高等院校应用型特色教材

大学数学（微积分）学习辅导

韩建玲 曾健民 主编

陈特清 廖晓花 孙德红 石莲英 副主编

清华大学出版社

大学数学
（微积分）
学习辅导

韩建玲　曾健民　主编
陈特清　廖晓花　孙德红　石莲英　副主编

清华大学出版社

内 容 简 介

本书为《大学数学(微积分)》的配套学习辅导书,内容共分8章,包括函数、极限与连续,一元函数微分学,一元函数积分学,微分方程、空间解析几何与向量代数,多元函数微分学及其应用,多元函数积分学,无穷级数.本书每章有基本要求、内容提要、学习要点、例题增补、教材部分习题解题参考、总习题及其答案.本书的目的是帮助读者理解、消化和复习《大学数学(微积分)》的内容,编写中注重培养学生良好的科学思维习惯及实际应用能力.

本书适用于应用型高等院校理工类和经济类各专业的公共数学课教学,也可供高等数学授课教师作为教参使用.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学(微积分)学习辅导/韩建玲,曾健民主编. --北京:清华大学出版社,2014
ISBN 978-7-302-36914-1

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①韩… ②曾… Ⅲ. ①微积分-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第131367号

责任编辑:孟毅新
封面设计:傅瑞学
责任校对:刘 静
责任印制:宋 林

出版发行:清华大学出版社
网 址:http://www.tup.com.cn,http://www.wqbook.com
地 址:北京清华大学学研大厦A座 邮 编:100084
社 总 机:010-62770175 邮 购:010-62786544
投稿与读者服务:010-62776969,c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈:010-62772015,zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者:三河市金元印装有限公司
经 销:全国新华书店
开 本:185mm×260mm 印 张:9.75 字 数:218千字
版 次:2014年8月第1版 印 次:2014年8月第1次印刷
印 数:1~3000
定 价:24.00元

产品编号:059858-01

前言

FOREWORD

《大学数学(微积分)》一书是由清华大学出版社出版的应用型高校教材，体现了数学教学应遵循的"以应用为目的，以必需、够用为度"的原则，强化数学的应用功能. 为帮助读者理解、消化和复习《大学数学(微积分)》的内容，我们编写了《大学数学(微积分)学习辅导》，注重培养学生良好的科学思维习惯及实际应用能力.

本书作为《大学数学(微积分)》的配套教材，以应用、实用和适用为基本原则，以淡化理论并突出实践为指导思想. 在编写中结合应用型本科和高职高专的教学特点，对比较烦琐的定理、公式的推导及证明尽可能只给出结果或简单直观地给出几何说明，而解题的过程尽可能做到深入浅出，力求具有一定的启发性和应用性.

本书在编写过程中，参考了大量的同类图书，特别是参考了一些典型例题和习题，它们是各位老师的教学经验积累，对本书中例题和习题的编写起到了很大的帮助作用，特此说明并致谢. 本书中有的章节有加"*"的内容，属于附加内容，供有此需求的专业选用.

本书由闽南理工学院具有多年教学和实际工作经验的教师集体编写，由曾健民总体策划并书写前言，由韩建玲和曾健民统稿. 本书第1、7章由陈特清编写，第2、4、8章由廖晓花编写，第3、5章由石莲英编写. 本书在编写过程中，得到了刘德凤、邱秀环、梁晓彬、钟艳林、王素娟、程书红、王昌忠、高小明、徐金平、郝俊灵、韩俊峰、师晶、温焕明、王洁丹、蔡小红、林美丽等老师的协助，在此表示衷心的感谢!

由于我们水平有限，书中难免有不足之处，敬请有关专家、学者及使用本书的老师和同学批评指正，以帮助我们不断改进.

编　者

2014年6月

目录

CONTENTS

第1章

函数、极限与连续

1.1 基本要求

（1）理解分段函数、初等函数等概念；

（2）熟练掌握极限的计算方法；

（3）理解连续函数的概念和性质；

（4）了解常用的经济函数.

1.2 内容提要

1. 函数

（1）集合初步：①集合的概念；②集合的运算；③区间和邻域.

（2）函数的概念：①常量与变量；②函数的定义；③函数的表示法（表格法、图像法及解析法）.

（3）函数的几种特性：①函数的奇偶性；②函数的单调性；③函数的有界性；④函数的周期性.

（4）反函数和复合函数.

（5）初等函数：①基本初等函数（常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数）；②初等函数（由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的复合运算，并且能用一个解析式表示的函数）.

2. 极限的概念

（1）数列的极限

① 数列的概念.

② 数列的极限：对于数列$\{x_n\}$，如果当n无限变大时，x_n趋于一个确定的常数A，则

称当 n 趋于无穷大时，数列 $\{x_n\}$ 以 A 为极限，也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 或 $x_n\to A(n\to\infty)$. 如果数列 $\{x_n\}$ 没有极限，就称数列 $\{x_n\}$ 发散.

(2) 函数的极限

① $x\to\infty$ 时函数的极限(含 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 两种情形)

如果当 $|x|$ 无限增大时，函数 $f(x)$ 无限地趋于一个确定的常数 A，则称当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 以 A 为极限，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$.

注 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

② $x\to x_0$ 时函数的极限(含 $x\to x_0^+$ 和 $x\to x_0^-$ 两种情形)

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域(点 x_0 可以除外)内有定义，如果当 x 趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 趋于一个常数 A，则称当 x 趋于 x_0 时，$f(x)$ 以 A 为极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$.

注 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

3. 无穷小量与无穷大量

(1) 无穷小量：若函数 $y=f(x)$ 在自变量 x 的某个变化过程中以零为极限，则称在该变化过程中，$f(x)$ 为无穷小量(简称无穷小).

(2) 无穷小的性质：有限个无穷小量的和、差、积仍为无穷小量；有界变量与无穷小量的乘积仍为无穷小量.

(3) 无穷大量：在自变量 x 的某个变化过程中，若相应的函数值的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大，则称在该变化过程中，$f(x)$ 为无穷大量(简称无穷大)，记作 $\lim f(x)=\infty$(包含正无穷大 $+\infty$ 和负无穷大 $-\infty$ 两种情形).

(4) 无穷小量与无穷大量的关系：在自变量的变化过程中，无穷大量的倒数是无穷小量，恒不为零的无穷小量的倒数为无穷大量.

(5) 无穷小的阶：设 α,β 是同一变化过程中的两个无穷小量，

① 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小量，记作 $\beta=o(\alpha)$，也称 α 是比 β 低阶的无穷小量.

② 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq0$，则称 β 与 α 是同阶无穷小量；特别地，当 $c=1$，即 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$ 时，称 β 与 α 是等价无穷小量，记作 $\alpha\sim\beta$.

注 (等价无穷小量替换定理) 在同一变化过程中，如果 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

4. 极限的性质与运算法则

(1) 极限的性质(唯一性、有界性、保号性).

(2) 极限的四则运算法则：在自变量的同一变化过程中，设 $\lim f(x)$ 及 $\lim g(x)$ 都存在，则

① $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$

② $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$

③ $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}(\lim g(x)\neq 0)$

注 在使用极限的四则运算法则时要求每个参与极限运算的函数的极限必须存在，并且作为分母的函数的极限不能为零.

5. 极限存在准则及两个重要极限

(1) 极限存在准则(夹逼准则、单调有界数列必有极限).

(2) 两个重要极限：

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ ② $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

6. 函数的连续性

(1) 函数的连续性(两种等价定义).

① 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果自变量的增量 Δx 趋于零时，对应的函数增量 Δy 也趋于零，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ 或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

② 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

(2) 初等函数的连续性：初等函数在定义区间内都是连续的.

(3) 函数的间断点(可去、跳跃、无穷、振荡间断点等分类).

(4) 闭区间上连续函数的性质(最值定理、介值定理、零点定理).

*7. 常用经济函数

(1) 需求函数与供给函数.

(2) 总成本函数、收益函数及利润函数.

1.3 学习要点

本章的重点是极限的计算. 首先要理解分段函数的概念，熟练掌握 6 类基本初等函数的性质与图形，理解初等函数的概念；其次要理解数列极限和函数极限的定义，能够结合图形讨论函数的极限，掌握借助左、右极限讨论分段函数的极限的方法；再次要理解无穷小与无穷大及其性质，熟练应用无穷小和无穷大、极限的运算法则、两个重要极限、初等函数连续性等各种方法求极限；最后要理解函数连续性的概念，理解闭区间上连续函数的性质，能够利用零点定理讨论方程根的情况.

1.4　例题增补

例 1-1　讨论下列函数是否为周期函数？对于周期函数，指出其周期.

(1) $f_1(x)=\sin^2 x$　　(2) $f_2(x)=1+\sin\pi x$　　(3) $f_3(x)=x^{\cos x}$

分析　我们比较熟悉的周期函数是常数函数 $y=C$（任何正实数都是它的周期）、三角函数（$\sin x$ 和 $\cos x$ 周期为 2π，$\tan x$ 和 $\cot x$ 的周期为 π），利用它们可以讨论其他函数的周期性.

解

(1) 由于 $f_1(x+\pi)=\sin^2(x+\pi)=\sin^2 x=f_1(x)$，故 $f_1(x)$ 为周期函数，且周期 $l=\pi$.

(2) 由于 $f_2(x+2)=1+\sin\pi(x+2)=1+\sin\pi x=f_2(x)$，故 $f_2(x)$ 为周期函数，且周期 $l=2$.

(3) 幂函数 $y=x^{\cos x}$ 不是周期函数，比较容易验证.

例 1-2　设 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|=1\\ -1 & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=e^x$，求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$，并作出这两个函数的图形.

解　$f[g(x)]=f(e^x)=\begin{cases}1 & x<0\\ 0 & x=0\\ -1 & x>0\end{cases}$，　$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e & |x|<1\\ 1 & |x|=1\\ e^{-1} & |x|>1\end{cases}$

这两个函数的图形依次如图 1-1 和图 1-2 所示.

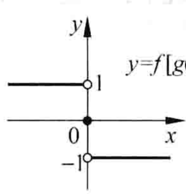

图　1-1

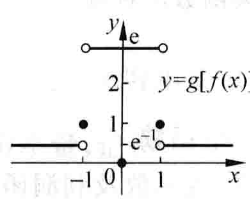

图　1-2

例 1-3　函数 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是否有界？这个函数当 $x\to+\infty$ 时是否为无穷大？

解　对任意的 $M>0$（不管有多大），总有 $x_0\in(M,+\infty)$，使得 $\cos x_0=1$，从而

$$y=x_0\cos x_0=x_0>M$$

所以 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是无界的.

对任意的 $M>0$，$X>0$（不管它们取多大或多小的正数），总有 $x_0\in(X,+\infty)$，使得 $\cos x_0=0$，从而 $y=x_0{}^{\cos x_0}=0<M$，所以 $y=x^{\cos x}$ 当 $x\to+\infty$ 时不是无穷大.

注　无界与无穷大是两个不同的概念，这里以函数 $y=f(x)$ 在 $x\to+\infty$ 的情形分析一下. 函数 $y=f(x)$ **无界**是指不管事先给定的正数 M 有多大，总可以在 x 充分大的范围

内找到**一个**点 x_0，使得 $|f(x_0)|>M$；而 $f(x)$ 为**无穷大**则是指不管事先给定的正数 M 有多大，总可以在 x 充分大的范围内找到**所有**的点 $\bar{x}$，使得 $|f(\bar{x})|>M$.

例 1-4 计算极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

解

解法 1：原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2}$

解法 2：原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2}$

解法 3：令 $t=\sqrt{x}$，则当 $x\to 1$ 时，$t\to 1$，于是

$$原式=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{t^2-1}=\lim_{t\to 1}\frac{1}{t+1}=\frac{1}{2}$$

例 1-5 求 $f(x)=\dfrac{x}{x}$，$g(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 当 $x\to 0$ 时的左、右极限，并说明它们在 $x\to 0$ 时极限是否存在。

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$，$\quad\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}1=1$

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

$$\lim_{x\to 0^+}g(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0^-}g(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}g(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ 不存在.

例 1-6 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$.

解 因为 $(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}=(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot\frac{6x}{\sin x}}=\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{\frac{6x}{\sin x}}=\mathrm{e}^{\frac{6x}{\sin x}\ln(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}$

而
$$\lim_{x\to 0}\frac{6x}{\sin x}\ln(1+2x)^{\frac{1}{2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\ln(1+2x)^{\frac{1}{2x}}=6$$

因此
$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{6x}{\sin x}\ln(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}=\mathrm{e}^6$$

一般情况下，对于形如 $u(x)^{v(x)}(u(x)>0,u(x)\neq 1)$ 的函数（通常称为幂指函数），如果 $\lim u(x)=a>0$，$\lim v(x)=b$，那么

$$\lim u(x)^{v(x)}=a^b$$

注 这里 3 个 lim 都表示同一自变量的变化过程中的极限.

例 1-7 利用极限存在准则证明 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$.

证明 因为 $\dfrac{n^2}{n^2+n\pi}\leqslant n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)\leqslant\dfrac{n^2}{n^2+\pi}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+n\pi}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+\pi}=1$，由夹逼准则知

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$$

证毕.

例 1-8 若 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b(n\geqslant 3)$，则在$(x_1,x_n)$内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

证明 因为 $f(x)$在$[a,b]$上连续，又$[x_1,x_n]\subset[a,b]$，所以 $f(x)$在$[x_1,x_n]$上连续.由最值定理得 $f(x)$在$[x_1,x_n]$上有最大值和最小值，分别设为 M 和 m，则

$$m\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\leqslant M$$

(1) 若上述不等式为严格不等式，则由介值定理知，存在 $\xi\in(x_1,x_n)$，使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

(2) 若上述不等式中出现等号，不妨设 $m=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$，则有

$$f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_n)=m$$

此时，任取 $x_2,\cdots,x_{n-1}$中的一点作为 ξ，即有 $\xi\in(x_1,x_n)$，使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

若 $M=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$，同理可证结论仍成立.

证毕.

1.5 教材部分习题解题参考

习题 1-1

1. 选择题.

(1) 下列函数 $f(x)$和 $g(x)$是相同函数的是(　　).

A. $f(x)=\lg\sqrt{x+1}, g(x)=\dfrac{1}{2}\lg(x+1)$

B. $f(x)=\dfrac{x}{x(1+x)}, g(x)=\dfrac{1}{1+x}$

C. $f(x)=\cos x, g(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$

D. $f(x)=1, g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$

分析 只有定义域与对应法则都相同的两个函数才是相同的函数.答案是 A.

(2) 下列函数在定义域内为无界函数的是(　　).

A. $y=100^{100}$　　B. $y=2+\sin x$

C. $y=|\cos x|$　　D. $f(x)=x\sin x$

分析 无界函数跟有界函数相反，它不存在上界或下界. 答案是 D.

2. 设 $A=(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$，$B=[-10,3)$，写出 $A\cup B$，$A\cap B$，$A\backslash B$ 及 $A\backslash(A\backslash B)$ 的表达式.

解　$A\cup B=(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$，$A\cap B=[-10,-5)$

$A\backslash B=(-\infty,-10)\cup(5,+\infty)$，$A\backslash(A\backslash B)=[-10,-5)$

注　做集合这一类习题，通常可以画出文氏图，有助于理解，而有关数集的问题则可以借助数轴来表示. 通过分析还可以得到 $A\backslash(A\backslash B)=A\cap B$.

3. 求下列函数的定义域.

(4) $y=\dfrac{2}{x}-\sqrt{1-x^2}$

分析　$\begin{cases}x\neq 0\\ 1-x^2\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow x\neq 0$ 且 $|x|\leqslant 1$，即定义域为 $[-1,0)\cup(0,1]$.

(5) $y=\tan(x+1)$

分析　$x+1\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$，即定义域为 $\left\{x\,|\,x\in R,x\neq\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi-1,k\in Z\right\}$.

(6) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$

分析　$\left|\dfrac{x-1}{2}\right|\leqslant 1\Rightarrow -1\leqslant x\leqslant 3$，即定义域为 $[-1,3]$.

(7) $y=\sqrt{\sin x}$

分析　$\sin x\geqslant 0$，即定义域为 $\{x\,|\,2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi,k\in Z\}$ 或写成 $\bigcup\limits_{k\in Z}[2k\pi,(2k+1)\pi]$.

(8) $y=\dfrac{1}{\sin x-\cos x}$

分析　$\sin x-\cos x\neq 0$，即定义域为 $\left\{x\,|\,x\in R,x\neq\left(k+\dfrac{1}{4}\right)\pi,k\in Z\right\}$.

(9) $y=\dfrac{\lg(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$

分析　$\begin{cases}3-x>0\\ |x|-1>0\end{cases}\Rightarrow x<-1$ 或 $1<x<3$，即定义域为 $(-\infty,-1)\cup(1,3)$.

(10) $y=\log_3(\log_2 x)$

分析　$\log_2 x>0\Rightarrow x>1$，即定义域为 $(1,+\infty)$.

注　求函数的定义域一般是先写出构成所求函数的各个简单函数的定义域，再求这些定义域的交集，即得所求定义域. 下列简单函数及其定义域是经常用到的：

① 分式函数 $y=\dfrac{Q(x)}{P(x)}$，$P(x)\neq 0$；

② 偶次根式 $y=\sqrt[2n]{x}$，$x\geqslant 0$；

③ 对数 $y=\log_a x$，$x>0$ 或 $y=\log_x a$，$x>0$ 且 $x\neq 1$；

④ 正切函数 $y=\tan x$ 或正割函数 $y=\sec x$，$x\neq\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi(k\in Z)$；

⑤ 余切函数 $y=\cot x$ 或余割函数 $y=\csc x$，$x\neq k\pi(k\in Z)$；

⑥ 反正弦函数 $y=\arcsin x$ 或反余弦函数 $y=\arccos x$，$|x|\leqslant 1$.

4. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x| & |x|<\dfrac{\pi}{3}\\ 0 & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$，求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

分析　分段函数在定义域内不同的区间上是用不同的解析式来表示的.因此求分段函数的函数值，应先找出对应的解析式，再代入求值.

解　$\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{6}\right|=\dfrac{1}{2}$，　$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{4}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

5. 讨论下列函数的奇偶性.

(4) $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$

分析　奇函数，因为

$$f(-x)=\lg\frac{1+x}{1-x}=-\lg\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$$

(6) $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$

分析　奇函数，因为

$$f(-x)=\lg(-x+\sqrt{1+x^2})=\lg\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\lg(x+\sqrt{1+x^2})$$
$$=-f(x)$$

(7) $f(x)=xe^x$

分析　因为 $f(-x)=-xe^{-x}$，$f(-x)\neq-f(x)$且 $f(-x)\neq f(x)$，所以 $f(x)$为非奇非偶函数.

(8) $f(x)=\sin|x|-\cos x+2$

分析　因为 $f(-x)=\sin|-x|-\cos(-x)+2=\sin|x|-\cos x+2=f(x)$，所以 $f(x)$为偶函数.

8. 已知 $f[\varphi(x)]=1+\cos x$，$\varphi(x)=\sin\dfrac{x}{2}$，求 $f(x)$.

解　由题意得 $f[\varphi(x)]=f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x=2-(1-\cos x)=2-2\sin^2\dfrac{x}{2}$，所以 $f(x)=2-2x^2$.

9. 设下面所考虑的函数都是定义在对称区间$(-l,l)$上的，证明：

(1) 两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

证明　(1) 设 $f_1(x)$和 $f_2(x)$均为偶函数，则

$$f_1(-x)=f_1(x),\quad f_2(-x)=f_2(x)$$

令 $F(x)=f_1(x)+f_2(x)$，于是

$$F(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)=F(x)$$

故 $F(x)$为偶函数.

设 $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$ 均为奇函数，则

$$g_1(-x)=-g_1(x),\quad g_2(-x)=-g_2(x)$$

令 $G(x)=g_1(x)+g_2(x)$，于是

$$G(-x)=g_1(-x)+g_2(-x)=-g_1(x)-g_2(x)=-G(x)$$

故 $G(x)$ 为奇函数.

(2) 设 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 均为偶函数，则

$$f_1(-x)=f_1(x),\quad f_2(-x)=f_2(x)$$

令 $F(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$，于是

$$F(-x)=f_1(-x)\cdot f_2(-x)=f_1(x)\cdot f_2(x)=F(x)$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$ 均为奇函数，则

$$g_1(-x)=-g_1(x),\quad g_2(-x)=-g_2(x)$$

令 $G(x)=g_1(x)\cdot g_2(x)$，于是

$$G(-x)=g_1(-x)\cdot g_2(-x)=[-g_1(x)]\cdot[-g_2(x)]=G(x)$$

故 $G(x)$ 为偶函数.

设 $f(x)$ 为偶函数，$g(x)$ 为奇函数，则

$$f(-x)=f(x),\quad g(-x)=-g(x)$$

令 $H(x)=f(x)\cdot g(x)$，于是

$$H(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot[-g(x)]=-H(x)$$

故 $H(x)$ 为奇函数.

证毕.

习题 1-2

2. 观察下列数列当 $n\to\infty$ 时的变化趋势，判断它们是否有极限. 有极限时指出其极限值.

(4) $x_n=1+(-1)^n$

分析　极限不存在，数列在 0 和 2 之间摆动，不趋于任何一个固定的常数.

(5) $x_n=\dfrac{6^n}{5^n}$

分析　极限不存在，数列随着 n 的增加而无限增大，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6^n}{5^n}=+\infty$.

(6) $x_n=\sqrt{n}+1$

分析　极限不存在，数列随着 n 的增加而无限增大，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}+1=+\infty$.

3. 当 $n\to\infty$ 时，数列 $\left\{\cos\dfrac{n\pi}{2}\right\}$ 是否有极限？为什么？

解　当 n 分别取 1,2,3,4,5,… 时，先写出数列的前几项：$\cos\dfrac{\pi}{2}=0$，$\cos\pi=-1$，$\cos\dfrac{3\pi}{2}=0$，$\cos2\pi=1$，$\cos\dfrac{5\pi}{2}=0$，…，数列在 0，−1，0，1 4 个数之间循环出现，不趋于任何

一个固定的常数，故极限不存在.

4. 选择题.

(1) 当 $x\to\infty$时，下列函数中有极限的是(　　).

A. $\sin x$　　B. e^{-x}　　C. $\dfrac{x+1}{x^2-1}$　　D. $\operatorname{arccot} x$

分析　当 $x\to\infty$时，选项 A 的 $\sin x$ 在区间$[-1,1]$之间摆动，不趋于任何一个固定的常数，故极限不存在；选项 B 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$得$\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}$不存在；选项 C 由$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$ 得其极限存在；选项 D 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot} x=0$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot} x=\pi$ 得$\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arccot} x$ 不存在. 因此答案是 C.

(2) 下列函数中，当 $x\to0$ 时极限存在的是(　　).

A. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & x\neq0\\ 1 & x=0\end{cases}$　　B. $f(x)=\begin{cases}\cos x+1 & x>0\\ \sin x+1 & x<0\end{cases}$

C. $f(x)=\begin{cases}3^x & x>0\\ 0 & x=0\\ -1+x^3 & x<0\end{cases}$　　D. $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & x>0\\ x+1 & x<0\end{cases}$

分析　选项 A 由 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x}=1$ 和 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$，得$\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在；选项 B 由 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(\cos x+1)=2$ 和 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(\sin x+1)=1$，得$\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在；选项 C 由 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}3^x=1$ 和 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(-1+x^3)=-1$，得$\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在；选项 D 由 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(1-x^2)=1$ 和 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x+1)=1$，得$\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$，极限存在. 因此答案是 D.

5. 讨论下列函数极限是否存在. 若存在，求其极限值；若不存在，说明理由.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$

分析　极限不存在. 当 $x\to0$ 时，$\sin\dfrac{1}{x}$在区间$[-1,1]$之间摆动，不趋于任何一个固定的常数.

(4) $\lim\limits_{x\to0}\arctan\dfrac{1}{x}$

分析　极限不存在. 由 $\lim\limits_{x\to0^+}\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$和 $\lim\limits_{x\to0^-}\arctan\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\pi}{2}$，得$\lim\limits_{x\to0}\arctan\dfrac{1}{x}$不存在.

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x<1\\ 1 & x=1\\ x-1 & x>1\end{cases}$，求当 $x\to1$ 时 $f(x)$的左、右极限，并指出当 $x\to1$ 时 $f(x)$的极限是否存在.

解 由 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x^2+1)=2$ 和 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)=0$，得$\lim\limits_{x\to1}f(x)$不存在.

注 求分段函数在分段点的左、右极限，应先找出对应的解析式，再求极限值. 当且仅当左、右极限都存在且相等时，函数在该点的极限才存在. 倘若该点不是分段点，则左邻域和右邻域的解析式相同，从而可以直接讨论极限值.

7. 设函数 $f(x)=\begin{cases}3x+2 & x\leqslant0\\ x^2+1 & 0<x\leqslant1\\ 2x^3 & x>1\end{cases}$，求极限$\lim\limits_{x\to0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to1}f(x)$.

解 由 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(3x+2)=2$ 和 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x^2+1)=1$，得$\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在.

由 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x^2+1)=2$ 和 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}2x^3=2$，得$\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$.

习题 1-3

1. 下列各式中，哪些是无穷小量？哪些是无穷大量？

(3) $y=2^{\frac{1}{x}}(x\to0^-)$

分析 因为 $\lim\limits_{x\to0^-}2^{\frac{1}{x}}=0$，所以当 $x\to0^-$ 时，$y=2^{\frac{1}{x}}$ 为无穷小量.

(5) $y=3^{-x}(x\to-\infty)$

分析 因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}3^{-x}=+\infty$，所以当 $x\to-\infty$时，$y=3^{-x}$为无穷大量.

2. 下列函数在自变量怎样的变化过程中是无穷小量，在自变量怎样的变化过程中是无穷大量？

(1) $y=2x^4$

分析 当 $x\to0$ 时，$2x^4\to0$，故其为无穷小量；当 $x\to\infty$时，$2x^4\to\infty$，故其为无穷大量.

(2) $y=10^x$

分析 当 $x\to-\infty$时，$10^x\to0$，故其为无穷小量；当 $x\to+\infty$时，$10^x\to\infty$，故其为无穷大量.

(3) $y=\ln x$

分析 当 $x\to1$ 时，$\ln x\to0$，故其为无穷小量；当 $x\to0^+$ 或 $x\to+\infty$时，$\ln x\to\infty$，故其为无穷大量.

(4) $y=\dfrac{x}{x-2}$

分析 当 $x\to0$ 时，$\dfrac{x}{x-2}\to0$，故其为无穷小量；当 $x\to2$ 时，$\dfrac{x}{x-2}\to\infty$，故其为无穷大量.

注 无穷小量与无穷大量都是一种极限，既含有结果，又含有过程，一个量在某一过程为无穷小量，在另一过程则可能为无穷大量.