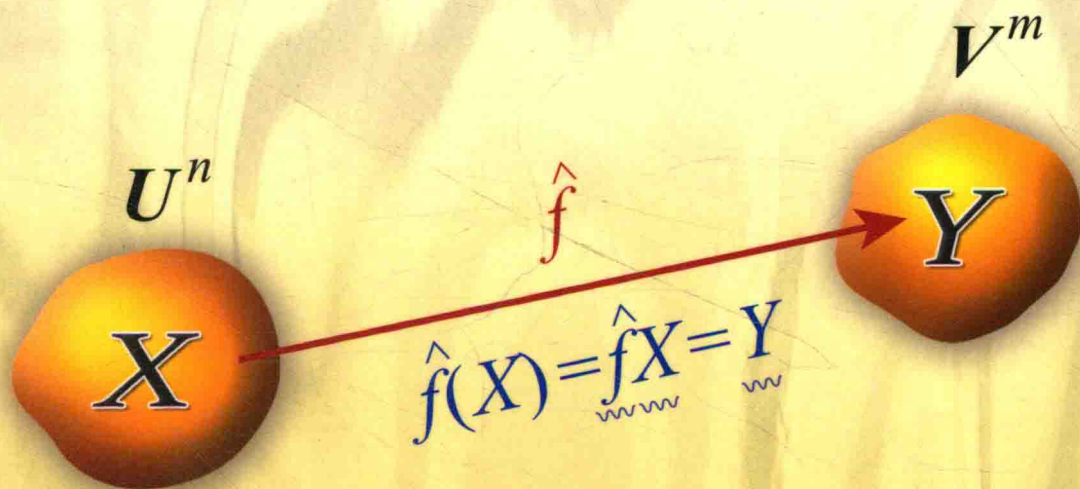


Linear Algebra



從物理學切入的

線性代數導論

林清涼 著

從物理學切入的

線性代數導論

林清涼 著

五南圖書出版公司 印行

國家圖書館出版品預行編目資料

從物理學切入的一線性代數導論／林清涼著。

——初版。——臺北市：五南，2014.04

面；公分。

ISBN 978-957-11-7478-5 (平裝)

1. 物理學 2. 線性代數

330

102026995



5BF8

從物理學切入的一 線性代數導論

作者—林清涼

發行人—楊榮川

總編輯—王翠華

編輯—王者香

出版者—五南圖書出版股份有限公司

地址：106台北市大安區和平東路二段339號4樓

電話：(02)2705-5066 傳真：(02)2706-6100

網址：<http://www.wunan.com.tw>

電子郵件：wunan@wunan.com.tw

劃撥帳號：01068953

戶名：五南圖書出版股份有限公司

台中市駐區辦公室/台中市區中山路6號

電話：(04)2223-0891 傳真：(04)2223-3549

高雄市駐區辦公室/高雄市新興區中山一路290號

電話：(07)2358-702 傳真：(07)2350-236

法律顧問 林勝安律師事務所 林勝安律師

出版日期 2014年4月初版一刷

定價 新臺幣980元



謹以此書紀念：

對高雄縣岡山區建設和臺灣養殖業作出貢獻的林天福先生（1891年7月10日～1987年12月12日）：

對臺灣自然環境保護作出貢獻的馮纘華先生（1918年2月17日～1986年9月4日）。



本書由馮纘化、林清涼環境保護
基金會贊助出版

序 文

線性代數學，說極端是起源於巴比倫 (B. C. 1950 年代)，13 世紀傳入歐洲，經解 1 元 1 次到 3 次方程式在 16 世紀發現虛數。到 17 世紀不但代數學和幾何學開始融合，並且微積分誕生，於是帶來數學突飛猛進一直到 20 世紀前半葉。其間數學和物理學的互動非常密切，終於在 1925 年夏天生下建立在線性代數學基礎上的量子力學，它是主宰今日高科技的物理學之一。另一方面，描述日常生活動態現象的運動方程式，絕大部分是線性微分方程式，顯然直接和空間，變換或映射有密切關係的線性代數學對物理學很重要。不過通常的線性代數學書，幾乎較偏向數學，無形中使初學者有空洞和枯燥感，甚至於不知其用途。

避免陷入僵化、架構和相互關係模糊，以及失去發展過程的關連。於是盡量畫圖說明，闡述重要科學家的創造或發明過程，其在歷史上的定位，和交代清楚整體架構等方向努力。以交談方式和一步一步地用分析法解例題，探究問題核心在那裡，過去有什麼演算招術，然後分析所得結果，可能時歸納結果。同一題目有的用不同方法解，並且不少例題是物理題目，讓初學者有實感，好像看得到又摸得到。解題目時免不了數學演算工具的微積分，於是請初學者適當地跳過覺得難的數學演算，先抓住整個架構和大致概念，因為整本書是能自學的寫法。對一個新東西，不可能一次就瞭解，經一段時間，並且最好是從不同角度或層面切入同一題目，平均三次才能懂。極少數人是一次就懂，有的兩次，有的三次四次哪。

本書的科學家，除大家熟悉的，例如牛頓 (Newton) 之外，一律使用原姓；首次出現的專用名詞附有英文名。物理量的因次 (或量綱 dimension) 是採用國際通用的 MKS 單位制 (International System of Units, 簡稱 SI 制)，即長度使用公尺 (m)，質量和時間分別是公斤 (kg) 和秒 (s)。至於英文字 constant，有因次時譯成常量，無因次時譯為常數，而名詞右上角附有符號

“ i ”者表示兩個或兩個以上，例如電子 i 是兩個或兩個以上的電子。各章本文的數學式子、圖和表的號數，分別用 $(i-n)$ ，圖 $(i-m)$ 和表 $(i-\ell)$ ， $n, m, \ell=1, 2, 3, \dots$ ， i =章數。各章後面的參考文獻和註解的式子，圖和表的號數分別用 (n) ，（圖 m ）和（表 ℓ ）， $n, m, \ell=1, 2, 3, \dots$ ，並且號數是從第一章開始依順序到第五章。

由於個人無法直接用電腦書寫稿子，必先寫初稿，然後整理寫成出版稿，避免抄寫時犯錯，於是請臺灣大學數學研究所研究生鄭旭峰先生幫忙校稿，在此特表感謝。其次要感謝的是在美國 Lawrence 國家實驗所的王子方博士，利用他回臺灣期間專程來幫忙部分校稿。本書的出版工作由健行科技大學洪榮木教授協助完成。

本書出售的版稅收入捐給馮林基金會作為環境保護之用。

本書錯誤之處，祈讀者指教為盼。

林清涼 謹誌
臺灣大學物理系
2012年9月

目 錄

序文

本書使用的符號 xiv

1 導言和基礎觀念 1

- (I) 導言 2
 - (A) 小學到國中學了什麼數學？ 2
 - (B) 高中到大學一年級要學什麼數學呢？ 3
 - (1) 向量的內涵⁴⁾ 4
 - (2) 分析整理向量運算⁵⁾ 5
- (II) 基礎觀念 7
 - (A) 線性 (linearity)？線性空間 (linear space)？ 7
 - (B) 映射，函數與其有關的專用名詞觀念 11
 - (1) 操作 (operation)、算符 (operator) 與其有關的操作專用名詞 11
 - (a) 閉操作？非閉操作？ 12
 - (b) 雙操作？單閉雙操作？二閉雙操作？ 12
 - (2) 什麼叫代數體系 (algebraic system)？ 12
 - (3) 變換 (transformation)？ 13
 - (a) 座標軸不動，粒子作轉動 13
 - (b) 粒子不動，座標軸繞原點轉動 13
 - (c) 數學和物理的互動 14
 - (4) 映射 (mapping)？ 19
 - (a) 定義 19
 - (b) 映射的專用名詞 19
 - (c) 等映射？恒等映射？恒等函數？ 20
 - (d) 合成映射 (composite mapping)？泛函數 (functional)？ 20
 - (e) 全映射？ 21

- (f) 部映射? 21
- (g) 1對1映射? 21
- (h) 多對1映射? 22
- (i) 全單映射? 逆映射? 22
- (j) 有沒有1對多映射 (one-to-many mapping) 呢? 22

☆ 習題和解答 24

☆ 第一章 摘要 27

☆ 參考文獻和註解 29

- (1) 虛數符號 $\sqrt{-1} \equiv i$, 複數 ($a + ib, a, b = \text{實數}$) 怎麼誕生? 29
 - (a) 如何找到 π ? 29
 - (b) e 是如何誕生的? 29
 - (c) $\sqrt{-1} \equiv i$ 的誕生過程, 以及複數的產生¹¹⁾ 30
 - (d) 推導(9)式¹¹⁾ 32
- (2) 空間數? Hamilton 四元數? 數學量或數學數? 33
- (3) 代數學 (algebra)? 線性代數 (linear algebra)? 35
- (4) 指數函數 (exponential function)? 對數函數 (logarithmic function)? 36
- (5) 向量是什麼? 其演算法呢? 39
 - (a) 向量 (矢量 vector) 是什麼? 39
 - (b) 演算法? 40
 - (i) 標量積 (scalar product) 或內積 (inner product) 或點積 (dot product)? 40
 - (ii) 向量積 (矢量積 vector product) 或外積 (outer product) 或叉積 (cross product)? 42
 - (c) 向量分析學? 線性? 45
 - (d) Dirac 的左右向量? 49
- (6) 集合 (set)? 群 (group)? 體 (field)? 52
 - (a) 集合? 53
 - (i) 定義 53
 - (ii) 數學表示, 其表示符號, 專用名詞 53
 - (iii) 集合的演算 55
 - (b) 群 (group)? 56

- (i) 定義 56
- (ii) 加法群或加群 (additive group) $\equiv \{G, +\}$ 56
- (iii) 乘法群或乘群 (multiplicative group) $\equiv \{G, \cdot\}$ 57
- (c) 體 (field) ? 58
 - (i) 定義 58
 - (ii) 加法, 加法規則' (additive rules) 58
 - (iii) 乘法, 乘法規則' (multiplicative rules) 59
 - (iv) 加法乘法間分配律 (distributive law) 成立 59
 - (v) 結論 59
- (7) 偏微分? 線性微分方程式? 經典物理學? 60
 - (a) 微分 (differential calculus, differentiation) ? 60
 - (b) 偏微分 (partial differential calculus, partial differentiation) ? 61
 - (c) 線性微分方程式? 63
 - (i) 什麼是微分方程式? 63
 - (ii) 什麼是線性微分方程式? 64
 - (d) 經典 (古典) 物理學? 64
- (8) 物理學的宏觀世界和微觀世界是什麼? 線性算符是什麼? 66
 - (a) 宏觀世界? 66
 - (b) 微觀世界? 66
 - (c) 如何判別宏微觀呢? 66
 - (d) 線性算符? 67
- (9) 矩陣 (matrix) 是什麼? 69
 - (a) 矩陣簡史 69
 - (i) 線性聯立方程式 (system of linear equations) 69
 - (ii) 行列式 (determinant) ? 矩陣 (matrix) ? 71
 - (b) 簡介矩陣運算法 82
 - (i) 矩陣, 空間 (space) 83
 - (ii) 矩陣加法? 84
 - (iii) 矩陣乘標量? 85
 - (iv) 矩陣乘矩陣? 85
- (10) 變換、操作和算符互有關係嗎? 87

- (a) 對標量函數 (scalar function) 的操作 (operation) 87
- (b) 操作者轉動算符 \hat{R} 現身, 與其物理內容 90
- (11) 燕曉東編譯: 幾何原本 (古希臘歐幾里得原著), 人民日報出版社 (2005) 93
O. Schreier and E. Sperner: *Introduction to Modern Algebra and Matrix Theory*, Chelsea Publishing Company, New York, N.Y., 1955.
- (12) P. A. M. Dirac: *The Principles of Quantum Mechanics*, 4th ed. Oxford University Press, 1958. 93

2 線性空間與其基底、維度和座標 95

- (I) 物理向量與其空間、基底、維度和座標^{5, 11)} 96
 - (A) 物理向量與其性質? ⁵⁾ 96
 - (1) 加法性質 96
 - (2) 乘標量法性質 96
 - (B) 空間? 子空間? 96
 - (1) 空間 (space)? 96
 - (2) 子空間 (subspace)? 97
 - (a) 以物理現象的空間作例 97
 - (b) 以物理現象的內容作例 97
 - (C) 向量的線性獨立和線性相依, 與其線性組合?⁵⁾ 99
 - (1) 向量的線性獨立和線性相依? 99
 - (2) 向量的線性組合與其用途? 100
 - (a) 正交曲線座標系? 極座標系? 101
 - (b) 單位向量的矩陣形式?⁵⁾ 102
 - (D) 向量的標量積或內積或點積?⁵⁾ 103
 - (1) 定義 (definition) 103
 - (2) 向量長度 (length) ℓ 是什麼? 104
 - (3) 空間任意兩點 P_1 和 P_2 間的距離 $\overline{P_1P_2}$ 是什麼? 105

- (4) 什麼是範數 (norm) ? 105
- (5) 正交性? 歸一化? 正交歸一化? 107
 - (a) Gram-Schmidt 的正交歸一化方法 108
 - (b) 什麼是投影算符? 110
- (6) 基底? 維度? 座標? 座標軸? 座標系? 115
 - (a) 基底 (basis) ? 115
 - (b) 維度 (dimension) ? 115
 - (c) 座標? 座標軸? 座標系? 標準基底? 116
- (7) 座標系種類與其相關名詞 118
 - (a) 座標系? 正交座標系? 118
 - (b) Descartes 座標系? Minkowski 座標系? 118
- (II) 代數向量與其空間、基底、維度和座標¹⁰⁾ 125
 - (A) 代數向量與其性質? 5, 6) 125
 - (1) 加法性質: ——[(2-1) 式的 $\vec{0}$ 用符號 ϕ 取代]—— 125
 - (2) 乘標量法性質 125
 - (B) 線性空間? 線性子空間? 9, 11) 126
 - (1) 線性空間? 126
 - (a) 線性空間定義 126
 - (b) 佈於體 F 的線性空間 V 的性質: ——(普通稱作定理)—— 127
 - (c) 線性空間例' 129
 - (2) 線性子空間? 135
 - (a) 定義 135
 - (b) 子空間的例' 135
 - (c) 線性空間 V 的線性子空間 S_1 和 S_2 之和 (sum) 與其共同部分 S_{12} ? 143
 - (d) 線性空間 V 的子空間 S_1 和 S_2 的直和 (direct sum) 是什麼? 144
 - (C) 線性相依? 線性獨立? 線性組合? 5, 9, 11) 146
 - (1) 代數向量' 的線性相依 (linear dependence) ? 146
 - (a) 說明 147
 - (b) 線性相依的定義 147
 - (2) 代數向量' 的線性獨立與線性組合? 148
 - (a) 線性獨立的定義 149

- (b) 代數向量'的線性組合 (linear combination) ? 151
- (3) 從代數向量'的線性相依性和獨立性推演出來的性質 153
 - (a) 線性相依定義的內涵 154
 - (b) 線性獨立定義的內涵 155
- (D) 線性空間的基底和維度與其座標系和座標 ? ¹¹⁾ 156
 - (1) 什麼是線性空間的基底呢 ? 157
 - (a) 定義線性空間 V 的基底 157
 - (b) (a_1, a_2, \dots, a_n) 是否線性空間 V 的唯一 (unique) 基底 ? 158
 - (c) 標準基底 (standard basis) ? ⁵⁾ 162
 - (2) 線性空間 V 的維度 (dimension) ? 164
 - (a) 維度 (維數) 的定義 164
 - (b) 從 (2-43)₁ 和 (2-43)₂ 式歸納出來的基底和維度性質 164
 - (c) 基底和維度的例' 165
 - (3) 線性空間 V 的座標系與座標 ? 175
 - (a) 定義線性空間的座標 (coördinates) 175
 - (b) 座標軸是標準基底時: ——(同用圖 (2-15)(a) 來表示)—— 176
 - (c) 座標軸非標準基底 (non-standard basis) 時 176
- (E) 代數向量的內積, 範數, 兩點間距離, 正交, 正交歸一 ? ¹¹⁾ 181
 - (1) 內積 ? 181
 - (a) 代數向量內積定義 181
 - (b) 內積公理' (axioms) 181
 - (c) 非標準基底展延的內積空間 V 中的內積成分式 184
 - (d) 標準基底展延的內積空間 V 中的內積成分式 185
 - (2) 範數 (norm) ? 188
 - (a) 範數定義 188
 - (b) 代數向量的範數性質 189
 - (c) 兩代數向量 X 和 Y 的夾角 ? 190
 - (3) 兩點間距離 ? 兩物理或代數向量間距離 ? ¹¹⁾ 191
 - (a) 從另一角度分析 (2-63)₁ 式 192
 - (b) 兩連續函數 f 和 g 間距離 ? 193
 - (4) 正交 ? 正交性 ? 正交代數向量集合 ? ¹¹⁾ 196

- (a) 正交定義 196
- (b) 正交集 G 的性質 196
- (c) 正交投影 (orthogonal projection) ? 198
- (d) 正交互餘 (正交補 orthogonal complement) ? 200
- (5) 歸一化, 正交歸一, 正交歸一性, 正交歸一系, 正交歸一座標系? ¹¹⁾ 203
 - (a) 歸一化 (normalization) ? 203
 - (b) 正交歸一 (正交歸一化) ? 正交歸一性? 正交歸一系? 205
 - (c) Gram-Schmidt 過程或 Gram-Schmidt 正交歸一過程? 209
- ☆ 習題和解答 213
- ☆ 第二章 摘要 219
- ☆ 參考文獻和註解 221
 - (13) 向量'的線性獨立與相互垂直 221
 - (14) 運算內積時, 乘標量的問題 222
 - (15) 投影算符 (projection operator) $\hat{P} \equiv |\vec{x}_k\rangle\langle\vec{x}_k|$ 必須滿足以下四規則 (四性質) 222
 - (16) 類比物理向量'與其幾何圖畫代數向量'與其幾何圖 224
 - (17) 數學和物理學的翻譯名詞之差異 225

3 線性變換 227

- (I) 變換 (transformation) ? 228
 - (A) 說明 228
 - (B) 線性變換 (linear transformation) ? 229
 - (1) 線性變換算符的定義 230
 - (a) 加法性質: ——[(2-18) 式的 a 和 b 換成 \hat{f} 和 $\hat{g}, \phi \rightarrow \hat{0}$]—— 230
 - (b) 乘標量法性質: ——[(2-19) 式的 a 和 b 換成 \hat{f} 和 $\hat{g}, 1 \rightarrow \hat{I}$]—— 230
 - (c) 除 (3-5) 式之外, 變換算符有下列 (3-6) 式的乘法性質 (公理') 230

- (2) 線性變換定義 231
- (3) 較重要線性變換名稱與其定義 232
- (II) 線性變換算符 \hat{f} 的矩陣表示與其例題^{11, 12)} 238
 - (A) \hat{f} 的矩陣表示^{11, 12)} 239
 - (B) \hat{f} 和 \hat{g} 的接連變換積 (product of transformations \hat{f} and \hat{g})¹¹⁾ 242
 - (1) 推導 \hat{f} 和 \hat{g} 積的變換算符 \hat{h} 的矩陣 242
 - (2) 圖解接連兩變換 \hat{f} 和 \hat{g} 與直接變換 \hat{h} 243
 - (C) 同一線性變換算符 \hat{f} 在不同基底的矩陣關係¹¹⁾ 245
 - (D) 較重要的線性變換例題¹⁾ 247
 - (1) 證明寫成 (3-29)₁ 式形式的變換是線性變換的例¹⁾ 247
 - (2) 求線性變換算符 \hat{f} 的矩陣 $\hat{f} = [f_{ij}]$ 和變換內容之例¹⁾ 249
 - (3) 轉動變換與其矩陣和特徵¹⁸⁾ 263
 - (a) 繞正交歸一座標軸轉動 264
 - (i) 轉動軸 (axis of rotation) $|x_3\rangle$ 264
 - (ii) 同理以逆時針向繞 $|x_1\rangle$ 和 $|x_2\rangle$ 軸轉動 θ 角的矩陣表示式是 267
 - (iii) 推導 (3-38)₁ 到 (3-40)₂ 式的過程用的條件是什麼? 268
 - (b) 逆時針方向繞經過 R^3 正交座標原點的任意直線 ℓ 轉 θ 角 269
 - (i) 獨立角度的最大數目, 以及正交性條件 269
 - (ii) 線性變換算符矩陣積的非對易性 279
 - (c) 正交矩陣 (orthogonal matrix) 的性質 281
 - (i) 代數向量的大小不受轉動變換影響 281
 - (ii) 證明 (3-63) 式 282
 - (E) 標準矩陣 (standard matrix) 是什麼⁹⁻¹²⁾? 285
 - (1) 線性聯立方程組的行向量與列向量表示法⁹⁾ 285
 - (a) 行向量表示法或稱作向量形式 285
 - (b) 列向量表示法或稱作矩陣形式 288
 - (2) 標準矩陣 (standard matrix) 是什麼? 295
 - (F) 經典物理學 (classical physics) 的兩重要座標系的線性變換 306
 - (1) Galilei 座標系線性變換, 簡稱 Gailiei 變換 (Galilean transformation)? 306
 - (a) 慣性座標系 (inertial system)? 306
 - (b) Gailiei 變換? 307

(2) Lorentz 座標系線性變換，簡稱 Lorentz 變換 (Lorentz transformation) ? 309

(a) Minkowski 空間內的兩點間距離 d 309

(b) 推導 Lorentz 變換 311

(G) 麼正變換 (unitary transformation) ? 318

☆ 習題和解答 319

☆ 第三章 摘要 335

☆ 參考文獻和註解 337

(18) Jerry B. Marion and Stephen T. Thornton : *Classical Dynamics of Particles and Systems*, 3rd. ed. Harcourt Brace Jovanovich, Publishers, 1988 337

(19) 林清涼, 戴念祖 : 啟發性物理學 電磁學 3 版

——宏觀電磁學, 光學和狹義相對論——

五南圖書出版股份有限公司, 2011 337

4 矩 陣 339

(I) 矩陣定義及常用矩陣¹⁾ 340

(A) 回顧和定位 340

(B) 矩陣的定義及常用矩陣¹ 341

(1) 定義 341

(2) 常用矩陣¹ 341

(a) 代數向量矩陣, 簡稱為代數向量 341

(b) 特殊矩陣¹ 342

(c) 轉置矩陣 (transposed matrix) ? 344

(d) 共軛 (或複數共軛, 或複共軛) 矩陣 ? 346

(e) 特殊矩陣² 346

(II) 矩陣的基礎代數運算 354

(A) 基礎矩陣代數學 354

(1) 矩陣的加法和減法 354

- (a) 演算 354
- (b) 加減法規則：——($\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{C}}$ 都是 $m \times n$ 矩陣)—— 355
- (c) 加減法特性：——($\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{Z}}$ 都是 $m \times n$ 矩陣)—— 355
- (d) 相等矩陣？ 355
- (2) 矩陣與標量 α 和 β 的相乘： 356
 - (a) 演算 356
 - (b) 乘標量法規則：——($\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$ 都是 $m \times n$ 矩陣)—— 356
 - (c) 乘標量法特性 356
- (3) 矩陣與矩陣的相乘 357
 - (a) 演算 357
 - (b) 矩陣乘矩陣規則：——($\underline{\underline{A}}$ 和 $\underline{\underline{E}} = m \times n$ 矩陣, $\underline{\underline{B}} = n \times \ell$ 而 $\underline{\underline{C}} = \ell \times k$ 矩陣)—— 367
 - (c) 矩陣乘矩陣的特性 367
 - (d) 基本矩陣' (elementary matrices) ? 基本操作？ 377
- (B) 線性聯立方程組 (systems of linear equations) 387
 - (1) Gauss 消去法的解題步驟 388
 - (a) 一些專用名詞 388
- (III) 矩陣秩數 (rank of matrix) 391
 - (A) 基礎觀念和定義與其性質 391
 - (1) 矩陣的秩數定義 392
 - (2) 矩陣的秩數性質 392
 - (3) 等價矩陣' (equivalent matrices) 393
 - (4) 什麼是矩陣的標準形？ 393
 - (5) 非奇異 (正則) 矩陣的等價條件 (equivalence condition) 393
 - (6) 有成分的物理算符矩陣的秩數 405
 - (B) 矩陣和線性空間 405
 - (1) 什麼是線性變換算符 \hat{f} 的核 (kernel) ? 407
 - (2) 秩一零化度定理是什麼？ 415
- (IV) 逆矩陣 (inverse of matrix) 421
 - (A) 逆矩陣的定義與其一些性質 (基礎定理') 422
 - (1) 逆矩陣的定義 422

- (2) 逆矩陣的一些性質 (基礎定理') 422
- (B) 行列式 (determinant) 簡介 423
 - (1) 行列式的定義 423
 - (2) 行列式的一些重要性質 (基礎定理') 426
- (C) 逆矩陣的求法 427
 - (1) 伴隨矩陣 (adjoint matrix) 是什麼? 427
 - (a) 伴隨矩陣 $\text{adj. } A$ 的定義 427
 - (b) 伴隨矩陣的性質 (定理) 及逆矩陣式 428
 - (2) 求逆矩陣的 Gauss-Jordan 法 434
- (D) 矩陣的分割與 LU 分解 438
 - (1) 矩陣的分割 (partitioning a matrix)? 438
 - (a) 定義 438
 - (b) 分塊的矩陣演算 439
 - (2) 矩陣的 LU 分解 (LU decomposition of a matrix)? 442
- ☆ 習題和解答 449
- ☆ 第四章 摘要 455
- ☆ 參考文獻和註解 459
 - (20) 原子核是什麼? 什麼叫同位旋? 459
 - (21) 林清涼:
 - 近代物理 (II), 二版 (2010)
 - 五南圖書出版股份有限公司 460

5 本徵值與本徵向量 461

- (I) 本徵 (eigen 或 characteristic) 名稱來源 462
 - (A) 剛體 (rigid body) 的轉動¹⁸⁾? 462
 - (1) 轉動慣量是什麼? 462
 - (2) 第 2 秩張量與 3×3 方陣有沒有直接關係? 本徵值, 本徵向量? 465
 - (B) 耦合振動 (coupled oscillation)¹⁸⁾? 470