普通高等教育"十一五"国家级规划教材

2008年度普通高等教育国家精品教材

高等职业教育规划教材

第2版

计算机应用数学

王培麟 ○ 主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
2008年度普通高等教育国家精品教材
高等职业教育规划教材

计算机应用数学

第2版

主编　王培麟
参编　唐　玲
徐振昌
范小勤

机 械 工 业 出 版 社

本书是高职高专计算机类专业系列教材的基础教材，是为了满足高职高专学校培养应用性技术人才的需要，并结合计算机类各专业对高等数学教学内容的需求编写的。内容包括函数、极限与连续，导数与微分，积分与微分方程，行列式与克莱姆法则，矩阵及其应用，向量与线性方程组解的结构，概率的基本概念，随机变量及其分布，集合及其运算，关系与函数，数理逻辑与图论。书后附有部分习题参考答案和初等数学常用公式。

本书可作为高职高专工科各专业通用教材，也可作为工程技术人员学习高等数学的参考资料。

为方便教师教学，本书配有电子教案，请发邮件至 wangyx@mail. machineinfo. gov. cn 索取。

图书在版编目（CIP）数据

计算机应用数学/王培麟主编．—2 版．—北京：机械工业出版社，2007. 6（2010.1 重印）

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

2008 年度普通高等教育国家精品教材

高等职业教育规划教材

ISBN 978-7-111-12312-5

Ⅰ. 计…　Ⅱ. 王…　Ⅲ. 电子计算机—应用数学　Ⅳ. TP301. 6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 084024 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）

责任编辑：王玉鑫　版式设计：冉晓华　责任校对：陈延翔

封面设计：王伟光　责任印制：洪汉军

三河市国英印务有限公司印刷

2010 年 1 月第 2 版第 3 次印刷

169mm×239mm・22. 5 印张・463 千字

6 001—9 000 册

标准书号：ISBN 978-7-111-12312-5

定价：27. 00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务　　网络服务

社服务中心：（010）88361066　　门户网：http：//www. cmpbook. com

销 售 一 部：（010）68326294　　教材网：http：//www. cmpedu. com

销 售 二 部：（010）88379649

读者服务部：（010）68993821　　**封面无防伪标均为盗版**

第2版前言

本书第2版为普通高等教育“十一五”国家级规划教材。根据第1版的使用情况，在保留第1版特色的基础上，对第1版作了以下的一些修订。

1. 在内容的要求和安排上作了适度的调整。

1）在微积分部分增加了微分方程的简单介绍。

2）在概率部分增加了随机变量函数的分布内容。

3）将线性方程组解的判定等原来第6章的部分内容整合于第5章，以突出矩阵的应用。

4）在第1章中对集合等概念进行了弱化，这是因为这部分内容在中学里已经进行了学习，同时在本教材离散数学部分还会有介绍。

5）每一节后增设了习题，每一章后保留了复习题，希望为使用者提供更多的练习内容。

2. 对文字部分作了一些修改，对原教材中的一些不足进行了修订。

修订后，本书的基本教学学时数仍保持在140学时左右，不同的专业可根据自身的教学需要进行取舍。

参加本书编写的有王培麟（番禺职业技术学院，编写第1～3章）；唐玲（广州城市职业学院，编写第4～6章）；徐振昌（广东交通职业技术学院，编写第7、8章）；范小勤（番禺职业技术学院，编写第9～12章）；高小明（番禺职业技术学院，完成全书的电子课件制作）。全书的框架结构安排、统稿、定稿由王培麟承担。

感谢广大读者对本书第1版的支持，希望第2版能够继续得到读者的帮助与支持。

编　者

第1版前言

在科学技术的研究与应用中，定量分析与精确计算是掌握客观规律的根本途径，而数学方法是对客观事物进行定量分析和精确计算的重要手段。因此，高等数学是高职高专各专业学生必修的一门重要基础课程。

高等职业教育作为我国高等教育的一个重要组成部分，其目标是要培养生产和管理第一线的技术应用型人才。为了满足高职高专学校培养应用性技术人才的需要，贯彻“以能力为主线，必需、够用为度”的原则，结合计算机类各专业对数学教学内容的需求，编写了本教材。

本教材将一元微积分、线性代数、概率论以及离散数学四部分内容融合在一起，内容覆盖高职高专学校计算机类各专业与工科相应专业对数学的需求，具有以下几个特点：

1. 贯彻“掌握概念、强化应用”的原则。“掌握概念”落实到用数学思想及数学概念结合实际应用方面上；“强化应用”落实到使学生能运用所学数学方法求解实际问题上。

2. 对重要的概念，凡是存在具体几何意义的，都给出了几何说明。

3. 适当注意数学自身的系统性与逻辑性，但不强求系统性、逻辑性和完整性。

4. 注意到与实际应用联系较多的基础知识、基本方法和基本技能的训练，但不要求过分复杂的计算和变换。

本教材的基本教学时数在140学时左右，对于书中带“*”号的章节，不同的专业可根据教学实际需要进行选择。对于教材的其他部分不同的专业也可根据自身的需要进行取舍。

本书第1～3章以及第9～12章由王培麟编写，第4～6章由支和才编写，第7、8章由徐振昌编写。王培麟任主编，负责全书的框架结构安排、统稿、定稿；徐振昌任副主编。

新世纪高等职业教育规划教材编审委员会主任、广东白云职业技术学院常务副院长李维东副教授承担了本教材的审稿工作，对本书的框架和内容都提出了很好的意见和建议，在此表示衷心的感谢。在编写第9～12章时，部分内容参考了广东交通职业技术学院万东同志编写的初稿，在此表示感谢。

我国高等职业教育的发展非常迅速，编写适应高等职业教育的教材还只是一种尝试。由于编者水平有限，经验又尚不足，加之时间仓促，书中的错误与不当之处在所难免，恳请广大读者指正。

编　者

目　录

第 2 版前言
第 1 版前言
第 1 章　函数、极限与连续 ………… 1
1.1　函数 ………… 1
1.1.1　区间、绝对值与邻域 ………… 1
1.1.2　一元函数 ………… 2
1.1.3　复合函数与反函数 ………… 5
1.1.4　基本初等函数 ………… 6
习题 1-1 ………… 9
1.2　极限 ………… 10
1.2.1　数列的极限 ………… 10
1.2.2　函数的极限 ………… 13
习题 1-2 ………… 16
1.3　极限的性质与运算法则 ………… 17
1.3.1　极限的性质 ………… 17
1.3.2　极限的运算法则 ………… 17
习题 1-3 ………… 20
1.4　极限存在的两个准则 ………… 20
1.4.1　判断极限存在的两个准则 ………… 20
1.4.2　两个重要极限 ………… 21
习题 1-4 ………… 24
1.5　无穷小量和无穷大量 ………… 24
1.5.1　无穷小量 ………… 24
1.5.2　无穷大量 ………… 26
习题 1-5 ………… 27
1.6　函数的连续性 ………… 27
1.6.1　函数连续的概念 ………… 27
1.6.2　函数的间断点 ………… 29
1.6.3　连续函数的运算 ………… 30
1.6.4　闭区间上连续函数的性质 ………… 31
习题 1-6 ………… 32
复习题 1 ………… 33
第 2 章　导数与微分 ………… 37
2.1　导数的概念 ………… 37
2.1.1　引例 ………… 37
2.1.2　导数的定义 ………… 38
2.1.3　左导数与右导数 ………… 40
2.1.4　可导与连续的关系 ………… 41
2.1.5　导数的几何意义 ………… 41
习题 2-1 ………… 42
2.2　导数的运算 ………… 42
2.2.1　基本初等函数的求导公式 ………… 42
2.2.2　导数的四则运算法则 ………… 43
2.2.3　复合函数的求导法则 ………… 44
2.2.4　隐函数的求导法则 ………… 45
2.2.5　对数求导法则 ………… 46
2.2.6　高阶导数 ………… 47
习题 2-2 ………… 49
2.3　微分及其运算 ………… 51
2.3.1　微分的定义 ………… 51
2.3.2　微分的几何意义 ………… 52
2.3.3　微分的运算 ………… 52
*2.3.4　微分在近似计算中的应用 ………… 53
习题 2-3 ………… 54
2.4　导数的应用 ………… 54
2.4.1　微分中值定理 ………… 54
2.4.2　未定型的极限 ………… 57
2.4.3　函数的单调性 ………… 60
2.4.4　函数的极值与最值 ………… 62
2.4.5　函数图形的凸向与拐点 ………… 66
*2.4.6　函数作图 ………… 67
*2.4.7　曲率 ………… 70
习题 2-4 ………… 71
复习题 2 ………… 73
第 3 章　积分与微分方程 ………… 76

3.1　不定积分 …………………………… 76
3.1.1　不定积分的概念 ………… 76
3.1.2　不定积分的积分方法 ……… 80
习题 3-1 ………………………………… 87
3.2　定积分 …………………………… 89
3.2.1　定积分的概念 …………… 89
3.2.2　定积分的性质 …………… 92
3.2.3　微积分的基本公式 ……… 93
3.2.4　定积分的计算 …………… 96
习题 3-2 ………………………………… 99
3.3　定积分的几何应用 ………………… 100
习题 3-3 ……………………………… 104
3.4　广义积分 ………………………… 105
习题 3-4 ……………………………… 108
3.5　微分方程初步 …………………… 109
3.5.1　微分方程的概念 ………… 109
3.5.2　可分离变量的微分方程 …… 110
3.5.3　一阶线性微分方程 ……… 111
习题 3-5 ……………………………… 113
复习题 3 ……………………………… 114
第 4 章　行列式与克莱姆法则 …… 117
4.1　行列式的定义 …………………… 117
4.1.1　二阶行列式 ……………… 117
4.1.2　三阶行列式 ……………… 118
4.1.3　n 级排列及其奇偶性 ……… 120
4.1.4　n 阶行列式的定义 ……… 121
习题 4-1 ……………………………… 122
4.2　行列式的性质 …………………… 123
习题 4-2 ……………………………… 126
4.3　行列式按行（列）展开定理 …… 127
4.3.1　余子式与代数余子式 ……… 127
4.3.2　行列式按行（列）展开定理 …………………………… 127
习题 4-3 ……………………………… 130
4.4　克莱姆法则 ……………………… 131
习题 4-4 ……………………………… 132
复习题 4 ……………………………… 132
第 5 章　矩阵及其应用 ………………… 135
5.1　矩阵的概念及其运算 …………… 135
5.1.1　矩阵的概念 ……………… 135
5.1.2　矩阵的加（减）法与数量乘法 ………………………… 136
5.1.3　矩阵的乘法 ……………… 137
5.1.4　矩阵的转置 ……………… 139
5.1.5　矩阵的乘幂与矩阵多项式 ……………………………… 140
习题 5-1 ……………………………… 140
5.2　逆矩阵 …………………………… 141
5.2.1　逆矩阵的概念及其存在的充要条件 ……………………… 141
5.2.2　可逆矩阵的性质 ………… 143
5.2.3　逆矩阵的求法 …………… 143
习题 5-2 ……………………………… 144
5.3　矩阵的秩与矩阵的初等变换 …… 145
5.3.1　矩阵的秩的定义 ………… 145
5.3.2　矩阵的初等变换 ………… 146
5.3.3　用矩阵的初等变换求逆矩阵和解矩阵方程的方法 ……… 148
习题 5-3 ……………………………… 150
5.4　高斯（Gauss）消元法解线性方程组 ……………………………… 150
习题 5-4 ……………………………… 154
5.5　线性方程组解的判定 …………… 154
5.5.1　齐次线性方程组解的判定 ……………………………… 154
5.5.2　非齐次线性方程组解的判定 ……………………………… 155
习题 5-5 ……………………………… 158
复习题 5 ……………………………… 158
第 6 章　向量与线性方程组解的结构 ……………………………… 161
6.1　向量的概念及运算 ……………… 161
6.1.1　向量的概念 ……………… 161
6.1.2　向量的线性运算 ………… 162
习题 6-1 ……………………………… 163
6.2　n 维向量的线性关系 …………… 163
6.2.1　向量的线性组合 ………… 163
6.2.2　线性相关与线性无关 ……… 165

6.2.3 几个重要定理 …………………… 167
6.2.4 极大线性无关向量组与向量组的秩 …………………… 169
习题 6-2 …………………… 170
6.3 线性方程组解的结构 …………………… 171
6.3.1 齐次线性方程组的结构 …… 171
6.3.2 非齐次线性方程组解的结构 …………………… 175
习题 6-3 …………………… 177
复习题 6 …………………… 177
第 7 章 概率的基本概念 ………… 179
7.1 随机事件 …………………… 179
7.1.1 随机事件与样本空间 ……… 179
7.1.2 事件之间的关系及其运算 …………………… 181
习题 7-1 …………………… 184
7.2 概率的定义 …………………… 185
7.2.1 频率与概率的统计定义 …… 185
7.2.2 古典概型 …………………… 186
习题 7-2 …………………… 187
7.3 概率的基本性质 …………………… 188
7.3.1 概率的基本性质简介 ……… 188
7.3.2 概率的加法公式 …………… 189
习题 7-3 …………………… 190
7.4 条件概率与乘法公式 …………… 190
7.4.1 条件概率 …………………… 190
7.4.2 乘法公式 …………………… 192
7.4.3 事件的相互独立性 ………… 192
习题 7-4 …………………… 194
7.5 全概率、逆概率公式 …………… 195
7.5.1 全概率公式 …………………… 195
7.5.2 逆概率公式（贝叶斯公式） …………………… 196
习题 7-5 …………………… 197
7.6 贝努里（Bernoulli）概型与二项概率公式 …………………… 197
7.6.1 贝努里概型 …………………… 197
7.6.2 n 重贝努里试验的概率计算公式 …………………… 198
习题 7-6 …………………… 199
复习题 7 …………………… 199
第 8 章 随机变量及其分布 ……… 201
8.1 离散型随机变量 …………………… 201
8.1.1 随机变量的概念 …………… 201
8.1.2 离散型随机变量的概率分布 …………………… 202
8.1.3 常见的离散型随机变量分布 …………………… 203
习题 8-1 …………………… 205
8.2 随机变量的分布函数 …………… 205
8.2.1 分布函数的概念 …………… 206
8.2.2 分布函数的性质 …………… 206
习题 8-2 …………………… 207
8.3 连续型随机变量 …………………… 208
8.3.1 连续型随机变量的概念 …… 208
8.3.2 三种常见的连续型随机变量的分布 …………………… 209
8.3.3 连续型随机变量分布函数的求法 …………………… 212
习题 8-3 …………………… 213
8.4 随机变量函数的分布 …………… 213
8.4.1 离散型随机变量函数的分布 …………………… 213
8.4.2 连续型随机变量函数的分布 …………………… 214
习题 8-4 …………………… 216
8.5 随机变量的数字特征 …………… 216
8.5.1 数学期望 …………………… 216
8.5.2 方差 …………………… 219
习题 8-5 …………………… 221
复习题 8 …………………… 222
第 9 章 集合及其运算 ……………… 224
9.1 集合的基本概念和基本运算 …… 224
9.1.1 集合的基本概念 …………… 224
9.1.2 集合间的关系 …………… 224
9.1.3 集合的运算 …………… 225
习题 9-1 …………………… 227
9.2 序偶与笛卡尔积 …………… 228

习题 9-2 …… 229
复习题 9 …… 229
第 10 章 关系与函数 …… 230
10.1 关系及其性质 …… 230
10.1.1 关系的概念及其表示法 …… 230
10.1.2 关系的复合与逆关系 …… 231
10.1.3 关系的性质 …… 234
习题 10-1 …… 236
10.2 等价关系与偏序关系 …… 237
10.2.1 等价关系与划分 …… 237
10.2.2 偏序关系 …… 238
10.2.3 关系的闭包运算 …… 241
习题 10-2 …… 242
10.3 函数 …… 243
10.3.1 函数的概念 …… 243
10.3.2 复合函数 …… 244
10.3.3 逆函数 …… 245
习题 10-3 …… 246
复习题 10 …… 247
第 11 章 数理逻辑 …… 249
11.1 命题与联结词 …… 249
11.1.1 命题的概念 …… 249
11.1.2 联结词与复合命题 …… 250
11.1.3 命题公式 …… 252
习题 11-1 …… 255
11.2 公式的等价与蕴涵 …… 256
11.2.1 命题演算的等价式 …… 256
11.2.2 公式的蕴涵 …… 260
11.2.3 范式 …… 262
11.2.4 命题演算的推理理论 …… 269
习题 11-2 …… 271
11.3 谓词逻辑 …… 273
11.3.1 谓词与量词 …… 273
11.3.2 公式及解释 …… 277
11.3.3 谓词演算的等价式与蕴涵式 …… 280
11.3.4 谓词演算的推理理论 …… 282
习题 11-3 …… 283
复习题 11 …… 285
第 12 章 图论 …… 288
12.1 图的基本概念 …… 288
12.1.1 图的基本概念与术语 …… 288
12.1.2 图的同构 …… 290
12.1.3 补图与子图 …… 291
习题 12-1 …… 292
12.2 路径、回路与连通性 …… 293
习题 12-2 …… 296
12.3 图的矩阵表示 …… 296
12.3.1 邻接矩阵 …… 297
12.3.2 路径矩阵 …… 298
习题 12-3 …… 299
12.4 树和生成树 …… 300
12.4.1 无向树的概念 …… 300
12.4.2 最小生成树 …… 301
习题 12-4 …… 302
12.5 有向树及其应用 …… 302
12.5.1 有向树的概念 …… 302
12.5.2 根树的应用举例 …… 305
习题 12-5 …… 306
12.6 平面图 …… 307
习题 12-6 …… 310
复习题 12 …… 310
附录 …… 313
附录 A 标准正态分布函数值表 …… 313
附录 B 初等数学常用公式 …… 314
附录 C 部分习题参考答案 …… 317
参考文献 …… 351

第 1 章　函数、极限与连续

1.1　函数

1.1.1　区间、绝对值与邻域

1. 开区间

将集合$\{x|a<x<b,\ a,b\in\mathbf{R}\}$称为一个开区间，用$(a,b)$表示．在数轴上表示以$a,b$为端点但不包括端点$a$与端点$b$的线段．其中$\mathbf{R}$表示全体实数．

2. 闭区间

将集合$\{x|a\leqslant x\leqslant b\quad a,b\in\mathbf{R}\}$称为一个闭区间，用$[a,b]$表示．在数轴上表示以$a,b$为端点且包括端点$a$与端点$b$的线段．

3. 半开闭区间

$[a,b)$表示集合$\{x|a\leqslant x<b\quad a,b\in\mathbf{R}\}$，在数轴上表示以$a,b$为端点、包括左端点$a$而不包括右端点$b$的线段．类似的，$(a,b]$表示集合$\{x|a<x\leqslant b\quad a,b\in\mathbf{R}\}$，在数轴上表示以$a,b$为端点、不包括左端点$a$而包括右端点$b$的线段．

显而易见，上述区间的长度都是有限的，且均为$b-a$.

4. 无穷区间

如果区间的长度是无穷大，则这样的区间称为无穷区间．无穷区间的种类有以下 5 种：

1) $(a,+\infty)=\{x|x>a\}$，表示大于a的全体实数x的集合；

2) $[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$，表示大于或等于$a$的全体实数$x$的集合；

3) $(-\infty,a)=\{x|x<a\}$，表示小于a的全体实数x的集合；

4) $(-\infty,a]=\{x|x\leqslant a\}$，表示小于或等于$a$的全体实数$x$的集合；

5) $(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$，表示全体实数．

其中“$+\infty$”读作“正无穷大”，“$-\infty$”读作“负无穷大”，它们均是数学符号，不能作为数看待．

5. 绝对值

实数的绝对值是数学里经常用到的概念．下面介绍实数绝对值的定义以及一些性质．

定义 1-1　实数x的绝对值表示一个非负实数，即

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

例如，$|2.78|=2.78$，$|-8.98|=8.98$，$|0|=0$. $|x|$ 的几何意义是数轴上的点

x 到原点的距离.

实数的绝对值有如下的性质：

1)对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，有 $|x|\geqslant 0$，当且仅当 $x=0$ 时，才有 $|x|=0$；

2)对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，有 $|-x|=|x|$；

3)对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，有 $|x|=\sqrt{x^2}$；

4)对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，$-|x|\leqslant x\leqslant |x|$；

5) 设 $a\geqslant 0$,则 $|x|\leqslant a$ 的充要条件是 $-a\leqslant x\leqslant a$；

6) 设 $a\geqslant 0$,则 $|x|\geqslant a$ 的充要条件是 $x\leqslant -a$ 或者 $x\geqslant a$.

关于实数四则运算的绝对值，有以下的结论：

对于任意的 x，$y\in\mathbf{R}$，总有

1) $|x+y|\leqslant |x|+|y|$ （三角不等式）；

2) $|x-y|\geqslant \big||x|-|y|\big|\geqslant |x|-|y|$；

3) $|xy|=|x|\cdot|y|$；

4) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}(y\neq 0)$.

6. 邻域

定义 1-2 称集合$\{x\,|\,|x-x_0|<\delta\}$(其中 δ 为大于零的实数)为以 x_0 为中心，δ 为半径的邻域，简称为 x_0 的 δ 邻域，记为 $U(x_0,\delta)$. 该邻域实质上是以 x_0 为中点、长度为 2δ 的开区间 . 集合$\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}$称为 x_0 的 δ 去心邻域，它实际上是在 x_0 的 δ 邻域中将中点 x_0 去掉后的集合，它是两个开区间的并集，即$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$.

1.1.2 一元函数

1. 一元函数的概念

函数是现代数学最重要的概念之一，也是微积分学的主要研究对象 . 下面给出一元函数的定义.

定义 1-3 设 D 是一非空实数集合，如果存在某种对应法则 f，使对任何实数 $x\in D$，都有惟一的实数 y 与之对应，则称 f 确定了一个一元函数 $f:D\rightarrow f(D)$，通常记为 $y=f(x)$，称 x 为自变量，y 为因变量，D 为定义域，$f(D)$为值域.

【例 1-1】 某工厂每日最多生产 A 产品为 1000 件，固定成本为 150 元，单位变动成本为 8 元，则每日的日产量 x 与每日总成本 y 建立的对应关系可以构成如下的函数：

$$y=f(x)=8x+150 \qquad x\in D$$

其中 $D=\{0,1,2,\cdots,1000\}$.

【例 1-2】 某水文站统计了某河流在 40 年内的平均月流量 V(见表 1-1).

表 1-1

月份 t/月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
平均月流量 V/亿 m^3	0.39	0.30	0.75	0.44	0.35	0.72	4.3	4.4	1.8	1.0	0.72	0.50

由表 1-1 可以看出，在平均月流量 V 与月份 t 之间建立了明确的对应关系，月份 t 每取一个值，由表就可得到平均月流量 V 的惟一的一个对应值，因而也确定了一个函数，其定义域 $D=\{t\,|\,1\leqslant t\leqslant 12, t\in \mathbf{N}\}$，其中 $\mathbf{N}$ 表示自然数.

【例 1-3】 某气象站用自动温度记录仪记录下一昼夜气温变化(见图 1-1)，由图可见，对于一昼夜内每一时刻 t，都有惟一确定的温度 T 与之对应，因而这条曲线在区间$[0,24]$上便确定了一个函数.

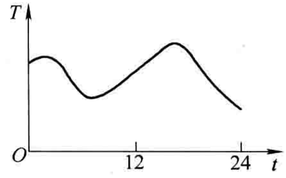

图 1-1

从以上三个例子可以看出，函数有三种表示法：公式法、列表法和图形法．其中公式法用得最多，图形法则比较直观，这两种表示法常常同时使用．

在实际问题中还经常出现如下的“分段函数”：

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & -2\leqslant x<0 \\ 2^x-1, & 0\leqslant x<2 \end{cases}$$

应当注意这是一个函数，只是在定义域不同范围内有不同的表达式．显然，上述函数在 $x=0$ 的左右有不同的表达式，我们称 $x=0$ 为函数的分界点．该函数的图像如图 1-2 所示.

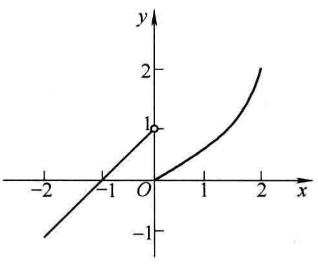

图 1-2

综上所述，一个函数有两个要素：定义域与对应法则. 不管自变量和因变量用什么字母表示，具有相同的定义域和对应法则的两个函数被认为是相同的，例如，$y=f(x)$也可以写成 $u=f(t)$.

寻找函数关系是高等数学所要研究的课题之一，下面给出一个建立函数关系的例子，在以后的学习中还将进一步介绍建立函数关系的方法.

【例 1-4】 有一块边长为 a 的正方形铁皮，将它的四角剪去大小相等的小正方形，制成一只无盖的盒子，求盒子的体积与剪去小正方形边长之间的函数关系.

解 设剪去的小正方形的边长为 x，盒子的体积为 V，由图 1-3 所示，容易得到

$$V=x(a-2x)^2,\qquad x\in\left(0,\frac{a}{2}\right)$$

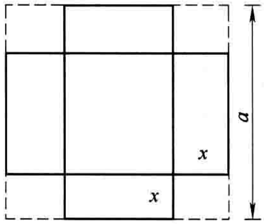

图 1-3

2. 函数的几何特性

(1)有界性　设函数 $f(x)$的定义域为 D，如果存在

一个正数 M，使得对任意的 $x\in D$ 都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 上有界；反之，如果这样的 M 不存在，也就是无论 M 取得多么大，总存在某个 $x_0\in D$，使得 $|f(x_0)|>M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上无界.

【例 1-5】 $y=\sin x$，对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，总有 $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$，因而该函数是有界函数.

(2)单调性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果对于任意的两点 $x_1,x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 内是单调递增的；反之，如果当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 内是单调递减的．今后，我们统称单调递增和单调递减函数为单调函数．有的函数在其定义域上没有单调性，但在某个区间内是单调的，例如函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不具有单调性，但是在 $(-\infty,0)$ 上是单调递减的，在 $(0,+\infty)$ 上是单调递增的，这种区间称为函数的单调区间．此外，如果对于任意的两点 $x_1,x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 内是单调不减的；反之，如果当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 内是单调不增的.

在几何上，单调增加的函数，其图形是随着 x 的增大而上升的曲线；单调减少的函数，其图形是随着 x 的增大而下降的曲线.

(3)奇偶性　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对任意的 $x\in D$，都有：

1）$f(-x)=-f(x)$，则称该函数为奇函数.

2）$f(-x)=f(x)$，则称该函数为偶函数.

在几何上，对于奇函数，由于 x 和 $-x$ 处的函数值相差一个符号，故其图形关于原点对称．对于偶函数，由于 x 和 $-x$ 处的函数值相等，故其图形关于 y 轴对称.

【例 1-6】 $y=x^2$，$y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}(x\neq 0)$，$y=\cos x$ 都是偶函数，因为

$$(-x)^2=x^2,\ \frac{1}{\sqrt[3]{(-x)^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}},\ \cos(-x)=\cos x$$

【例 1-7】 $y=x^3$，$y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}(x\neq 0)$，$y=\sin x$ 都是奇函数，因为

$$(-x)^3=-x^3,\ \frac{1}{\sqrt[3]{(-x)}}=-\frac{1}{\sqrt[3]{x}},\ \sin(-x)=-\sin x$$

【例 1-8】 $y=\sin x+\cos x$，$y=x+x^2$ 均是非奇非偶函数，因为

$\sin(-x)+\cos(-x)=-\sin x+\cos x$，它既不等于 $y=\sin x+\cos x$，也不等于 $-y=-(\sin x+\cos x)$.

同理，$(-x)+(-x)^2=-x+x^2$，它既不等于 $y=x+x^2$，也不等于 $-y=-(x+x^2)$.

(4)周期性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在 $T\neq 0$，对任意的 $x\in D$，有 x

$+T\in D$，且总有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 为 $f(x)$ 的一个周期．从周期函数的定义可以看出，如果 T 是 $f(x)$ 的周期，则 nT(n 为任意非零整数)都是 $f(x)$ 的周期，因此若函数 $f(x)$ 是周期函数，那么它一定有无穷多个周期．习惯上，如果一个周期函数存在最小的正周期，就把这个最小正周期叫做该函数的周期．例如，通常所说的 $y=\sin x$ 的周期为 2π 就是指的它的最小正周期，事实上任意的 $2k\pi$(k 为非零整数)均是它的周期.

【例 1-9】 $f(x)=\sin\omega x$ 是以 $\frac{2\pi}{\omega}$ 为周期的函数，这是因为：

$$f\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)=\sin\omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)=\sin(\omega x+2\pi)=\sin\omega x=f(x)$$

【例 1-10】 设函数为(狄利克雷函数)

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数}\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

则对于任意的有理数 γ 都是该函数的周期．这是因为如果 x 是有理数，则 $x+\gamma$ 也是有理数，所以 $D(x+\gamma)=D(x)=1$；如果 x 是无理数，则 $x+\gamma$ 也是无理数，所以 $D(x+\gamma)=D(x)=0$．然而，在正有理数集合中，没有最小的正有理数，所以 $D(x)$ 没有最小正周期．上述例子说明，不是任意的周期函数都有最小正周期.

1.1.3 复合函数与反函数

1. 复合函数

设有两个函数

$$f: y=f(u),\ u\in D_f$$
$$g: u=g(x),\ x\in D_g$$

如果函数 g 的值域 $g(D_g)$ 包含在函数 f 的定义域 D_f 内，亦即 $g(D_g)\subset D_f$，于是可将 $u=g(x)$ 代入 $y=f(u)$ 中，可得到新的函数

$$y=f(g(x)),\quad x\in D_g$$

则称此函数为 f 和 g 复合而成的复合函数，u 称为中间变量.

复合函数的概念通俗的理解就是函数套函数．函数 f 和 g 能否构成复合函数的关键是第二个函数的值域是否包含在第一个函数的定义域中.

【例 1-11】 $y=f(u)=\sqrt{u}, u=1+x^2$，由于 $u=1+x^2$ 的值域为 $[1,+\infty)$，包含于 $y=\sqrt{u}$ 的定义域 $[0,+\infty)$ 内，所以可以将 $u=1+x^2$ 代入 $y=\sqrt{u}$ 中，构成复合函数 $y=f(g(x))=\sqrt{1+x^2}, x\in(-\infty,+\infty)$.

【例 1-12】 $y=f(u)=\sqrt{u}, u=-2+\sin x$，由于 $u=-2+\sin x$ 的值域为 $[-3,-1]$，不包含于 $y=\sqrt{u}$ 的定义域 $[0,+\infty)$ 内，所以以上两个函数不能构成复合函数.

两个以上的函数，只要满足相应的条件也可以构成复合函数．例如 $y=$

$\ln \sqrt{2+x^2}$，就是由 $y=\ln u, u=\sqrt{v}, v=2+x^2$ 三个函数复合而成的.

2. 反函数

设 $y=f(x)$ 为给定的一个函数，如果对于其值域 $f(D)$ 中的任意一值 y，都可以通过关系式 $y=f(x)$ 在其定义域 D 中确定惟一的一个 x 与 y 对应，则得到一个定义在 $f(D)$ 上的以 y 为自变量，x 为因变量的新函数，称此函数为 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$. 由于习惯上以 x 作为自变量，y 作为因变量，所以 $y=f(x)$ 的反函数又记为 $y=f^{-1}(x)$，此时其定义域为 $D_{f^{-1}}=f(D)$，值域为 $f^{-1}(D)=D_f$.

要注意的是 $y=f(x)$ 和 $x=f^{-1}(y)$ 表示变量 x 和 y 之间的同一关系，因而它们的图形显然是同一条曲线，而 $y=f^{-1}(x)$ 是将 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x、y 交换得到的，因此 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关系相当于把 x 轴和 y 轴互换，从而 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

【例 1-13】 求 $y=f(x)=3x+1$ 的反函数.

解 容易看出，$y=3x+1$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域也是 $(-\infty,+\infty)$. 由 $y=3x+1$ 求出 $x=\frac{1}{3}(y-1)$，将 x 与 y 互换，就得到 $y=3x+1$ 的反函数为 $y=\frac{1}{3}(x-1)$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

1.1.4 基本初等函数

基本初等函数是指下列 5 类函数，这些函数在中学已经学过.

1. 幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为任何实数）

当 α 为不同的实数时，幂函数的定义域及性质也随之不同，因而情况比较复杂. 但不论 α 为何值，$y=x^{\alpha}$ 在 $(0,+\infty)$ 内总是有定义的，而且图形都通过点 $(1,1)$.

当 α 为正实数或是零时，幂函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，例如 $y=x, y=\sqrt{x}, y=x^2, y=1$ 等，它们的图形如图 1-4 所示.

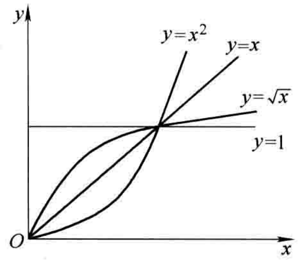

图 1-4

当 α 为负实数时，定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，例如 $y=\frac{1}{x}$ 等.

此外，当 α 为偶数时，$y=x^{\alpha}$ 为偶函数；当 α 为奇数时，$y=x^{\alpha}$ 为奇函数. 在 $(0,+\infty)$ 上，当 $\alpha>0$ 时，$y=x^{\alpha}$ 是单调递增的；当 $\alpha<0$ 时，$y=x^{\alpha}$ 是单调递减的.

2. 指数函数 $y=a^x\,(a>0, a\neq 1)$)

定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$，无论 a 取何值，函数的图形均经过点 $(0,1)$. 当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 为单调递增函数；当 $0<x<1$ 时，$y=a^x$ 为单调递减函数，如图 1-5 所示.

3. 对数函数 $y=\log_a x\,(a>0, a\neq 1)$

对数函数是指数函数的反函数，定义域为$(0,+\infty)$，只要 a 取任何不为 1 的正常数，函数均经过点$(1,0)$．当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 为单调递增函数；当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 为单调递减函数，如图 1-6 所示．

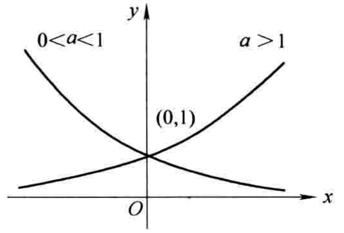

图 1-5

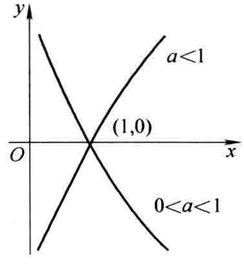

图 1-6

4. 三角函数

$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$.

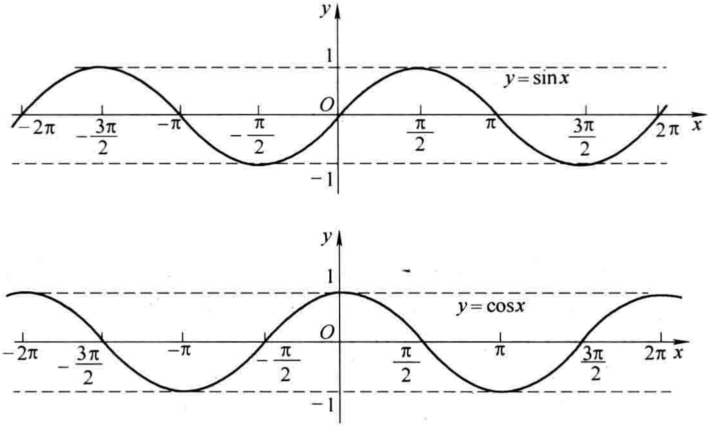

图 1-7

$y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 的定义域均为$(-\infty,+\infty)$，且都是以 2π 为周期的周期函数，$y=\sin x$ 是奇函数，而 $y=\cos x$ 是偶函数，它们的图形介于直线 $y=\pm 1$ 之间，故它们都是有界函数，$y=\sin x$ 的图形和 $y=\cos x$ 的图形如图 1-7 所示．

$y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$的定义域为$\{x\mid x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$，是以 π 为周期的周期函数．由于 $\tan(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=-\tan x$,故它是奇函数，其图形如图 1-8 所示.

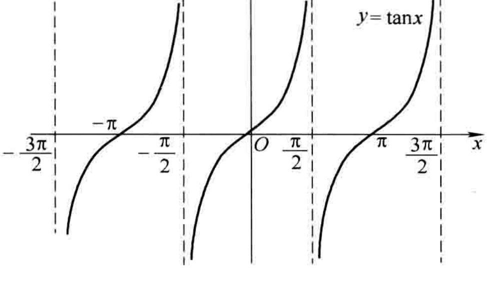

图 1-8

$y=\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$的定义域为$\{x\,|\,x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$，是以 π 为周期的周期函数.

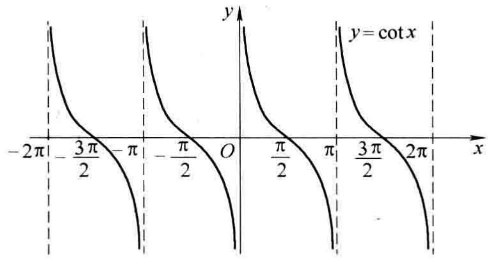

图 1-9

由于 $\cot(-x)=\dfrac{\cos(-x)}{\sin(-x)}=-\cot x$,故也是奇函数，如图 1-9 所示.

$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$的定义域为$\{x\,|\,x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\}$，是以 2π 为周期的周期函数，是偶函数.

$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$的定义域为$\{x\,|\,x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$，是以 2π 为周期的周期函数，是奇函数.

5. 反三角函数

$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

由于三角函数是周期函数，对于值域内的每个 y 值，都有无穷多个 x 值与之对应，因此，必须将其限制在单调区间上才能建立反三角函数．在相应的单调区间上所建立的反三角函数，称为反三角函数的主值.

$y=\arcsin x$ 是正弦函数 $y=\sin x$ 在区间$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上的反函数，称为反正弦函数，其定义域是$[-1,1]$，值域是$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，并在定义域上单调递增，如图 1-10 所示.

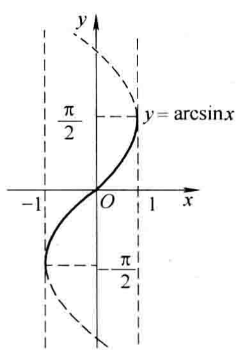

图 1-10

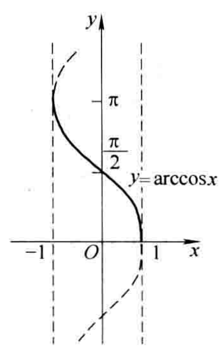

图 1-11