术运算时，我们必须要求，对于实数应用这些运算所得到的数，跟在实数的算术中所得到的数相同. 另一方面，如果我们希望在分析的问题中使得复数有广泛的应用，我们还应当要求所引进的基本运算，能够适合实数算术中的一般公理.

2. 复数的加法与乘法

我们用下面的等式来确定复数 $\alpha=(a,b)$ 与 $\beta=(c,d)$ 的加法

$$\alpha+\beta=(a+c,b+d) \tag{I}$$

应用这个定义到两个实数 a 与 c 上，我们得到

$$(a,0)+(c,0)=(a+c,0)=a+c$$

这表示对于加法来说，满足了我们引进运算法则时的第一个要求.

我们用下面的等式来定义两个复数 α 与 β 的乘法

$$\alpha\beta=(ac-bd,ad+bc) \tag{Ⅱ}$$

应用这个定义到两个实数 a 与 c 上，便成为

$$(a,0)(c,0)=(ac,0)=ac$$

这表示乘法运算与实数的算术运算没有矛盾. 由定义(Ⅰ)与(Ⅱ)，容易验明复数的加法运算与乘法运算遵循大家所知道的算术的五个法则：

(1) 加法交换律

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha$$

(2) 乘法交换律

$$\alpha\beta=\beta\alpha$$

(3) 加法结合律

$$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$$

(4) 乘法结合律

$$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$$

(5) 乘法对于加法的分配律

$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$$

我们建议读者自己去检验所有这些法则在复数域中的正确性.

数对(0,1)所代表的我们用字母 i 来表示的数，在复数的运算中起着特殊的作用. 作这个实数对的平方，也就是它的自乘，我们从定义(Ⅱ)得到

$$(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$$

即 $\mathrm{i}^2=-1$，这就是我们起初采用记号 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 的理由. 注意到这一点，我们就可以把所有的复数写成

$$\alpha=(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)(0,1)=a+b\mathrm{i}$$

就是说任何复数 $\alpha=(a,b)$ 都可以表示成实数 a 与纯虚数 $b\mathrm{i}$ 之和的形式.

习惯上称 a 为复数 α 的实数部分，并且记作 $R(\alpha)$(来自法文字 reelle)，称 b 为 α 的虚数部分的系数，并记作 $I(\alpha)$(来自法文字 imaginaire). 显然，当 $I(\alpha)=0$ 时，复数 α 变成实数，当 $R(\alpha)=0$ 时，α 就变成纯虚数. 按照定义，两个复数称为相等，是指它们的实数部分彼此相等同时虚数部分也彼此相等.

实数部分相同而虚数部分的符号相反的两个复数称为是共轭的，记作

$$\alpha=a+b\mathrm{i},\quad \bar{\alpha}=a-b\mathrm{i}$$

作为等式(Ⅱ)的特殊情形，我们指出两个共轭复数的乘法定则

$$\alpha\bar{\alpha}=a^2+b^2$$

在算术中任何数与它相加结果都不变的数称为加法的模，这个数就是 0. 同样，数 1 是乘法的模，任何数与它相乘结果都不变. 我们要指出，在复数域中，也存在着一个加法的模(数 0) 与一个乘法的模(数 1).

实际上，设 δ 是加法的模，那就是说

$$\alpha+\delta=\alpha \tag{1}$$

其中 α 是任意一个复数. 我们要证明这样的数 δ 是存在的而且是唯一的. 在等式(1) 的两边加上一个数 $-\alpha=\alpha\cdot(-1)$，我们就得到 $\delta=0$.

又令 ε 是乘法的模，就是说

$$\alpha\cdot\varepsilon=\alpha \tag{2}$$

其中 $\alpha\neq 0$. 在等式(2) 两边乘以一个数 $\beta=\frac{\bar{\alpha}}{a^2+b^2}$，我们就得到

$$\frac{1}{a^2+b^2}\cdot\alpha\bar{\alpha}\cdot\varepsilon=\frac{1}{a^2+b^2}\cdot\alpha\bar{\alpha}$$

由于 $\alpha\bar{\alpha}=a^2+b^2$，由此就推出 $\varepsilon=1$.

根据定义(Ⅱ)，假如两个乘数中的一个是零，那么这两个数的乘积也是零. 逆命题也成立：假如两个复数的乘积等于零，那么至少两个因子中有一个是零. 事实上，设 $\alpha\cdot\xi=0$，$\alpha\neq 0$. 在等式两边各乘以一个数 $\beta=\frac{\bar{\alpha}}{a^2+b^2}$，我们就得到$\zeta=0$.

3. 复数的减法与除法

我们确定减法是加法的逆运算. 按照这个定义，我们称适合等式

$$\alpha+z=\beta \tag{3}$$

的 z 是复数 $\beta=c+d\mathrm{i}$ 与 $\alpha=a+b\mathrm{i}$ 之差.

我们要指出：在复数域中应用减法运算的结果也是唯一的，事实上，在等式(3) 的两端加上数 $-\alpha$，我们就得到

$$z=\beta+(-\alpha)=\beta-\alpha=c-a+(d-b)\mathrm{i}$$

最后，我们定义除法是乘法的逆运算. 按照定义，我们了解符号$\frac{1}{\alpha}(\alpha\neq 0)$ 是满足等式

$$\alpha\cdot z=1 \tag{4}$$

的数 z.

在等式(4) 两端各乘以数$\frac{\bar{\alpha}}{a^2+b^2}$，就得到

$$z=\frac{\bar{\alpha}}{a^2+b^2}$$

我们用$\frac{\beta}{\alpha}$来记复数β与α的商,规定

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}\cdot\beta$$

这样,除了用零作除数以外,在复数域中除法也唯一地规定了.

跟等式(Ⅰ)与(Ⅱ)比较,等式

$$(a-b\mathrm{i})+(c-d\mathrm{i})=(a+c)-(b+d)\mathrm{i}$$
$$(a-b\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})=(ac-bd)-(ad+bc)\mathrm{i}$$

指出了:在两个复数的和或积中,如果把加项或因子用它们的共轭数来代替,那么结果就得到原来的和或积的共轭数.用于减法与除法分别是加法与乘法的逆运算,同样的结论对减法与除法也成立.因此,如果我们把每一个复数的共轭数对应于原来的复数,就得到一个把整个复数系变成为它自己的变换,而这个变换具有这样的性质:假如把等式

$$\alpha+\beta=\gamma,\quad \alpha-\beta=\gamma,\quad \alpha\cdot\beta=\gamma,\quad \frac{\beta}{\alpha}=\gamma$$

中的数用它们的像来代替,那么这些等式依旧成立.由此可知,如果把每一个复数用它的共轭数来代替,则关于复数的那些两端包含着加、减、乘、除运算的方程依旧成立.

§2　复数的几何表示法·关于模与辐角的定理

1.复数的几何表示法

我们可以作为平面上以a与b为坐标的点来画出每一个复数$\alpha=(a,b)$(图1).数α称为这个点的附标.以后我们常把具有附标α的点也记作α.这个用它的点来代表复数的平面称为复数平面.对应于数0的坐标原点简称原点.在这样的复数表示法下,横轴上的点代表实数,而纵轴上的点就代表纯虚数.因此横轴称为实轴而纵轴称为虚轴.复数还可以用从原点出发终点在点α的矢量来表示(图1).在这样的复数表示法下,实数部分a与虚数部分的系数b就成为代表矢量的支量.

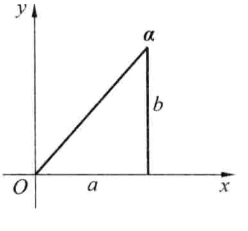

图 1

2.复数的加法与减法的几何意义

为了给两个复数$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的加法以几何意义,我们用对应的矢量来表示这两

个数. 于是和数 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 可以表为它的支量等于 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的对应支量之和的矢量(按照加法的定义),也就是说,数 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 可以用以矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 为边的平行四边形的对角线来表示(图 2).

由于 $\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}+(-\boldsymbol{\alpha})$,我们只要按照平行四边形规则来加矢量 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $-\boldsymbol{\alpha}$,结果就可以得到代表 $\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}$ 的矢量(图 3).

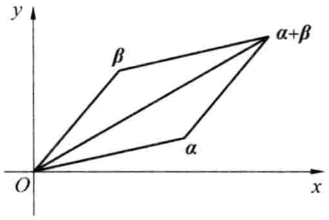

图 2

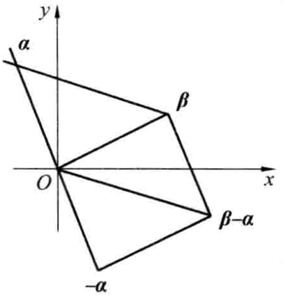

图 3

3. 模与辐角的概念

在给出复数的乘法与除法的几何意义以前,我们先要熟悉复数的三角形式表示法. 从原点到 α 的距离也就是 α 的长是

$$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\alpha\cdot\bar{\alpha}}$$

这个正数 r 称为复数 α 的模,并记作 $|\alpha|$;在 α 为实数的情形,显然它的模就是它的绝对值. 以 r 为半径原点为中心的圆周上的点所表示的数都具有同一个模 r. 数 0 是唯一的以零为模的复数.

矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的方向是由 Ox 轴的正方向与该矢量的方向间的交角确定的;φ 表示由 Ox 轴的正方向转到和矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的方向一致时所成的角度,如果转动是逆时针方向,那么所成的角是正的,否则便是负的. 这个数 φ 称为复数 α 的辐角,并记作 $\arg\alpha$(图 4),显然

$$\tan\varphi=\frac{b}{a}$$

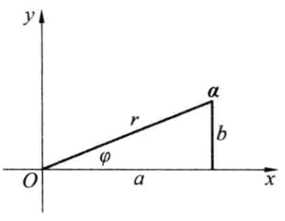

图 4

对于每一个数 α,它的辐角 φ 可以有无穷多个数值,彼此各差 2π 的若干倍. 数 0 是唯一的复数,它的辐角没有定义. 由于 r 与 φ 是点 $\alpha=(a,b)$ 的极坐标,我们有 $a=r\cos\varphi$,$b=r\sin\varphi$,因此

$$\alpha=r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$$

复数的这个形式称为三角形式.

4. 关于模与辐角的定理

作两个复数

$$\alpha=r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$$
$$\beta=\rho(\cos\psi+\mathrm{i}\sin\psi)$$

的乘积，我们得到

$$\alpha\beta=r\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)(\cos\psi+\mathrm{i}\sin\psi)= r\rho[\cos(\varphi+\psi)+\mathrm{i}\sin(\varphi+\psi)]$$

由此我们断定

$$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|,\quad \arg(\alpha\beta)=\arg\alpha+\arg\beta \tag{5}$$

就是说两个复数的乘积的模等于它们的模的乘积，两个复数的乘积的辐角等于它们的辐角之和.

当利用矢量来表示复数时，可以说乘积$\alpha\beta$的矢量是从因子α的矢量旋转一个角度$\arg\beta$并伸长到$|\beta|$倍得到的. 特别情形当$|\beta|=1$时，乘法变成了只是旋转. 例如：乘以i相当于旋转90°，而乘以-1相当于旋转180°. 当$\arg\beta=0$的情形（β是正数），乘法就变成仅仅是伸长. 等式(5)很容易推广到任意个数目的复数因子$\alpha\beta\gamma\cdots\lambda$的乘积. 对于这样的乘积有下面的等式：

$$|\alpha\beta\gamma\cdots\lambda|=|\alpha|\cdot|\beta|\cdot|\gamma|\cdots|\lambda|$$
$$\arg(\alpha\beta\cdots\lambda)=\arg\alpha+\arg\beta+\cdots+\arg\lambda$$

特别是，假如所有的因子彼此都相等时，就有

$$|\alpha^n|=|\alpha|^n,\quad \arg(\alpha^n)=n\arg\alpha \tag{6}$$

等式(6)给出了所谓棣美弗公式

$$[r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi) \tag{6'}$$

设$\alpha=r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$，我们定义$\sqrt[n]{\alpha}$为一个自乘$n$次后等于$\alpha$的复数. 这个数的模显然等于$\sqrt[n]{r}$，它的辐角等于$\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}$，其中$k$是任意的整数. 令$k$等于$0,1,2,\cdots,n-1$，得到表达式$\sqrt[n]{\alpha}$的$n$个不同的辐角值；所以$\sqrt[n]{\alpha}$按照下列公式有$n$个不同的值：

$$\sqrt[n]{\alpha}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\quad(k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

从几何的意义来看：$\sqrt[n]{\alpha}$的这n个值显然可以用一个内接于以原点为中心$\sqrt[n]{r}$为半径的圆周的正多角形的顶点来表示.

由于：按照定义

$$\beta=\frac{\beta}{\alpha}\cdot\alpha$$