南京航空航天大学

论文集

（二〇〇八年） 第35册

经济与管理学院

（第2分册）

南京航空航天大学科技部编

二〇〇九年五月

经济与管理学院

教师

73.	关叶青	副教授	091	线性缓冲算子矩阵及其应用研究	高校应用数学学报	2008.23.3	
74.	关叶青	副教授	091	基于函数 cot(x~α)变换的灰色 GM(1,1)建模方法	系统工程	2008.26.9	
75.	关叶青	副教授	091	An Approach of the Grey Modeling Based on Function $\cot(x^{\alpha})$ Transformation	WICOM 2008	2008	
76.	姜树元	讲师	095	客户需求分布的非线性统计分析模型	统计与决策	2008.4	
77.	姜树元	讲师	095	基于自然垄断现代观点的垄断性行业分类规制研究	商业研究	2008.10	
78.	宁宣熙 宁安琪	教授	091	广义哈密顿圈问题及其构造算法研究	第六届管理科学与工程论坛论文集	2008 年 1 卷	
79.	宁安琪 宁宣熙	副教授	091	四正则连环图的哈密顿图性质研究及其判定的多项式算法	中国科技论文在线精品论文	2008 年 1 卷 5 期	
80.	方志耕	教授	091	破解“蜈蚣博弈”悖论:“灰数规整”顺推归纳法研究	中国管理科学	2008/01	
81.	方志耕	教授	091	STUDY ON GREY VECTOR COMBINATION AND GREY LINEAR CORRELATION PROBLEMS	14th international congress of cybernetics and systems of WOSC		
82.	方志耕	教授	091	The Method of Solving the Minimum Variance Linear Equation Based on Grey System	2008 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics (SMC 2008)		
83.	方志耕 刘思峰	教授	091	实施“三个课堂”互补,促进管理定量方法类课程教学手段多样化	中国科教创新导刊	2008/26	
84.	方志耕 杨保华	教授	091	基于Bayes推理的灾害演化GERT网络模型研究	中国管理科学第十届年会	2008/10	
85.	方志耕 施红星	教授	091	The model of grey periodic incidence and their rehabilitation	WCICA08		
86.	方志耕 刘思峰	教授	091	Forecast of Electricity Consumption of Jiangsu Provinece By Gray Methods	FUZZ2008		
87.	米传民	讲师	092	Financial regulation under the integrated information systems based on SOA theory	Journal of Information and Decision Science	2008 年 3 卷 1 期	
88.	米传民	讲师	092	Study on the Sequence of Strengthening Buffer Operator Based on Back Cumulative-sum Method	2008 IEEE Conference on Systems, Man, and Cybernetics 学术年会	2008 年	
89.	米传民	讲师	092	Study on Case Retrieving in Case-based Reasoning Based on Grey Incidence Theory and Its Application in Bank Regulation	2008 IEEE International Conference on Fuzzy Systems 学术年会	2008	
90.	江可申 陈锐锐	正高 硕士	095	改革开放 30 年我国民航业的发展	现代经济探讨 [增刊]	2008 年	
91.	陈洪转	副教授	091	基于群决策 DEA 的高技术产业科技活动效率评价	软科学	2008.08	
92.	陈洪转	副教授	091	The Calculation of Contribution Rate of Education to the Regional Core Competence	CSSE 国际会议论文集	2008 年 12 月	
93.	陈洪转	副教授	091	基于加权灰关联的高技术产业科技活动评价	第 16 届全国灰色系统学术会议论文集	2008 年 4 月	
94.	党耀国 米传民	教授	091	Mathematical Models of the Adjustment of the Internal Structure for the Chinese First Industry	2008 IEEE International Conference on Systems,	2008	

				and Responding Measure	Man and Cybernetics (SMC 2008)		
95.	党耀国 王正新	教授	091	STUDY ON PROPERTIES IN GREY MODEL	200 8 年 14th International Congress Of Cybernetics And Systems Of WOSC	2008	
96.	党耀国 刘思峰	教授	091	灰色模型的病态问题研究	系统工程理论与实践	2008 年 28 卷 1 期	
97.	刘思峰 王锐兰	教授	091	科技人才集聚的机制、效应与对策	南京航空航天大学学报(社会科学版)	2008.10.1	
98.	刘思峰 谢乃明	教授	091	On a Sort of New Grey Incidence Models	SMC2008		
99.	刘思峰 谢乃明	教授	091	A NEW GREY EVALUATION METHOD BASED ONREFORMATIVE TRIANGULAR WHITENIZATION WEIGHT FUNCTION	WOSC		
100.	刘思峰 \Jeffrey Forrest	教授	091	EMERGENCE AND DEVELOPMENT OF GREY SYSTEMS THEORY	WOSC		
101.	杨英杰 刘思峰	教授	091	Kernels of Grey Numbers and Their Operations	WCCI 2008		
102.	刘思峰 方志耕	教授	091	A Gray Input-Onput Model based on the Standard Interval Grey Number	WCCI 2008		
103.	张力菠	讲师	091	系统动力学及其应用研究中的几个问题	南京航空航天大学学报社科版	2008 年 10 卷 3 期	
104.	张力菠	讲师	091	一种库存比例积分控制器及其系统动力学仿真	系统工程	2008 年 26 卷 8 期	
105.	陈毅然	教授	091	居室装潢系统的可靠性分析	人类工效学	2008.14.1	
106.	谢嗣胜	副高	093	就业歧视治理的比较研究	经济问题探索	2008.1	
107.	谢嗣胜	副高	093	债务融资与产品市场竞争的关系研究——基于道琼斯中国 88 指数成份股的实证分析	价格月刊	2008.5	
108.	肖龙阶	讲师	096	浅析人民币实际有效汇率变动对我国贸易收支的影响	中国集体经济	2008.03	
109.	陈永洲	讲师	092	城市公交巴士网络的随机组织演化机制研究	预测	2008 17 2	
110.	陈永洲	讲师	092	Connectivity correlations in three topological spaces of urban bus-transport networks in China	Chinese Physics B	2008 17 10	
111.	谭清美	教授	093	做大奥运的“乘数效应”	人民日报海外版	2008.1.8	
112.	彭灿 陈丽芝	教授 硕士	093	突破性创新的战略管理：框架、主题与问题	科研管理	2008（1）	
113.	彭灿	教授	093	突破性创新团队及其组建与管理研究	科学学研究	2008（4）	
114.	彭灿 胡厚宝	教授 硕士	093	知识联盟中的知识创造机制：BaS-C-SECI模型	研究与发展管理	2008（1）	
115.	徐菱涓	讲师	096	我国科技企业孵化器绩效管理与评价之特殊性研究	中国科技论坛	2008.2	
116.	徐菱涓	讲师	096	基于主成分分析法的科技企业孵化器绩效影响因素研究	科技进步与对策	2008.11	
117.	马静	副教授	092	基于领域本体的信息抽取模式生成与系统实现	情报学报	2008.27.2	
118.	郭勇陈	助实	090	高校《计算机应用基础》实验教学研究	高校教育研究	2008 年第 7 期	

119.	郭勇陈	助实	090	高校经济管理实验室信息管理系统初探	北京工商大学学报（社科版）	2008年第23卷增刊	
120.							
121.	菅利荣	教授	091	The Post Evaluation of Construction Project Based on Dominance-based Rough Set and GRA	2008 IEEE SMC		论文
122.	菅利荣	教授	091	The definition of grey degree of grey number based on rough membership function and grey rough approximation	Journal of information and decision science	2008.3.1	论文
123.	胡恩华	教授		企业集群创新行为群外环境影响因素的实证研究	研究与发展管理	2008年20卷4期	
124.	胡恩华	教授		高校科技创新型教师成长存在问题及对策研究	南京航空航天大学学报(社会科学版)	2008年10卷4期	
125.	胡恩华	教授		Study on model of long-term reward incentive to R&D force under Asymmetric information	Proceedings of the International Conference on *e*-Risk Management	2008	
126.	胡恩华	教授		Analysis on synergy innovation behavior between cluster's enterprises and external environment International	Proceedings of the Conference of Production and Operation Management		
127.	王建玲	副教授	093	饭店品牌延伸影响要素的灰色优势评估	管理评论	2008.20.2	
128.	王建玲	副教授	093	服务接触理论及其最新研究进展	企业经济	2008.1	
129.	王建玲	副教授	093	Evaluation of Customer Satisfaction in Automobile After-sales Service based on Grey Incidence Analysis	SMC 2008	2008	
130.	陈万明	教授	093	基于内部服务质量的公共部门员工满意度探究	中国行政管理	2008年4期	
131.	陈万明	教授	093	层次分析法在地方政府绩效评估中的应用	南京农业大学学报（社会科学版）	2008年8卷2期	
132.	陈万明 古胜鹏	教授 硕士	093	区域经济视角下的长三角农村人力资源开发问题研究	价格月刊	2008年7期	
133.	孙　涛	教授	094	上市公司并购投资风险的内部控制策略研究	财会研究	2008.3	
134.	孙　涛	教授	094	城郊乡镇环境绿化综合效益影响因素分析	农业经济与管理	2008.19.8	
135.	孙　涛	教授	094	城市化中环境绿化投资及环境效益度量研究	农业经济与管理	2008.19.11	
136.	孙　涛	教授	094	上市公司并购投资风险的度量及其应用研究	现代管理科学	2008.11	
137.	孙　涛	教授	094	精品课程群建设模式及优化研究	北京教育（高教）	2008.11	
138.	陈　圻 王　强	教授 博士	095	基于产品功能创新的竞争动力学模型研究	工业技术经济	2008年卷02期	
139.	陈　圻	教授	095	开创功能蓝海的战略模式研究	南京航空航天大学学报(社会科学版)	2008年01期	

注：单位代码：管理科学与工程系　091；信管系092；工商系093；会计系094；国贸系095；金融系096

高校应用数学学报
2008, 23(3): 357-362

线性缓冲算子矩阵及其应用研究

关叶青， 刘思峰

(南京航空航天大学 经济与管理学院, 江苏南京 210016)

摘　要: 在缓冲算子公理体系下, 构造了一类线性的弱化缓冲算子和强化缓冲算子, 并定义了这类缓冲算子的算子矩阵, 研究了它们的一些特性, 并以此证明了m阶算子作用的计算公式, 最后实例验证了算子的有效性与实用性.

关键词: 缓冲算子; 线性; 矩阵

中图分类号: N941.5

文献标识码: A　　**文章编号**: 1000-4424(2008)03-0357-06

§1　引　言

灰色系统理论认为任何随机过程都是在一定幅值范围和一定时区内变化的灰色量, 通过对"部分"已知信息的生成、开发, 提取有价值的信息, 挖掘系统本身固有的规律[1], 实现对系统运行行为、演化规律的正确描述和有效监控, 其特色是研究"小样本"、"贫信息"的不确定问题[2], 其中的方法体系–灰色序列生成是指通过信息覆盖选择适当的方法对原始数据进行挖掘、整理来寻求系统变化规律的技术[3], 文献[4]从改造原始序列和改变生成方式两个方面总结了适应原始数据模式的GM(1,1)预测模型的建模技术；在文献[5-6]中, 刘思峰提出了冲击扰动系统和缓冲算子的概念, 并构造了得到广泛应用的实用弱化算子; 冲击扰动项对数据序列的干扰是两方面的：既可以加快数据的发展趋势或使数据序列的振幅变大, 又可以减缓数据的发展趋势或使数据序列的振幅变小[7-9]; 文献[10-13]分别构造了一些弱化算子和强化算子, 并研究了算子关系及特性.已有研究表明探讨灰色序列生成的模式及挖掘灰序列生成的固有机理, 对了解冲击扰动系统的行为特性和利用灰序列建立灰色系统模型具有重要意义. 本文在上述工作的基础上, 通过对作者构造的缓冲算子进行整合及生成模式的分析, 提出这一大类缓冲算子的矩阵形式, 并以此研究这些缓冲算子的特性和相关计算问题, 推广已有研究的结果.

§2　基本概念

定义2.1[14]　设系统行为数据序列为$X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$,

1°　若$\forall k=2,3,\cdots,n$, 有$x(k)-x(k-1)>0$, 则称X为单调增长序列;

收稿日期: 2006-10-08

基金项目: 国家自然科学基金(70473037); 国家教育部博士点基金(20020287001); 江苏省自然科学基金重点项目(BK2003211)

2° 若$\forall k=2,3,\cdots,n$, 有$x(k)-x(k-1)<0$，则称X为单调衰减序列;

3° 若存在$k!k'\in\{2,3,\cdots,n\}$, 有$x(k)-x(k-1)>0$, $x(k')-x(k'-1)<0$, 则称X为振荡序列. 令$M=\max\{x(k)|k=1,2,\cdots,n\}$, $m=\min\{x(k)|k=1,2,\cdots,n\}$, 称$M-m$为序列$X$的振幅.

定义2.2[3] 设系统行为数据序列为$X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$, 则称

$$r(k)=\frac{x(n)-xk)}{(n-k)x(k)},k=1,2,\cdots,n-1$$

为序列X从$x(k)$到$x(n)$的平均变化率.

定义2.3[3] 设系统行为数据序列为$X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$, X经过D 作用后所得序列记为$XD=(x(1)d,x(2)d,\cdots,x(n)d)$, 则称$D$为序列算子, 称$XD$为算子作用序列.

同理可以定义多阶算子作用序列, 若m阶算子作用序列记为$XD^{(m)}$，$dd\cdots d$表示m个d, 则有$XD^{(m)}=(x(1)dd\cdots d,x(2)dd\cdots d,\cdots,x(n)dd\cdots d))$.

公理2.1（不动点公理）[5] 设X为系统行为数据序列, D为序列算子, 算子作用序列为$XD=(x(1)d,x(2)d,\cdots,x(n)d)$, 则$D$满足$x(n)d=x(n)$.

公理2.2（信息充分利用公理）[5] 系统行为数据序列X中的每一个数据$x(k),k=1,2,,\cdots,n$都应充分地参与算子作用的全过程.

公理2.3（解析化公理）[5]任意$x(k),k=1,2,,\cdots,n$都可由统一的初等解析式表示.

满足上述三公理的算子D 称为缓冲算子, $XD=(x(1)d,x(2)d,\cdots,x(n)d)$为缓冲序列.

定义2.4[3] 设X为系统行为数据序列, D为缓冲算子，当X分别为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时:

1° 若缓冲序列XD比原始序列X的增长速度(或衰减速度)减缓(即振幅减小), 称缓冲算子D 为弱化缓冲算子;

2° 若缓冲序列XD比原始序列X的增长速度(或衰减速度)加快(即振幅增大), 称缓冲算子D 为强化缓冲算子;

定理2.1[15] 设系统行为数据序列为$X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$, 缓冲序列为$XD=(x(1)d,x(2)d,\cdots,x(n)d)$, 那么

1° X为单调增长序列时, 有D为弱化缓冲算子$\Longleftrightarrow x(k)\leq x(k)d$, $k=1,2,\cdots,n$; D为强化缓冲算子$\Longleftrightarrow x(k)\geq x(k)d$, $k=1,2,\cdots,n$.

2° X为单调衰减序列时, 有D为弱化缓冲算子$\Longleftrightarrow x(k)\geq x(k)d$, $k=1,2,\cdots,n$; D为强化缓冲算子$\Longleftrightarrow x(k)\leq x(k)d$, $k=1,2,\cdots,n$.

3° X为振荡序列时，有D为弱化缓冲算子$\Longleftrightarrow\max\{x(k)\}\geq\max\{x(k)d\}$, $\min\{x(k)\}\leq\max\{x(k)d\}$,$k=1,2,\cdots,n$; D为强化缓冲算子$\Longleftrightarrow\max\{x(k)\}\leq\max\{x(k)d\}$, $\min\{x(k)\}\geq\max\{x(k)d\}$,$k=1,2,\cdots,n$.

由定理2.1知, 单调增长序列在弱化缓冲算子作用下, 数据膨胀; 在强化缓冲算子作用下, 数据萎缩; 单调衰减序列在弱化缓冲算子作用下, 数据萎缩; 在强化缓冲算子作用下, 数据膨胀.

§3 缓冲算子的构造

定理3.1 设系统行为数据序列为$X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$, 令

$$XD_{t-W}=(x(1)d_{t-W},x(2)d_{t-W},\cdots,x(n)d_{t-W}),t=0,1,\cdots,$$

其中

$$x(k)d_{t-W}=\frac{k^t x(k)+(k+1)^t x(k+1)+\cdots+n^t x(n)}{\sum\limits_{i=k}^{n} i^t},k=1,2,\cdots,n, \tag{1}$$

则不论X为单调增长、单调衰减或振荡序列, $D_{t-W}(t=0,1,2,\cdots)$皆为弱化缓冲算子.

证 容易验证, 算子$D_{t-W}(t=0,1,2,\cdots)$皆满足缓冲算子的三个公理，因而皆为缓冲算子.当X为单调增长序列时,

$$x(k)d_{t-W}-x(k)=\frac{k^t x(k)+(k+1)^t x(k+1)+\cdots+n^t x(n)-\sum\limits_{i=k}^{n} i^t x(k)}{\sum\limits_{i=k}^{n} i^t}=$$

$$\frac{(k+1)^t[x(k+1)-x(k)]+\cdots+n^t[x(n)-x(k)]}{\sum\limits_{i=k}^{n} i^t}\geq 0,$$

所以当X为单调增长序列时, $D_{t-W}(t=0,1,2,\cdots)$为弱化缓冲算子. 对于单调衰减序列或振荡序列可以类似证明.

我们称$D_{t-W}(t=0,1,2,\cdots)$为t次弱化缓冲算子($t-WBO$), $XD_{t-W}(t=0,1,2,\cdots)$为t次弱化缓冲算子作用序列. 当$t=0$时，0次弱化缓冲算子($0-WBO$)为文献[5−6]定义的平均弱化缓冲算子($AWBO$); 当$t=1$时，1次弱化缓冲算子($1-WBO$)为文献[10,11]定义的实用弱化缓冲算子和加权平均弱化缓冲算子的特例($WAWBO$).

定理3.2 设系统行为数据序列为$X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$, 令

$$XD_{t-S}=(x(1)d_{t-S},x(2)d_{t-S},\cdots,x(n)d_{t-S}),t=0,1,2,\cdots,$$

其中$x(k)d_{t-S}=\frac{x(1)+x(2)+\cdots+x(k-1)+(t+1)kx(k)}{(t+2)k-1},k=1,2,\cdots,n-1;$

$$x(n)d_{t-S}=x(n). \tag{2}$$

则当X为单调增长或单调衰减序列时, $D_{t-S}(t=0,1,2,\cdots)$皆为强化缓冲算子.

证 算子$D_{t-S}(t=0,1,2,\cdots)$皆满足缓冲算子的三个公理, $k=1,2,\cdots,n$时, 有

$$x(k)d_{t-S}-x(k)=\frac{x(1)+x(2)+\cdots+x(k-1)+(t+1)kx(k)}{(t+2)k-1}-x(k)=$$

$$\frac{(x(1)-x(k))+(x(2)-x(k))+\cdots+(x(k-1)-x(k))}{(t+2)k-1},$$

当X为单调增长序列时, $x(k)\geq x(k)d$; 当X为单调衰减序列时, $x(k)\leq x(k)d$, 所以D_{t-S} $(t=0,1,2,\cdots)$ 为强化缓冲算子.

我们称$D_{t-S}(t=0,1,2,\cdots)$为t次强化缓冲算子($t-SBO$)，$XD_{t-S}(t=0,1,2,\cdots)$为t次强化缓冲算子作用序列. 当$t=0$时，0次强化缓冲算子($0-SBO$)为文献[3]定义的一种强化缓冲算子, t次强化缓冲算子作用序列没有统一的初等解析式.

由定理3.1和定理3.2可知，t次弱化和t次强化缓冲算子作用序列均是通过系统行为数据序列$X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$的初等线性运算得到的.

§4 缓冲算子矩阵

定义4.1 设A为$n\times n$ 阶矩阵, 其每个元素为实数, $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$为$n$维行向

量, 称序列$Y=XA$为矩阵A的线性生成序列, 并称A为线性矩阵.

若$X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$为系统行为数据序列, D为序列算子, 当算子作用序列XD经线性矩阵构造时, 称D为线性序列算子. 由定义4.1可知t 次弱化缓冲算子和t 次强化缓冲算子均是线性序列算子, 分别用A_{t-W}和A_{t-S}表示t 次弱化缓冲算子矩阵和t 次强化缓冲算子矩阵, 有

$$A_{t-W}=\begin{pmatrix} \frac{1^t}{\sum\limits_{i=1}^{n} i^t} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{2^t}{\sum\limits_{i=1}^{n} i^t} & \frac{2^t}{\sum\limits_{i=2}^{n} i^t} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{k^t}{\sum\limits_{i=1}^{n} i^t} & \frac{k^t}{\sum\limits_{i=2}^{n} i^t} & \cdots & \frac{k^t}{\sum\limits_{i=k}^{n} i^t} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{(n-1)^t}{\sum\limits_{i=1}^{n} i^t} & \frac{(n-1)^t}{\sum\limits_{i=2}^{n} i^t} & \cdots & \frac{(n-1)^t}{\sum\limits_{i=k}^{n} i^t} & \cdots & \frac{(n-1)^t}{\sum\limits_{i=n-1}^{n} i^t} & 0 \\ \frac{n^t}{\sum\limits_{i=1}^{n} i^t} & \frac{n^t}{\sum\limits_{i=2}^{n} i^t} & \cdots & \frac{n^t}{\sum\limits_{i=k}^{n} i^t} & \cdots & \frac{(n-1)^t}{\sum\limits_{i=n-1}^{n} i^t} & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{t-S}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{(t+2)2-1} & \cdots & \frac{1}{(t+2)k-1} & \cdots & \frac{1}{(t+2)(n-1)-1} & 0 \\ 0 & \frac{(t+1)2-1}{(t+2)2-1} & \cdots & \frac{1}{(t+2)k-1} & \cdots & \frac{1}{(t+2)(n-1)-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{(t+1)k}{(t+2)k-1} & \cdots & \frac{1}{(t+2)(n-1)-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \frac{(t+1)(n-1)}{(t+2)(n-1)-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

t 次弱化缓冲算子矩阵A_{t-W}为下三角形可逆矩阵，t 次强化缓冲算子矩阵和A_{t-S}为上三角形可逆矩阵. 在缓冲算子的矩阵形式下, 强化缓冲算子作用序列公式统一化.

对原始数据序列施以缓冲算子, 淡化或消除冲击扰动对系统行为数据序列的影响, 往往会收到预期的效果, 现在冲击扰动系统行为数据序列的一些缓冲算子作用, 完全可以借助算子矩阵的运算来完成，对于缓冲算子的多阶缓冲作用可以有以下结论:

定理4.1 设系统行为数据序列为$X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$, m阶t次缓冲算子作用序列为$XD^{(m)}$, 即$XD^{(m)}=(x(1)dd\cdots d,x(2)dd\cdots d,\cdots,x(n)dd\cdots d))$, 则有

$$XD^{(m)}=XA_t^m, \tag{3}$$

其中A_t为t 次弱化缓冲算子矩阵或t 次强化缓冲算子矩阵.

证 $m=1$时, $XD^{(1)}=XD=XA_t$成立;

假设$m=j$时, j阶线性缓冲算子作用序列$XD^{(j)}=XA_t^j$;

当$m=j+1$时, $j+1$阶线性缓冲算子作用序列为

$$XD^{(j+1)}=(XD^{(j)})D=(XA_t^j)D=(XA_t^j)A_t=XA_t^{j+1}.$$

由数学归纳法可知对于任意正整数m 结论均成立.

§5 缓冲算子的复合

因为缓冲算子矩阵A_{t-W} 、A_{t-S} 为下、上三角形可逆矩阵, 所以不同t次缓冲算子矩阵的乘积矩阵有以下性质:

性质5.1 t 次弱化缓冲算子矩阵的乘积矩阵为下三角形可逆矩阵，且最后一列元素为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

性质5.2 t 次强化缓冲算子矩阵的乘积矩阵为上三角形可逆矩阵，且最后一列元素为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

定理5.1 若A_i、A_j为t 次弱化缓冲算子矩阵, 则A_iA_j、A_jA_i为线性弱化缓冲算子矩阵.

证 若A_i、A_j为t 次弱化缓冲算子矩阵，由性质5.1乘积矩阵A_iA_j 的最后一列元素为$(0\ 0 \ldots 0 \ldots 0\ 1)^{\mathrm{T}}$, 即复合的缓冲序列满足不动点公理, 且$A_iA_j$、$A_iA_j$为线性算子矩阵. 设系统行为数据序列为$X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$, 对于单调增长序列, 算子矩阵$A_i$、$A_j$的作用序列满足$Y_i=XA_i\geq X$、$Y_j=XA_j\geq X$, 算子A_iA_j的作用序列满足$Y=XA_iA_j=Y_iA_j\geq Y_i\geq X$. 即说明$A_iA_j$ 为线性弱化缓冲算子矩阵. 对于单调衰减序列可以类似证明, 同理可证A_jA_i也为线性弱化缓冲算子矩阵.

定理5.2 若A_i、A_j为t 次强化缓冲算子矩阵, 则A_iA_j、A_jA_i为线性强化缓冲算子矩阵.

证 按照定理5.1类似证明.

定理5.1和定理5.2可以说明, 由t次弱化或强化缓冲算子复合的乘积算子保持算子线性不变. 当缓冲算子矩阵$A_i=A_j$时, 为定理4.1中$m=2$的情况.

§6 实例

某企业生产有技术专利的产品, 其月销售额如表1所示.

表1 产品的月销售额

月	1	2	3	4	5	6	7
销售额（万元）	50.2	58.4	64.8	75.2	79.1	83.3	85.9

由表1计算该企业月销售额的增长率分别为16.33%，10.96%，16.05%，5.19%，5.31%，3.12%，前半部分增长速度相比后半部分增长过快, 用弱化缓冲算子对原始数据序列进行作用来消除原始数据序列冲击扰动因素的干扰.

下面在无缓冲作用和$t=0$次弱化算子缓冲作用两种情况, 用前6个月的销售额建立灰色GM（1，1）模型模拟7月份的销售额, 比较结果见表2. 利用t次弱化缓冲算子对原始数据进行作用后, 预测精度明显提高, 平均相对误差0.66%, 模拟$\hat{x}(7)=86.9$(万元) , 模拟值的相对误差1.2%, 更符合实际情况. 现用误差小的模型（2）预测8月份的销售额, 为$\hat{x}(8)=90.1$(万元).

表2 两种模型的模拟情况比较

模型	弱化算子	GM(1, 1)模型	平均相对误差%	$\hat{x}(7)$	模拟值相对误差%
(1)	无	$\hat{x}(k+1)=659.496e^{0.087k}-609.296$	2.51	93.0	8.3
(2)	A_{0-W}	$\hat{x}(k+1)=2027.996e^{0.035k}-1959.496$	0.66	86.9	1.2

§7 结论

文章构造了t次弱化缓冲算子和t 次强化缓冲算子, 整合了已有的一些缓冲算子; 借助线性生成模式定义了缓冲算子矩阵, 优化了的这类缓冲算子的初等解析式, 并证明出该类缓冲算子的

多阶计算公式, 公式表明同一线性缓冲算子及不同线性缓冲算子的多阶缓冲作用完全可以转化为线性算子矩阵之间的运算, 使得线性缓冲算子的多阶缓冲作用过程程序化; 最后以冲击扰动系统行为数据序列为原始数据, 说明了研究内容的有效性和实用性, 当原始数据前半部变化速度比后半部分变化过快（缓）时, 利用弱化（强化）缓冲算子作用可以消除冲击扰动因素对原始数据的干扰, 为解决定量预测结果与定性分析结论不符的问题提供了可以借鉴的方法.

参考文献:

[1] 邓聚龙. 灰理论基础[M]. 武汉：华中科技大学出版社, 2002.

[2] 刘思峰, 党耀国, 方志耕, 等. 灰色系统理论及其应用, 第2版[M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[3] 刘思峰, 党耀国, 方志耕, 等. 灰色系统理论及其应用, 第3版[M]. 北京: 科学出版社, 2004.

[4] 肖新平, 宋中民, 李峰. 灰技术基础及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2005.

[5] Liu S F. The three axioms of buffer operator and their application[J]. J Grey Sys, 1991, 3(1): 39-48.

[6] 刘思峰. 冲击扰动系统预测陷阱与缓冲算子[J]. 华中理工大学学报, 1997, 25(1): 25-27.

[7] 丁义明，范文涛. 离散系统的随机作用随机扰动[J]. 高校应用数学学报A辑, 2000, 15(3): 305-310.

[8] 张志祥. 随机扰动间断动力系统的极限性质及其应用[J]. 数学的实践与认识, 2002, 32(4): 651-657.

[9] 关新平, 何宴辉, 唐英干, 等. 随机扰动下一类混沌系统的同步[J]. 系统工程与电子技术, 2004, 26(2): 212-214.

[10] 谢乃明, 刘思峰. 一种新的实用弱化缓冲算子[J]. 中国管理科学, 2003, 10(增刊): 46-48.

[11] 党耀国, 刘思峰, 刘斌, 等. 关于弱化缓冲算子的研究[J]. 中国管理科学, 2004, 12(2): 108-111.

[12] 党耀国, 刘斌, 关叶青. 关于强化算子的研究[J]. 控制与决策, 2005, 20(12): 1332-1336.

[13] Dang Y G, Liu S F, Liu B. Study on the weakening buffer operators and their applications[A]. The Seventh International Conference on Industrial Management[C]. 2004, 690-695.

[14] 刘思峰. 缓冲算子及其应用[J]. 灰色系统理论与实践,1992, 2(1): 45-50.

[15] Liu S F, Liu Y. An Introduction to Grey Systems: Foundations, Methodology and Applications[M]. Slippery Rock: IIGSS Academic Publisher, 1998: 120-155.

Matrix of linear buffer operators and their applications

GUAN Ye-qing, Liu Si-feng

(School of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics , Nanjing 210016, China)

Abstract: Under the axiomatic system of buffer operators, some weakening buffer operators and strengthening buffer ones are established based on linear behaviors.The definition of linear buffer operator matrix is given, the characters and inherent relations of these operators are studied, and the formulas of m-step sequence worked by buffer operators are proved. An example shows their validity and practicability.

Keywords: buffer operator; linearity; matrix

MR Subject Classification: 47A06

第 26 卷第 9 期(总第 177 期) 系 统 工 程 Vol. 26, No. 9
2008 年 9 月 Systems Engineering Sept. ,2008

文章编号:1001-4098(2008)09-0089-05

基于函数 $\cot(x^{\alpha})$ 变换的灰色 GM(1,1)建模方法*

关叶青,刘思峰

(南京航空航天大学 经济与管理学院,江苏 南京 210016)

摘 要:提出了对建立 GM(1,1)模型的标准化数据进行幂函数-三角函数 $\cot(x^{\alpha})(\alpha>0)$ 变换方法,理论上证明了对原始数据序列进行这种函数变换可以有效地提高建模数据序列的光滑度,且比“对数函数”法和“幂函数”法更加有效,拓广了灰色模型的应用范围,实例验证了所建 GM(1,1)模型的精度优于“三角函数 $\cot(x)$”法所建模型,说明了该方法的有效性。

关键词:灰色模型;光滑度;函数变换;离散数据序列

中图分类号:O211 **文献标识码**:A

1 引言

灰色系统理论经过近 30 年的发展,已经在工业、农业、生态、经济或科研等各个领域获得了广泛的应用[1-5]。用模型和模型体系来描述系统是系统定量研究的有效方式,GM(1,1)模型是一个近似的差分、微分方程模型,突破了一般建模要求的数据多、得不到“微分”性质的局限。多年来,为提高 GM(1,1)模型预测的精度,人们从实践中一直在研究新的建模技术[6],由于灰色建模的光滑离散条件为:$x(k)\Big/\sum_{i=1}^{k-1}x(i)$是 k 的递减序列[7],因此作函数变换使序列满足光滑离散条件是主要的研究工作。文献[8]、文献[9]、文献[10]、文献[11]、文献[12]分别提出了利用对数函数变换、幂函数变换、对数-幂函数变换、指数函数和三角函数变换改善原始序列 $\{x^{(0)}(k),k=1,2,\cdots,n\}$ 光滑度的方法,并在实际应用中取得了较为满意的结果。

本文在前人研究的基础上,提出了基于幂函数-三角函数 $\cot(x^{\alpha})(\alpha\geqslant 1)$ 变换提高原始数据序列光滑度的方法。首先对原始数据进行标准化处理至区间 $\left(1,\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)$ 内,其目的是使得 $\cot(x^{\alpha})(\alpha\geqslant 1)$ 在此区间是递减函数,然后在理论上研究该函数变换方法在提高原始数据序列光滑度方面的性质,并将用实例检验本文提出方法的有效性。

2 提高光滑度的常用方法

定义 2.1 设 $\{x^{(0)}(k),k=1,2,\cdots,n\}$ 为非负数据序列,$\forall\,\varepsilon>0$,$\exists\,k_0$,当 $k>k_0$ 时,如果 $\dfrac{x^{(0)}(k)}{\sum_{i=1}^{k-1}x(i)}=\dfrac{x^{(0)}(k)}{x^{(1)}(k-1)}<\varepsilon$,则称 $\{x^{(0)}(k),k=1,2,\cdots,n\}$ 为光滑离散序列[13]。

定理 2.1 $\{x^{(0)}(k),k=1,2,\cdots,n\}$ 为光滑离散序列的充要条件是 $\dfrac{x^{(0)}(k)}{\sum_{i=1}^{k-1}x(i)}=\dfrac{x^{(0)}(k)}{x^{(1)}(k-1)}$ 是 k 的递减函数[13]。

定理 2.2 $\{x^{(0)}(k),k=1,2,\cdots,n\}$ 为递增序列,且 $x(1)>e$,则 $\dfrac{\ln x^{(0)}(k)}{\sum_{i=1}^{k-1}\ln x^{(0)}(i)}\leqslant\dfrac{x^{(0)}(k)}{\sum_{i=1}^{k-1}x^{(0)}(i)}$ 是 k 的递减函数[8]。

定理 2.3 $\{x^{(0)}(k),k=1,2,\cdots,n\}$ 为递增序列,且 $T\geqslant 1$,则 $\dfrac{[x^{(0)}(k)]^{\frac{1}{T}}}{\sum_{i=1}^{k-1}[x^{(0)}(i)]^{\frac{1}{T}}}\leqslant\dfrac{x^{(0)}(k)}{\sum_{i=1}^{k-1}x^{(0)}(i)}$ 是 k 的递减函数[9]。

定理 2.4 $\{x^{(0)}(k),k=1,2,\cdots,n\}$ 为递增序列,且

* **收稿日期**:2008-05-06

基金项目:国家自然科学家基金资助项目(70473037);教育部博士学科点基金资助项目(20020287001);江苏省自然科学基金资助项目(BK2003211);南京航空航天大学特聘教授和创新群体科研基金资助项目(1009-260812)

作者简介:关叶青(1968-),女,锡伯族,辽宁沈阳人,副教授,博士研究生,研究方向:灰色系统理论;刘思峰(1955-),男,河南平舆人,教授,博士生导师,研究方向:灰色系统理论,数量经济学。

$x(1)>e, T\geqslant 1$，则 $\dfrac{\ln[x^{(0)}(k)]^{\frac{1}{T}}}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}\ln[x^{(0)}(i)]^{\frac{1}{T}}}\leqslant\dfrac{x^{(0)}(k)}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}x^{(0)}(i)}$ 是 k 的递减函数[10]。

定理 2.5 $\{x^{(0)}(k), k=1,2,\cdots,n\}$ 为递增序列，且 $x(1)>e, T\geqslant 1, a>1$，则[11]

(1) $\dfrac{a^{-x^{(0)}(k)}}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}a^{-x^{(0)}(i)}}\leqslant\dfrac{\ln x^{(0)}(k)}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}\ln x^{(0)}(i)}\leqslant\dfrac{x^{(0)}(k)}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}x^{(0)}(i)}$；

(2) $\dfrac{[a^{-x^{(0)}(k)}]^{\frac{1}{T}}}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}[a^{-x^{(0)}(i)}]^{\frac{1}{T}}}\leqslant\dfrac{[\ln x^{(0)}(k)]^{\frac{1}{T}}}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}[\ln x^{(0)}(i)]^{\frac{1}{T}}}\leqslant\dfrac{\ln x^{(0)}(k)}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}\ln x^{(0)}(i)}$；

(3) $\dfrac{[a^{-x^{(0)}(k)}]^{\frac{1}{T}}}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}[a^{-x^{(0)}(i)}]^{\frac{1}{T}}}\leqslant\dfrac{a^{-x^{(0)}(k)}}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}a^{-x^{(0)}(k)}}\leqslant\dfrac{\ln x^{(0)}(k)}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}\ln x^{(0)}(i)}$.

定理 2.6 $\{x^{(0)}(k), k=1,2,\cdots,n\}$ 为递增序列，且 $1<x^{(0)}(i)<\dfrac{\pi}{2}, T\geqslant 1, a>1$，则[12]

(1) $\dfrac{\cot x^{(0)}(k)}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}\cot x^{(0)}(i)}\leqslant\dfrac{[\ln x^{(0)}(k)]^{\frac{1}{T}}}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}[\ln x^{(0)}(i)]^{\frac{1}{T}}}\leqslant\dfrac{\ln x^{(0)}(k)}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}\ln x^{(0)}(i)}\leqslant\dfrac{x^{(0)}(k)}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}x^{(0)}(i)}$；

(2) $\dfrac{[\cot x^{(0)}(k)]^{\frac{1}{T}}}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}[\cot x^{(0)}(i)]^{\frac{1}{T}}}\leqslant\dfrac{[\ln x^{(0)}(k)]^{\frac{1}{T}}}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}[\ln x^{(0)}(i)]^{\frac{1}{T}}}\leqslant\dfrac{[x^{(0)}(k)]^{\frac{1}{T}}}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}[x^{(0)}(k)]^{\frac{1}{T}}}\leqslant\dfrac{x^{(0)}(k)}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}x^{(0)}(i)}$.

3 基于幂函数—三角函数 $\cot(x^{\alpha})$ ($\alpha\geqslant 1$)变换提高光滑度的方法

定理 3.1 若 $x^{(0)}(k)$ 为递增序列，且 $\forall k, 1<x^{(0)}(k)<\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \alpha\geqslant 1$，则 $\{\cot[x^{(0)}(k)]^{\alpha}, k=1,2,\cdots,n\}$ 为光滑离散序列。

证明 $\forall k, 1<x^{(0)}(k)<\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \alpha\geqslant 1$，显然 $\{\cot[x^{(0)}(k)]^{\alpha}, k=1,2,\cdots,n\}$ 为非负递减序列，则有 $\{\cot[x^{(0)}(k)]^{\alpha}-\cot[x^{(0)}(k+1)]^{\alpha}\}\sum\limits_{i=1}^{k}\cot[x^{(0)}(k)]^{\alpha}>0$，$-\cot[x^{(0)}(k)]^{\alpha}\cot[x^{(0)}(k+1)]^{\alpha}<0$，所以

$$\{\cot[x^{(0)}(k)]^{\alpha}-\cot[x^{(0)}(k+1)]^{\alpha}\}\sum_{i=1}^{k}\cot[x^{(0)}(k)]^{\alpha}>-\cot[x^{(0)}(k)]^{\alpha}\cot[x^{(0)}(k+1)]^{\alpha}$$

$$\cot[x^{(0)}(k)]^{\alpha}\sum_{i=1}^{k}\cot[x^{(0)}(k)]^{\alpha}>\cot[x^{(0)}(k+1)]^{\alpha}\sum_{i=1}^{k-1}\cot[x^{(0)}(k)]^{\alpha}$$

即

$$\frac{\cot[x^{(0)}(k)]^{\alpha}}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}\cot[x^{(0)}(k)]^{\alpha}}>\frac{\cot[x^{(0)}(k+1)]^{\alpha}}{\sum\limits_{i=1}^{k}\cot[x^{(0)}(k)]^{\alpha}}$$

由定理 2.1 可知，$\{\cot[x^{(0)}(k)]^{\alpha}, k=1,2,\cdots,n\}$ 是光滑离散数据序列。证毕。

引理 3.1 函数 $f_1(x)=\dfrac{\cot(x^{\alpha})}{(\ln x)^{\frac{1}{T}}}, 1<x<\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \alpha\geqslant 1, T\geqslant 1$ 为非负单调递减函数。

证明 当 $1<x<\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \alpha\geqslant 1, T\geqslant 1$ 时，$f_1'(x)=-\dfrac{\csc^2(x^{\alpha})\cdot\alpha x^{\alpha-1}+\cot(x^{\alpha})/(Tx\ln x)}{(\ln x)^{\frac{1}{T}}}<0$，所以函数 $f_1(x)$ 为单调递减函数。证毕。

定理 3.2 $\{x^{(0)}(k), k=1,2,\cdots,n\}$ 为递增序列，且 $\forall k, 1<x^{(0)}(k)<\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \alpha\geqslant 1, T\geqslant 1$，则

$$\frac{\cot[x^{(0)}(k)]^{\alpha}}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}\cot[x^{(0)}(k)]^{\alpha}}\leqslant\frac{[\ln x^{(0)}(k)]^{\frac{1}{T}}}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}[\ln x^{(0)}(i)]^{\frac{1}{T}}}\leqslant\frac{\ln x^{(0)}(k)}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}\ln x^{(0)}(i)}\leqslant\frac{x^{(0)}(k)}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}x^{(0)}(i)}$$

证明 由定理 2.5 可知，定理的后两个不等式显然成立，故本定理只需证明左边不等式。因为 $\{x^{(0)}(k), k=1,2,\cdots,n\}$ 为递增序列，且 $\forall k, 1<x^{(0)}(k)<\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \alpha\geqslant 1, T\geqslant 1$，由引理 3.1 得

$$\frac{\cot[x^{(0)}(k)]^{\alpha}}{[\ln x^{(0)}(k)]^{\frac{1}{T}}}\leqslant\frac{\cot[x^{(0)}(i)]^{\alpha}}{[\ln x^{(0)}(i)]^{\frac{1}{T}}},\quad i=1,2,\cdots,k-1$$

所以

$$\cot[x^{(0)}(k)]^{\alpha}\cdot[\ln x^{(0)}(i)]^{\frac{1}{T}}\leqslant\cot[x^{(0)}(i)]^{\alpha}\cdot[\ln x^{(0)}(k)]^{\frac{1}{T}},\quad i=1,2,\cdots,k-1$$

不等式两边对 i 求和

$$\cot[x^{(0)}(k)]^{\alpha}\cdot\sum_{i=1}^{k-1}[\ln x^{(0)}(i)]^{\frac{1}{T}}\leqslant\sum_{i=1}^{k-1}\cot[x^{(0)}(i)]^{\alpha}\cdot[\ln x^{(0)}(k)]^{\frac{1}{T}}$$

因此

$$\frac{\cot[x^{(0)}(k)]^{\alpha}}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}\cot[x^{(0)}(i)]^{\alpha}}\leqslant\frac{[\ln x^{(0)}(k)]^{\frac{1}{T}}}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}[\ln x^{(0)}(i)]^{\frac{1}{T}}}$$

从而定理 3.2 得证。

定理 3.2 说明当 $1 < x^{(0)}(k) < \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{a}}, a \geqslant 1, T \geqslant 1$ 时，幂函数-三角函数 $\cot[x^{(0)}(k)]^a$ 变换比对数-幂函数 $[\ln x^{(0)}(k)]^{\frac{1}{T}}$ 变换有更好的光滑度。当 $a = 1$ 时，幂函数-三角函数变换为三角函数 $\cot[x^{(0)}(k)]$ 变换[12]。

引理 3.2　函数 $f_2(x) = \frac{[\cot(x^a)]^{\frac{1}{T}}}{(\ln x)^{\frac{1}{T}}}$，$1 < x < \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{a}}, a \geqslant 1, T \geqslant 1$ 为非负单调递减函数。

证明　当 $1 < x < \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{a}}, a \geqslant 1, T \geqslant 1$ 时，$f_2'(x) = -\frac{\csc^2(x^a)\cdot a x^{a-1}/\cot(x^a) + 1/(x\ln x)}{T[\cot(x^a)\cdot(\ln x)]^{\frac{1}{T}}} < 0$，所以函数 $f_2(x)$ 为单调递减函数。证毕。

定理 3.3　$\{x^{(0)}(k), k = 1,2,\cdots,n\}$ 为递增序列，且 $1 < x^{(0)}(i) < \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{a}}, a \geqslant 1, T \geqslant 1$，则

$$\frac{\{\cot[x^{(0)}(k)]^a\}^{\frac{1}{T}}}{\sum_{i=1}^{k-1}\{\cot[x^{(0)}(k)]^a\}^{\frac{1}{T}}} \leqslant \frac{[\ln x^{(0)}(k)]^{\frac{1}{T}}}{\sum_{i=1}^{k-1}[\ln x^{(0)}(i)]^{\frac{1}{T}}} \leqslant \frac{[x^{(0)}(k)]^{\frac{1}{T}}}{\sum_{i=1}^{k-1}[x^{(0)}(k)]^{\frac{1}{T}}} \leqslant \frac{x^{(0)}(k)}{\sum_{i=1}^{k-1}x^{(0)}(i)}$$

证明　同定理 3.2。

定理 3.3 说明当 $1 = x^{(0)}(k) < \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{a}}, a \geqslant 1, T \geqslant 1$ 时，函数 $\{\cot[x^{(0)}(k)]^a\}^{\frac{1}{T}}$ 变换比对数-幂函数 $[\ln x^{(0)}(k)]^{\frac{1}{T}}$ 变换有更好的光滑度。

引理 3.3　函数 $f_3(x) = \frac{\cot(x^2)}{\cot(x)}, 1 < x < \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 为非负单调递减函数。

证明　当 $1 < x < \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 时，对 $f_3(x)$ 取对数并求导

$$[\ln f_2(x)]' = [\ln\cot(x^2)]' - [\ln\cot(x)]'$$

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= f_3(x)\cdot\left[\frac{-2x\csc^2(x^2)}{\cot(x^2)} + \frac{\csc^2 x}{\cot x}\right] \\ &= f_3(x)\cdot\left[-2x\cdot\frac{\cot^2(x^2)+1}{\cot(x^2)} + \frac{\cot^2 x + 1}{\cot x}\right] \\ &= f_3(x)\cdot\left\{-2x\left[\cot(x^2) + \frac{1}{\cot(x^2)}\right] + \left(\cot x + \frac{1}{\cot x}\right)\right\} \\ &= f_3(x)\cdot\left\{-2x\left[\cot(x^2) + \frac{1}{\cot(x^2)}\right] + \frac{2}{\sin 2x}\right\} \end{aligned}$$

因为 $\forall a > 0, a + \frac{1}{a} \geqslant 2$，并且当 $1 < x < \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 时，函数 $\sin 2x$ 为单调递减函数，即有 $\sin 2x < \sin\left(2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) \approx 0.59366$，因此

$$f_3'(x) < f_3(x)\cdot\left(-4 + \frac{2}{0.59366}\right) < 0$$

所以函数 $f_3(x)$ 为非负单调递减函数。证毕。

定理 3.4　$\{x^{(0)}(k), k = 1,2,\cdots,n\}$ 为递增序列，且 $1 < x^{(0)}(k) < \frac{\pi}{2}, T \geqslant 1$，则

$$\frac{\cot[x^{(0)}(k)]^2}{\sum_{i=1}^{k-1}\cot[x^{(0)}(k)]^2} \leqslant \frac{\cot[x^{(0)}(k)]}{\sum_{i=1}^{k-1}\cot[x^{(0)}(k)]} \leqslant \frac{[\ln x^{(0)}(k)]^{\frac{1}{T}}}{\sum_{i=1}^{k-1}[\ln x^{(0)}(i)]^{\frac{1}{T}}} \leqslant \frac{\ln x^{(0)}(k)}{\sum_{i=1}^{k-1}\ln x^{(0)}(i)} \leqslant \frac{x^{(0)}(k)}{\sum_{i=1}^{k-1}x^{(0)}(i)}$$

证明　同定理 3.2。

定理 3.4 说明当 $1 < x^{(0)}(k) < \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 时，平方函数-三角函数 $\cot[x^{(0)}(k)]^2$ 变换比三角函数 $\cot[x^{(0)}(k)]$ 变换有更好的光滑度。

4　基于函数 $\cot(x^2)$ 变换的 GM(1,1) 模型

从定理 3.4 可知，函数 $\cot(x^2), 1 < x < \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 变换可以有效地提高原始数据序列的光滑度，基于函数 $\cot(x^2)$ 变换的 GM(1,1) 建模过程如下：

①设原始数据序列为递增序列：

$$Y^{(0)} = (y^{(0)}(1), y^{(0)}(2), \cdots, y^{(0)}(n)) \tag{1}$$

其中，$y^{(0)}(k) > 1, k = 1,2,\cdots,n$. 将序列 $Y^{(0)}$ 进行标准化处理 $Y^{(0)\prime} = f(Y^{(0)})$，满足标准化后的数据：

$$Y^{(0)\prime} = (y^{(0)\prime}(1), y^{(0)\prime}(2), \cdots, y^{(0)\prime}(n)) \tag{2}$$

其中，$y^{(0)\prime}(k) \in \left(1, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right), k = 1,2,\cdots,n$.

②对数据序列 $Y^{(0)\prime}$ 进行函数 $\cot(x^2)$ 变换，得到 GM(1,1) 建模原始序列：

$$X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \cdots, x^{(0)}(n)) \tag{3}$$

其中，$x^{(0)}(k) = \cot[y^{(0)\prime}(k)]^2, k = 1,2,\cdots,n$.

③作一次累加生成：

$$X^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \cdots, x^{(1)}(n)) \tag{4}$$

其中，$x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i), k = 1,2,\cdots,n$；紧邻均值生成

$$Z^{(1)} = (z^{(1)}(2), z^{(1)}(3), \cdots, z^{(1)}(n)) \tag{5}$$

其中，$z^{(1)}(k) = (x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1)), k = 2,3,\cdots,n$.

④建立 GM(1,1) 模型白化方程为：

$$\frac{dX^{(1)}}{dt} + aX^{(1)} = b \tag{6}$$

其中，a, b 为可辨识参数。

⑤GM(1,1) 模型的时间响应序列为：

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \left[x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}\right]e^{-ak} + \frac{b}{a}, \quad k = 1,2,\cdots,n \tag{7}$$

参数 a, b 的最小二乘估计 $\hat{a} = [a, b]^T$ 满足：

$$\hat{a} = (B^T B)^{-1} B^T Y \tag{8}$$

其中

$$Y=\begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}$$

⑥还原到原始数据：

$$\hat{x}^{(0)}(k+1)=(1-e^{a})\left[x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\right]e^{-ak}$$

$$y^{(0)\prime}(k)=\sqrt{\operatorname{arc\,cot}\hat{x}^{(0)}(k)} \qquad (9)$$

最后，将标准化 $y^{(0)\prime}(k)$ 的还原为 $y^{(0)}(k), k=1,2,\cdots,n$.

5　应用实例

根据《中国统计摘要 2003》，本文采用新的函数变换方法对我国的客运量进行 GM(1,1)模型预测，为使原始数据序列满足定理 3.4 条件，并比较文献[12]模拟结果，本文作如下标准化处理：

$$y^{(0)\prime}(k)=\frac{[y^{(0)}(k)]^{\frac{1}{4}}}{29.4},\quad k=1,2,\cdots,n$$

用式(7)建立 GM(1,1)模型的时间响应序列为：

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=-4.40524e^{-0.146057k}+5.02364$$

$$\hat{x}^{(0)}(k+1)=0.692768e^{-0.146057k}$$

$$\hat{x}^{(0)}(1)=0.5949$$

最终还原模型为：

$$\hat{y}^{(0)}(k)=[29.4\sqrt{\operatorname{arccot}\hat{x}^{(0)}(k)}]^{4}$$

表 1 列出了基于三种不同的函数变换得到的 GM(1,1)模型的模拟值，由表 1 计算三种函数变换建模的模拟精度比较见表 2。通过比较表 2 中的平均相对误差和均方差比，本文提出的函数变换方法模拟精度比文献[10]有很大提高，并好于文献[12]所提出的方法，计算小误差概率 $p=P(|\varepsilon(k-\bar{\varepsilon})|<0.6745S_1)=1$，可知该模型为较好的预测模型。

表 1　三种函数变换的 GM(1,1)模型模拟值(单位:万人)

年份	序号	实际值	文献[10]模拟值	文献[12]模拟值	本文模拟值
1990	1	772682	772682	772682	772682
1991	2	806048	867640	789682	794742
1992	3	860855	922288	892609	893222
1993	4	996634	980378	991580	988832
1994	5	1092883	1042126	1084618	1079797
1995	6	1172596	1107764	1170448	1164871
1996	7	1244722	1177536	1248420	1243297
1997	8	1326094	1251702	1318301	1314745
1998	9	1378717	1330540	1380526	1379202
1999	10	1394413	1414343	1435301	1436901
2000	11	1478573	1503424	1483276	1488221
2001	12	1534122	1598116	1525086	1533628
2002	13	1608150	1698773	1561380	1573641

表 2　三种函数变换的 GM(1,1)模型模拟精度

模拟精度	文献[10]	文献[12]	本文
平均相对误差	4.2%	1.2%	1.1%
均方差比	0.1991	0.0766	0.0707

6 结语

增加原始数据序列的光滑性可以提高灰色预测模型的精度，本文在对原始数据序列经过标准化处理的基础上，将三角函数变换与幂函数变换结合起来，构造了幂函数-三角函数 $\cot(x^{\alpha})$ $(\alpha\geqslant 1)$ 变换，理论上证明了这一类变换比"对数函数"法及"幂函数"法及"幂函数-对数函数"法进一步地增加了离散数据序列的光滑度，最后实例表明了本文提出方法的有效性。

参考文献：

[1] 马光文，王宏伟. 非线性灰色模型在城市用水量预测中的应用[J]. 系统工程，1993，11(1)：23～27.
[2] 党耀国，刘思峰. 河南交通运输综合分析与需求预测研究[J]. 河南农业大学学报，1996，(3)：274～278.
[3] 吉培荣，黄巍松，胡期勇. 电网负荷预测的无偏灰色预测模型[J]. 三峡大学学报(自然科学版)，2001，23(1)：59～62.
[4] 郝永红，王学萌. 灰色动态模型及其在人口预测中的应用[J]. 数学的实践与认识，2002，32(5)：813～820.
[5] 邹长武，李祚泳，倪长健. GM(1,1)模型的改进及其在经济发展预测中的应用[J]. 数学的实践与认识，2007，37(22)：1～5.
[6] 肖新平，宋中民，李峰. 灰技术基础及其应用[M]. 北京：科学出版社，2005：14～24.
[7] 邓聚龙. 灰色系统理论教程[M]. 武汉：华中科技大学出版社，1990.
[8] 陈涛捷. 灰色预测模型的一种拓广[J]. 系统工程，1990，8(7)：50～52.
[9] 于德江. 灰色系统建模方法探讨[J]. 系统工程，1991，9(5)：9～12.
[10] 李群. 灰色预测模型的进一步拓广[J]. 系统工程理论与实践，1993，13(1)：64～66.
[11] 何斌，蒙清. 灰色预测模型拓广方法研究[J]. 系统工程理论与实践，2002，9：138～141.
[12] 李翠凤，戴文战. 基于函数 $\cot(x)$ 变换的灰色建模方法[J]. 系统工程，2005，23(3)：110～114.
[13] 刘思峰，郭天榜，党耀国. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京：科学出版社，1999.

An Approach to Grey Modeling Based on $\cot(x^{\alpha})$ Transformation

GUAN Ye-qing, LIU Si-feng
(College of Economic & Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: This paper introduce the method of trigonometric-power function transformation against the modeling standardized data is put forward. It has been proved the oretically that the smooth degree of data sequence can be greatly enhanced by this function method, which turns out to be more effective than logarithmic function method and power function method. So the method can widen the range of application of grey modeling. Example verification indicates the practical result shows the effectiveness of the proposed approach.

Key words: Grey Model; Smooth Degree; Function Transformation; Discrete Data Sequence

An Approach of the Grey Modeling Based on Cotangent Function Transformation

GUAN Yeqing
College of Economic & Management
Nanjing University of Aeronautics and Astronautics
China
nuaaynx@ nuaa.edu.cn

LIU Si-feng
College of Economic & Management
Nanjing University of Aeronautics and Astronautics
China
sfliu@ nuaa.edu.cn

Abstract—**In this paper, the method of trigonometric-power function transformation against modeling standardized data is put forward. It has been proved that the smooth degree of data sequence can be improved. This function transformation can greatly improve the smooth degree more than logarithmic function transformation and power function transformation. So the method can widen the range of application of grey modeling. At last, the practical result shows the effectiveness of the proposed approach.**

Keywords-Grey Model;Smooth Degree;Function Transformation

I. INTRODUCTION

Grey system theory which has been developed for near thirty years, is widely used in many fields such as industry, agriculture, ecology, economy and scientific research [1-5]. Describing system with model and model system is an effective approach to quantitative research. GM(1,1) (Grey Model with first order and one variable), which is an approximate difference and differential equation model, has broken through the general modeling demand of many data and the limitation of unable to obtain differential nature generally. To improve the accuracy of forecast model, many people have been studying new modeling technology in practice [6]. The smooth discrete condition of grey modeling is that $x(k)/\sum_{i=1}^{k-1}x(i)k$ is the decreasing sequence about k [7], therefore the main research works are focused on making sequence satisfy smooth discrete condition by using function transformation. The methods, which improve the smooth degree of original sequence $\left\{x^{(0)}(k),k=1,2,\cdots,n\right\}$ by using of the transformations of logarithmic function, power function, logarithm-power function, exponential function, and trigonometric function respectively, are presented in [8-12], and have obtained more satisfactory results in practice.

In the paper, on the basis of previous studies, transformation of trigonometric-power function $\cot(x^{\alpha})$ $(\alpha\geq 1)$ transformation is put forward to enhance the smooth degree of original data sequence. First, the original data are standardized to inside the interval $\left(1,(\pi/2)^{1/\alpha}\right)$, in order to make $\cot(x^{\alpha})(\alpha\geq 1)$ being decreasing function in the interval. Then, theoretically, the natures in enhancing the smooth degree of data sequence are studied about the method. Finally, an example presents the validity of the proposed approach.

II. PROPERTIES OF SMOTH SEQUENCE AND SEVERAL RELATIONAL CONCLUDE

Definition Let $X^{(0)}$ be a non-negative sequence,

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$$

when k is sufficiently large, for any $\varepsilon>0$, satisfies that

$$\frac{x^{(0)}(k)}{\sum_{i=1}^{k-1}x^{(0)}(i)}<\varepsilon$$

Then $X^{(0)}$ is said to be a smooth sequence .

Theorem 2.1[7] Let $X^{(0)}$ be a sequence,

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$$

Thus X is said to be a smooth sequence, provided that

$$\frac{x^{(0)}(k)}{\sum_{i=1}^{k-1}x(i)}$$

is a decreasing function of k.

Theorem 2.2[8] Let $X^{(0)}$ be a increasing sequence,

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$$

and $x(1)>\mathrm{e}$, thus

$$\frac{\ln x^{(0)}(k)}{\sum_{i=1}^{k-1}\ln x^{(0)}(i)}\leq\frac{x^{(0)}(k)}{\sum_{i=1}^{k-1}x^{(0)}(i)}$$

is a decreasing function of k.

Theorem 2.3[11] Let $X^{(0)}$ be a increasing sequence,

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$$

and $x(1)>\mathrm{e}, a>1$, thus

$$\frac{a^{-x^{(0)}(k)}}{\sum_{i=1}^{k-1}a^{-x^{(0)}(i)}}\leq\frac{\ln x^{(0)}(k)}{\sum_{i=1}^{k-1}\ln x^{(0)}(i)}\leq\frac{x^{(0)}(k)}{\sum_{i=1}^{k-1}x^{(0)}(i)}$$

is a decreasing function of k.

The paper is partially supported by National Natural Science Foundation of China though Grant NO.70473037, by the Research Fund for the Doctoral Program of National Ministry of Education though Grant NO.20020287001.

978-1-4244-2108-4/08/$25.00 © 2008 IEEE