

管 理 数 学

顾 士 俊

武汉工学院管理工程教研室

一九八一年二月

目 录

第一章 运筹学概况

§ 1 概况	1
§ 2 运筹学主要分支	2

第二章 线性规划的数学知识

§ 1 矩阵的概念	7
§ 2 矩阵的运算法则	8
§ 3 凸集	13
§ 4 n 维向量	14
§ 5 向量的线性相关, 线性无关	14
§ 6 求解线性方程组的问题	16

第三章 线性规划

§ 1 引言	18
§ 2 数学模型	18
§ 3 线性规划问题的数学模型	37

第四章 线性规划问题的图上作业法

§ 1 线性规划可行解的解域	43
§ 2 图上作业法	45
§ 3 枚举法	51

第五章 单纯形法

§ 1 单纯形法引例	55
§ 2 单纯形算法	57

第六章 对偶规划及对偶单纯形法

§ 1 对偶规划	73
§ 2 对偶单纯形法	79

第七章 运输问题

§ 1 平衡运输问题线性规划的数学模型	82
§ 2 基可行解的特征, 第一组基可行解的求法	83
§ 3 基可行解的改进, 最优解的判别准则	87
第八章 分配问题	
§ 1 分配问题的匈牙利方法	94
§ 2 分支定界法	99
第九章 图论的基本知识	
§ 1 引言	108
§ 2 图的基本概念	109
§ 3 路的基本概念	112
§ 4 树的基本概念	114
§ 5 割集的基本概念	116
§ 6 无向图的矩阵表示	117
§ 7 有向图的矩阵表示	124
第十章 网络分析	
§ 1 引子	128
§ 2 最短路径问题	129
§ 3 最大流问题	134
§ 4 最小树问题	141
§ 5 计划协调技术和关键路径法	145

第一章 运筹学概况

§1 概 况

一、运筹学术语起源

运筹学这个术语起源于英国，运筹学跟雷达一样，是为了英国防空这一专门的军事需要而提出的。早在第二次世界大战期间，我们知道英国是个岛国，英伦三岛上任何一块陆地到海岸的距离都不超过70英里。这个距离德国若用轰炸机只需17分钟就能飞到。英国政府当时考虑如何能及早警戒敌机到来。也就是能使英国的防空战斗机有时间起飞，爬高并能在敌机深入中心区之前予以迎击。由于当时条件，在岛屿外设立警戒站给在政治上不方便，在军事上也不实际。故当时还没有防御敌机空袭的警戒办法，没有能足以在海岸以外就能警戒和跟踪来袭轰炸机的办法。

为解决这个问题，英国政府于1934年12成立了防空科学调查委员会，以研究当前的科学技术的进展到底有多少能用来加强目前的各种防空办法。直至1935年初，这个委员会在研究死光的过程中，提供一种用无线电对飞机定位的可能。于是全面开展了今天我们称之为雷达的这项研究工作。直至1938年，雷达系统在探测飞机的技术上是可行。在1938年7月，举行了第二次重大的防空演习，在沿岸又建了四个雷达站，当时希望有一个在探测范围和效能上都得到大大改进的飞机定位与控制系统。但实际并非如此，演习却暴露了一个严重的新问题。从这些增设的雷达站接收到的附加的而且往往相互矛盾的信息需要进行协调和相关。因此，提出了一个开展对雷达系统运用方面的研究。当时提出了一个叫童帽山的模拟计划，实际对雷达的使用进行模拟试验。当时的科学家称之为 *Operation Research*。我们将它译为运筹学。

二、我国古代的运筹学思想

我国古代早就有朴素的运筹学思想了。如春秋孙子兵法13篇就是一部有名的运筹学书。又如战国时期的“孙臆斗马术”这个故事。这是描述我国历史上齐王与田忌赛马的故事。故事的大意是：有一天齐王要田忌和他赛马，规定各人从自己的上马、中马、下马中各选一匹马来比赛，并且说好输一匹马就得付出千金，每胜一匹马可获千金。齐王的上、中、下三匹马比田忌的上、中、下三匹马要强。前二次比赛，田忌的上、中、下三匹马分别对齐王的上、中、下三匹马。结果田忌均以零比3输掉。当时田忌的谋士孙臆一直在场观赛，就给田忌出了个主意，叫田忌用下马对齐王的上马、中马对齐王的下马，上马对齐王的中马，比赛的结果田忌以2比1胜了齐王，只有下马对上马一局输掉。

三、运筹学近况

运筹学是应用数学的一个分支，对这门新科学可作如下叙述：

(1) 运筹学是人们在各个领域(工业、农业、商业、运输以及军事技术、作战艺术)内用来寻找最优决策的一门应用学科。

(2) 一般说，运筹学能为选取某种决策提供数量依据能帮助人们选择决策。

(3) 当评定某种效果(经济效果、战斗效果等)时，在运筹学里使用了各种不同的数量指标，并按这些指标来选择最优决策。这个最优，可能是指经济效果最优，系统平衡最优，人力安排最优，设备安排最优，资源利用最优……，总之，将可利用的人力、物力、资金等资源如何合理利用，使其目标达到最优。

运筹学是现代管理中很重要的一门学科，它是系统工程学重要的理论基础，随着计算机科学的迅速发展，它的应用领域不断扩大，应用的深度也更为突出。

近年来，许多国家在运筹学方面出版和发表了大量书籍、论文，召开了学术讨论会，并且建立了有关的专门组织机构。

1952年美国成立了运筹学会，1953年美国成立了管理学会。现在美国大学里有运筹系，政府机构、企业部门有运筹组。

1961年德国成立了工业设备企业公司，这个公司是专门搞运筹学和系统工程的。国外其他一些国家也有相应的运筹学组织。国际上有运筹学联合学会。

由此可见，国外对运筹学是十分重视的，我国1956年由钱学森教授提出的，在北京数学研究所里设有运筹组，在一些大学里设立了运筹学教研室。

§2 运筹学包括的主要分支

一、排队论：

排队论是研究拥挤排队现象的一门科学。排队论最初是由电话事业的需要，而后由于物理学、公用服务机构(商店、售票处、飞机场等)的合理组织以及机床的维修和使用等方面的需要而产生的。在我们日常生活中，排队现象几乎是处处都有，随时都可以碰到。如上下班坐汽车，到商店里去买东西，去医院看病等等都免不了排队，这是有形的排队。还有无形的排队，如几个人同时通过电话总机向外打电话，这就需要排队等候，或者同时向一个地方打电话，这样就形成了一个无形的排队。另外，排队现象不一定是人，物也有排队现象，比如生产线上的原料(半成品)等待加工，机器出了故障等待工人去修理，战斗机返航降落因跑道不空，需要在空中盘旋等待降落，水库的水如何调节得好，既使水库的水位保持在理想安全水平，起到防洪作用，又能保证发电，运输和灌溉。

排队论有一些基本术语，上面列举的人，待加工的原材料，出故障等待修理的机器，返航的飞机，水库里的水等等都称之为顾客。另外，汽车、商店、医院，机场跑道等等都称之为服务机构。

从顾客观点立场欲望出发，希望多设置些服务机构，这样可以减少排队时间，显然，服务机构愈多顾客就愈方便。另一方面，服务机构愈多，则人力、物力和开支也愈大，显然也是不经济的。究竟服务机构设置多少，又如何合理设置，既不要造成不必要的浪费，又能减少

排队现象，缩短排队时间呢？这个问题，就是排队论研究的主要课题。排队论主要研究是顾客的输入规律。排队的时间（又称队长）和服务机构数量这三者的关系。也就是如何使这三者关系最佳的协调起来。使顾客的等待与服务机构的数量（或服务速率）之间的合理平衡。

排队论的理论可以用来解决，电话局、水库、港口码头、飞机跑道等的设计问题。排队论的理论在军事上也大有用途，它可以解决如下一些问题、

〈1〉对保卫各种不同设施的防空系统效率进行估计，以便对防空射击武器和空中侦察的可靠程度提出相应的要求；

〈2〉研究反坦克武器的射击效率及各种类型的控制指挥系统的通过能力与质量；

〈3〉以最优的方式组织对武器装备的维修及安排后勤系统的军事供应；

〈4〉预测疏散点，医院和消毒区等机构的工作紧张程度。

从上面一些例子可以看出，可以用排队论方法来解决的实际问题的范围是相当广泛的。具体理论与方法请看有关专著。

二、对策论（博弈论）

对策论是描述和研究斗争态势的抽象模型并给斗争各方提供对策方法的一门数学理论。这种理论应用，小而甚至下棋打扑克。大而甚至军事斗争。下棋的人采取怎样的着法，打牌的人应该出那一张牌，这是明显的对策问题，并具有斗争性的至少带有竞赛性质。在竞赛或斗争中，人们总希望自己的一方最终取得胜利或获得尽可能好的结局。但是，在竞赛和斗争中显然是有对手的。所以每一方为取胜或取得尽可能好的结局所作的努力往往会遭到对手的干扰。所以，人们想获得尽可能好的结局，必须考虑对手可能怎样决策。从而选出自己的一个好的对付策略来，这类竞赛或斗争性现象，称之为“对策现象”。

在竞赛和斗争中，双方是用心思考对付策略，还是随便选一个策略，其最后的结局会差别很大。我们在前面举的“孙臧斗马术”的故事，也就说明了这个问题。在第三局赛马中，田忌用自己的下马对齐王的上马，中马对齐王的下马，上马对齐王的中马，这一策略是田忌对齐王赛马中田忌的最优策略。

对策论也可用于人与自然界作斗争，比如有某类作物的几种品种，收获量高的品种不一定抗旱能力强，而抗旱能力强的品种不一定收获量高，在气候条件不能准确预知时，是选用单一品种呢？还是按某种比例搭配几种品种呢？这就是人与自然界的一个对策问题。

在军事上对策论用途也相当广泛，在第二次世界大战期间，在军事上，提出了许多对策问题，象兵力如何部署，物资如何调运，飞机如何侦察潜水艇活动等等。

我们知道，在潜水艇战中，搜索特别重要，潜艇必须先发现敌方船只，然后才能发射它的鱼雷，而反潜艇飞机必须先发现敌人潜艇，才能进行攻击，或者指挥自己的船队避开潜艇。潜艇应采取怎样的航线，才能既不容易被对方飞机发现，又容易发现对方船只。而飞机又应该采取怎样的航线，最容易发现敌方潜艇，这样飞机与潜艇就有个各自采取怎样的航线的对策问题。

在运筹学大大发展之后，对策论的思想进一步用来研究水雷与军舰，歼击机与轰炸机之间的作战追踪等问题，从而微分对策的理论被提出，并得到了发展，尤其得到数学家与控制论专家的重视，近十年微分对策的理论研究在蓬勃开展。

在对策论中有三个最基本的要素，构成一个对策模型需要这三个基本要素：即局中人、

策略和赢得函数。我们通过一个简单的游戏例子来说明这三要素。

例设有甲乙两个游戏者。甲、乙每人都有若干根火柴，甲人用右手或左手握一根火柴，让乙人猜火柴究竟在哪只手中，如果猜中了，这根火柴就给乙人。如果未猜中，乙人就要付给甲人一根火柴。这样猜一次就算游戏一回，这两人的目的都要使自己的火柴增多。

(1) 局中人

他们为了自己在一局游戏的对策中，力争好的结局，也就是使自己的火柴增多，他们必须制定对付对方的行动方案，我们把这样有决策权的参加者称为局中人。也就是参加火柴游戏的甲乙两人。而那些在一局对策中既不用决策而结局又与他们无关的人，不能称局中人。如游戏中的公证人。显然，前面提到的齐王与田忌的赛马的竞赛中，局中人就是齐王与田忌。参加比赛的马和谋士孙臧不算局中人。另外，我们称只有两个局中人的对策现象为“两人对策”；如象棋。而多于两个局中人的对策称为“多人对策”。此外，还有“结盟对策”与“不结盟对策”等等。

(2) 策略

在一局游戏对策中，甲乙两个局中人都有供他们的选择的实际可行的完整的行动方案。比如甲人可选择把火柴握在右手或把火柴握在左手让乙人猜，显然甲人有两个策略可供选择，也就是有两个可行动的方案。然而，乙人可猜火柴在右手或猜火柴在左手，显然，乙人也有两个策略可供选择，也就是也有两个行动的方案。我们把一个局中人的一个可行的自始至终通盘筹划的行动方案，称为这个局中人的一个策略。其实，策略就是计划中的行动方案。把局中人的策略全体，称做这个局中人的策略集。显然，策略至少有两个；也可有无限个。如果在一个对策中，各个局中人都总共只有有限个策略，我们称之为“有限对策”。否则称之为“无限对策”。

(3) 赢得函数

在一局游戏中，甲乙两人每采取一个策略，不外乎胜利或失败，也就是双方都得到一定数量的报酬（或是物质的收入支出等）例如乙人猜中了，这样乙人就从甲人那里得到一根火柴。如果乙人猜不中，就得付一根火柴给甲人。这个从对方得到一定数量的赢得（可能是负的）。一局对策结束时，每个局中人的赢得（或负的）是全体局中人所取定的一组策略的函数，我们称之为“赢得函数”。

三、搜索论

搜索论就是用来搜索一样东西，是从军事上搜索潜艇开始的。例如：一九四二年所谓北大西洋潜艇战略，就是搜索论成功的一个例子。它的概况是这样：一九四〇年冬天，珍珠港事件爆发后，美国就正式对德国宣战。英美是盟国，当时英国很困难，并距德国很近，是个桥头堡，为了支援英国，美国需要把大量的军用物资，民用物资运输到英国去。当时美国的空运能力较差，只能靠海上运输。美国的所有船只几乎都参加这一运输了。另一方面，德国用潜水艇封锁海上运输，并在四一年、四二年的两年中，德国的潜水艇几乎把美国的运输船队搞掉了一半。鉴于当时这种情况，美国当时很着急，再继续这样下去，美国快没有船参加运输了。怎样对付这个问题呢？那时，美国政府召集了美国所有的人来想办法，出主意。有人建议说：数学可以帮这个忙。

因为潜艇从哪里出来？何时出来？谁也料不到，都是出其不意的出来了，对商船进行袭击。虽然潜艇出其不意出来是个随机的，但这里就有个数学问题，如何从潜艇过去出没的情况里，找出潜艇出没的规律，这个规律用数学方法可以找到，以后就发展了搜索论。根据搜索理论一九四二年的北大西洋潜艇战略美国取胜了。

搜索论现在用来合理地搜索人力、物力、资源。例如探矿就用到搜索论。我国究竟哪些地方有石油？当然可以多化些人力、物力进行全面去找，这是一种办法。这显然需要花费大量的人力、物力、资金。这不是一种好办法。可以根据搜索论理论合理地应用最少的人力、最少的物力，在最短的时间里去发现石油资源。

四、存贮论

存贮论是研究物资管理，采购设备资源的一套数学理论。从大的方面讲：我们国家根据目前情况究竟需要多少吨粮食库存才能应付灾荒和偶然事件的发生。又如，我们国家究竟需要多少吨铜的原材料的存贮，才能应付战争突然爆发后所需要的铜原材料。显然粮食和原材料铜没有存贮是不行的，但存贮太多也是不行的。没有库存不能应付事件发生后的需要。库存太多，将积压原材料，积压粮食，因而积压了资金。究竟库存多少最好呢？这就是存贮论所要研究的内容。

从小的方面讲：一个工厂，一个企业库存完全没有当然不行，但库存太多，积压了原材料，积压了资金也不行。因此，要根据生产活动（销售活动）的连续性，决定最佳存贮量。最佳存贮量对生产活动是十分重要的。既要保证不要因存贮量太少，造成生产停顿（停工待料）。又要使存贮量不要过大，以致造成不必要的积压浪费。因此，存贮量究竟多少最佳，必须根据实际情况进行科学计算。

存贮论主要研究内容简单地可以这样表示：

供应（采购） $\xrightarrow{\text{输入}}$ 仓库（储存） $\xrightarrow{\text{输出}}$ 需要（销售）也就是研究供应—储存—需要这三者的最佳协调关系。

五、线性规划

线性规划是数学规划里很重要的一个分支。数学规划包括线性规划、非线性规划，整数规划和动态规划。其中线性规划用途相当广泛，而且各种算法也较成熟。它总的研究内容可归纳为如下二方面：

- （1）给出一定量的人力、物力、资金资源，如何合理利用这些资源完成最大任务；
- （2）给定一项任务，如何统筹安排，利用最少的资源来完成它，具体可以解决如下一些最优化问题：

- 1) 物资运输最优调配问题；
- 2) 原材料的合理下料问题；
- 3) 加工另件的顺序安排问题；
- 4) 机床负荷的安排问题；
- 5) 场（厂）址设置问题；
- 6) 资源的合理利用问题；

- 7) 生产任务的分配问题;
- 8) 工作安排问题;
- 9) 作物布局问题;
- 10) 国民计划综合平衡问题;
- 11)

六、组合网络

七、控制论

八、马尔柯夫过程

九、.....

第二章 线性规划中的数学知识

这一章主要介绍在线性规划中用到的一些数学概念，掌握这些基本概念，对了解线性规划的原理和求解是有益处的。

§1 矩阵的概念

一矩阵的定义：

矩阵可定义为：有 $m \times n$ 个数 a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 排成 m 行 n 列的表。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

叫做 $m \times n$ 矩阵，或者简单地叫矩阵。并有时简记为 (a_{ij}) 。 a_{ij} 中的第一个下标表示行数，第二个下标表示列数，则 a_{ij} 叫做 A 中第 i 行第 j 列的数或元。矩阵相等的意思是它们相对应元素相等。

当只有一行或一列的矩阵，我们称做向量。

由 $m \times n$ 矩阵中某行的 n 个元组成的 n 维向量叫做 A 的行向量，由 A 中某列的 m 个元组成的 m 维向量叫做 A 的列向量。因此，矩阵 A 有 m 个行向量， n 个列向量。

一般行向量横写，列向量竖写。

A 的第 i 个行向量写成：

$$(a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in})$$

A 的第 j 个列向量写成：

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

二、平方矩阵

矩阵 A 中的行数 m ，列数 n 不必相等。如果矩阵 A 中的行数 m 与列数 n 相等即 $m = n$ 时，我们称 $n \times n$ 矩阵，亦称 n 阶矩阵。

三、对角矩阵

主对角线上的元素为 a_{ii} , ($i = 1, 2, \dots, n$)。其他位置上的元素全为 0 的 n 阶矩阵, 并写为:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

四、单位矩阵 (或恒等矩阵)

主对角线上的元素为单位 1, 其他位置的元素为 0 的平方矩阵叫单位 (或者恒等) 矩阵。

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \diagdown \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots 1 \end{pmatrix}$$

单位矩阵是由对于所有的某阶方阵 A 由关系式 $EA = AE = A$ 所给定。这就是说 E 在 n 阶矩阵乘法运算中的作用与数 1 在数的乘法中的作用类似。因此我们称 E 为 n 阶单位矩阵, 或简称单位矩阵。

五、矩阵的转置

一个 $m \times n$ 矩阵 A 的行和列互换, 就导致一个 $n \times m$ 的矩阵 A^T 称 A 的转置。

如果 A 是给出为:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

那么, A^T 给出为:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

显然有

$$(A^T)^T = A$$

§ 2 矩阵的运算法则

一、矩阵的和

两个 $m \times n$ 矩阵 A, B 的和是一矩阵, 它的每一元是 A, B 两矩阵相应元的和。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

即

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

二、矩阵的差

两个 $m \times n$ 矩阵 A, B 的差是一矩阵, 它的每一元是 A, B 两矩阵相应元的差。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

即

$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \cdots & a_{2n} - b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \cdots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵的和差仅对 A, B 的行列数 m, n 相等时才能定义。

三、矩阵与纯量的积

一矩阵 A 同纯量 K 的积是一矩阵, 其中每一元乘以纯量 K , 即

$$KA = AK = \begin{pmatrix} Ka_{11} & Ka_{12} & \cdots & Ka_{1n} \\ Ka_{21} & Ka_{22} & \cdots & Ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Ka_{m1} & Ka_{m2} & \cdots & Ka_{mn} \end{pmatrix}$$

四、矩阵与矩阵的积

一个矩阵乘另一个矩阵的积, 在二矩阵中的第一个矩阵的列数等第二个矩阵的行数时是可能的, 在相反的情况下, 乘积则不能定义。

A, B 两矩阵的积 AB 是一矩阵, 它是这样定义的。它的第 i 行, 第 j 列上的元素是 A 的第 i 行上各元素分别与 B 的第 j 列上各对应元素的乘积的和。

如:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, B = (b_1 \ b_2 \cdots b_n)$$

即

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \cdot (b_1 \ b_2 \cdots b_n) = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 \cdots a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 \cdots a_2 b_n \\ \vdots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 \cdots a_n b_n \end{bmatrix}$$

$$BA = (b_1 \ b_2 \cdots b_n) \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = (b_1 a_1 + b_2 a_2 + \cdots + b_n a_n)$$

如:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

即

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} b_1 + \cdots + a_{1n} b_n \\ a_{21} b_1 + \cdots + a_{2n} b_n \\ \vdots \\ a_{m1} b_1 + \cdots + a_{mn} b_n \end{bmatrix}$$

如

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{bmatrix}, B = (b_1 \ b_2 \cdots b_m)$$

即

$$BA = (b_1 \ b_2 \cdots b_m) \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{bmatrix} \\ = (b_1 a_{11} + \cdots + b_m a_{m1} \cdots b_1 a_{1n} + \cdots + b_m a_{mn})$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

一般两个矩阵 A, B 的乘积用式子表示是:

定义两个矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1L} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2L} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mL} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{L1} & b_{L2} & \cdots & b_{Ln} \end{bmatrix}$$

的积乘

$$AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

其中: $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{iL}b_{Lj} = \sum_{t=1}^L a_{it}b_{tj}$

$$i \begin{bmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{iL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{Lj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{ij} \end{bmatrix} i$$

两个矩阵的乘积的行数, 列数间的关系是

$$(m, l) \cdot (l, n) = (m, n)$$

用图式表示就是

$$\begin{array}{|c|} \hline l \\ \hline m \end{array} \begin{array}{|c|} \hline n \\ \hline l \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline n \\ \hline m \end{array}$$

五、矩阵的初等变换

矩阵的初等变换非常重要, 应用也十分广泛, 应用它可以用来简化矩阵的计算。一般对一个矩阵除可以进行行的初等变换外, 同时还可以进行列的初等变换, 我们把行初等变换及列初等变换统称为矩阵的初等变换。

矩阵的初等变换是指:

- (1) 互换矩阵 A 的两行或两列;
- (2) 用一个不为零的数乘 A 的一行或一列;
- (3) 用一个数乘一行加到另一行上或乘一列加到另一列上。

矩阵行(列)初等变换的一个重要性质:

假如矩阵 A 经过若干个行, 列初等变换, 变换为矩阵 B , 那么矩阵 A, B 的秩相等, 也就是说 A 与 B 等价(同解的意思) 用 $A \cong B$ 表示。

六、矩阵的秩

矩阵秩的定义: 矩阵 A 中不为零的子式的最高阶数如果是 r , 那么我们就说 A 的秩是 r 。
 n 阶矩阵如果它的秩是 n , 叫做满秩矩阵, 否则就叫做降秩矩阵。

矩阵 A 中的子式, 是指在 $m \times n$ 矩阵中取某 k 个行, k 个列 ($k \leq m, n$), 由这些行、列相交处的元构成的 k 阶行列式, 叫做 A 的 k 阶子式。特别 n 阶矩阵只有一个 n 阶子式, 这

子式我们又常常叫做矩阵的行列式。矩阵 A 的行列式用 $|A|$ 表示。

例如矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 10 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

在矩阵 A 中，1 阶子式是其中一个元构成的，因此共有 12 个 1 阶子式。

矩阵 A 中，2 阶子式是由其中四个元构成的，共有 18 个 2 阶子式

$$\begin{array}{cccccc} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{array}$$

我们任取一个 2 阶子式 D_2

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4 \neq 0$$

矩阵 A 中，3 阶子式是由其中九个元构成的共有 4 个 3 阶子式。

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 10 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \\ 10 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

但包含 2 阶子式 D_2 的只有二个。

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 10 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

所以矩阵 A 的秩是 2。

七、线性方程组的矩阵表示形式

设：含有 n 个未知量 m 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

它的矩阵形式为

$$A \cdot X = C$$

式中：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

A 叫做线性方程组的系数矩阵。

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & c_m \end{bmatrix}$$

B 叫做线性方程组的增广矩阵。

根据矩阵的乘法原则，因为：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

§ 3 凸 集

凸集的定义：在集合内任给二点 A 、 B ，任意将 AB 连成线，线上任一点是所考虑集合里的点。则称这集合为凸集。

我们可以用数学方法把 AB 连线表示出来。

假设二维空间的点集为 R 若 $\theta A, B$ 两点 $\in R$ ，则 A, B 连线上的点 P 可以这样表示：
 $P = \alpha A + (1 - \alpha)B \in R \quad (0 \leq \alpha \leq 1)$

我们可以通过图3—1证明这条原理。

我们在直角坐标平面上任意给二点 A, B ，并连接 AB ，在 AB 上任取一点 P 。我们

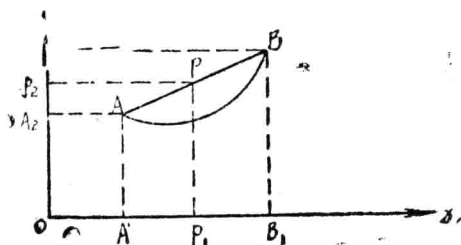


图 3—1

再通过 A, B, P 三点分别向 x 坐标和 y 坐标作垂线，如图3—1所示。

这样我们可以根据三线的平行性质，推算出如下的比例关系。

$A_1P_1 : P_1B_1 = AP : PB$ 其中： $A_1P_1 = x - x_1$ ， $P_1B_1 = x_2 - x$
 所以： $A_1P_1 : P_1B_1 = (x - x_1) : (x_2 - x) = \lambda \quad (\lambda \text{ 是从 } 0 \sim \infty)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda \quad \text{得到: } x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

再经过变化得： $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \quad (0 \leq \alpha \leq 1)$

上式中： x_1, x_2 就是图3—1中的 A, B 两点， x 就是 AB 连线上的点。

在凸集 R 中满足下列条件的点称为极点, 凸集中不存在两个不同点 x_1, x_2 , 使 x 成为 x_1x_2 线段的内点, 即不存在 $0 \leq \alpha \leq 1$ 使 $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$ 成立。如图3-2是一个凸集。图上 $A B C D E$ 通常称为顶点(或极点)。

这些点有这样的性质, 它们上的任何一个点都不能成为凸集中任何一个线段的内点, 凸集中这些特殊点称之为极点。

另外, 我们根据向量的有关性质, 引述一个凸集 R 之点 x 为极点的充分必要条件是: x 的非零坐标 $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k} (k \leq n)$ 所对应的列向量 $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$ 是线性独立的(线性无关)。一组线性独立的列向量的极点(如果有的话), 被约束条件唯一地决定。而列向量共有 n 个, 其中线性独立的列向量是有限的。(换句话说, 凸集 R 中极点的个数是有限的。一个极点对应着一组线性独立的列向量)。如果 R 不是空集的话, 则 R 至少有一个极点, 如果目标函数有最小值的话, 一定可以由一个极点达到。

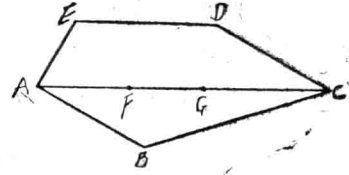


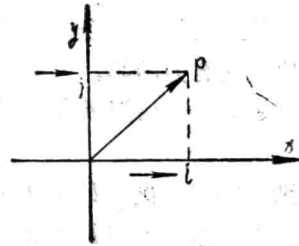
图 3-2

§4 n维向量

一、二维向量

我们先举一个例子。

若 $\overrightarrow{OP} = x_i \overrightarrow{e_i} + y_j \overrightarrow{e_j}$ 则 $\overrightarrow{OP}$ 就叫向量。也就是每二个有序的数就确定了一个二维向量。式中 x, y 是在二个 (x, y) 坐标轴上的分量。



二、三维向量

就是任何三个有序的数 (x, y, z) 在三维空间里, 可以确定一个三维向量。三维向量可以表示为: $\overrightarrow{OP} = x_i \overrightarrow{e_i} + y_j \overrightarrow{e_j} + z_k \overrightarrow{e_k}$ 式中 x, y, z 是 $\overrightarrow{OP}$ 向量在三个 (x, y, z) 坐标轴上的三个分量。

三、n维向量

n 维向量的定义: 有 n 个数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 按一定顺序排成 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 叫做 n 维向量, $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 叫做向量在坐标轴上的第 i 个分量, 全体 n 维向量就叫 n 维向量空间。

§5 向量的线性相关, 线性无关

一、线性相关

若在 n 维空间里有一组向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 有 n 个不全零的数 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0 \dots\dots (1)$ 则向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 称为线性相关的向量组。