西北工业大学规划教材

数学分析（第三册）

典型问题与习题集

丁晓庆　编著

清华大学出版社

数学分析（第三册）

典型问题与习题集

丁晓庆　编著

清华大学出版社
北京

内容简介

这套书总结了作者数十年来关于古典微积分的研究成果和教学经验，对现阶段微积分的教学内容和体系进行了卓有成效的探索和改革.

第一册一元微积分部分，基于传统的教学内容引申出“阶估计方法”，通过简捷途径介绍了 Euler 求和公式.

第二册多元微积分部分，比较系统地研究了分析运算的换序问题，介绍了 Riemann 积分的控制收敛定理.

第三册是典型问题与习题集，精选了适合现阶段教学要求并具有一定代表性的例题和习题.

本套书可作为数学专业以及其他对数学要求较高的理工科专业的数学分析教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析. 第 3 册，典型问题与习题集 / 丁晓庆编著. --北京：清华大学出版社，2014

ISBN 978-7-302-36482-5

I. ①数…　II. ①丁…　III. ①数学分析–高等学校–教材　IV. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 099319 号

责任编辑：陈　明
封面设计：傅瑞学
责任校对：赵丽敏
责任印制：李红英

出版发行：清华大学出版社
　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京国马印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×230mm　　**印　张**：25.25　　**字　　数**：549 千字
版　　次：2014 年 6 月第 1 版　　**印　　次**：2014 年 6 月第1 次印刷
印　　数：1～2500
定　　价：42.00 元

产品编号：054818-01

前　　言

要学好数学分析，做一定量的练习题是十分必要的.

本书的习题分为三部分. 第一部分是为配合教学工作，严格按教学进度编写的. 第二部分是多样性的题目，主要目的是补充第一部分的内容，同时也想满足不同层次的读者在多个阶段对学习数学分析的要求. 第三部分是应用前两册书中得到的换序公式和准则，探讨一些具体例子.

做练习题的目的，一方面是为了及时熟悉刚学过的重要概念、定理的内容和定理的证明思想，另一方面是为了对学过的理论进行巩固和提高. 从这个意义上说，练习题做得越多越好.

但事物都有两面性: 一个学生能支配的时间总是很有限的，并且在大学阶段总要同时学习多门课程. 因此，本书从实际出发，把第一部分题目分为两类: 一类是“基本题”，这些都是“课后作业”，学生务必“及时做，及时交”; 另一类是“提高题”，在题号上方标有星号*，这些不作为课后作业. 出于同样的考虑，本书把典型例题也分为“基本题”和“提高题”(在题号上方标有星号*).

为方便学生的学习，同时又考虑不能过多干涉学生的自主学习和思考，本书对第一部分的一些有难度的题目，给出了答案或提示. 为方便各类读者，对第二部分的题目，基本都有简要解答. 第三部分带有探讨性质，适合于教师作为参考资料.

学完一段内容后，我们总要总结和概括. 一般说来，学生有能力完成这项工作的一部分，而另一部分是学生没有能力完成的. 出于这样的考虑，本书对所有章节的内容，进行了总结和说明. 希望在这样的帮助下，便于学生尽快熟悉微积分的基本理论，切实把数学分析学好.

对于错误和不足之处，欢迎提出宝贵意见.

作 者 (dingxq@nwpu.edu.cn)
2014 年元月于西北工业大学

目　　录

第 1 章　数 列 极 限

1.1　实数的性质　两个重要不等式

实数理论是古典微积分的理论基础. 我们要熟记实数的 12 个性质, 以便将来熟练应用.

不等式运算是古典微积分的基本运算. 熟练进行不等式运算, 是顺利学好微积分的关键. 事实证明: 在学习微积分的开始阶段, 学习不顺利的主要原因, 是学习者习惯于初等数学中的等式运算, 对接二连三的不等式运算既不熟练, 也不习惯.

1. 分界数公理　如果数集 A 中每个数不超过数集 B 中每个数, 那么存在数 c, 使得 A 中每个数不超过 c, 而 c 不超过 B 中每个数. 这时, 称 c 为 A, B 的分界数.

2. 平均值不等式　对 n 个正数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ $(n \geqslant 2)$, 几何平均值不超过算术平均值, 即

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

等号成立 $\Leftrightarrow$ 这 n 个正数相同.

3. 基本三角不等式　$\sin\theta < \theta < \tan\theta \ \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

4. 一个常用不等式　$|x - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$.

典型例题 1.1.1　设闭区间 $I_n = [a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 形成单调递减闭区间套

$$I_1 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots,$$

那么至少有一点 c 属于所有这些闭区间.

证　由 $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ 可以推出 $a_1 \leqslant a_2 < b_2 \leqslant b_1$. 类似地, 有

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n < b_n \leqslant b_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant b_1, \ \forall n \geqslant 1.$$

关于这些闭区间, 用 A, B 分别表示左、右端点组成的集合, 那么 A 的每个数不超过 B 的每个数. 因此, 由分界数公理, $\exists c \in \mathbb{R}$, 使得

$$a_n \leqslant c \leqslant b_n, \quad \forall n \geqslant 1 \ _{\#}$$ [1]

练习题

1. 对半径为 R 的圆, 可以做无穷个内接多边形和外切多边形. 用 A 表示内接多边形的面积组成的数集, 用 B 表示外切多边形的面积组成的数集. 写出数集 A, B 的分界数.

2. 根据分界数公理证明: 如果把实数集 $\mathbb{R}$ 分成两个非空的数集 A, A', 使得

(1) $A \cup A' = \mathbb{R}$, $A \cap A' = \varnothing$ (空集). (2) 数集 A 的任何数不超过数集 A' 的任何数.

那么, 要么数集 A 有最大的数, 要么数集 A' 有最小的数.

---

1 同前两册书中的记号一样, 本书用符号"#"表示一个证明过程的结束, 同时作为句号使用.

3. 证明：关于数 a，如果对每个正数 ε，总成立 $|a|<\varepsilon$，那么 $a=0$.

4. 根据 Archimedes 公理证明：设数 $a\geqslant 0$，如果对每个正整数 n，总成立 $a<\dfrac{1}{n}$，那么 $a=0$.

5. 设闭区间 $I_n=[a_n,b_n]\,(n=1,2,\cdots)$ 形成单调递减的区间套，那么 $\exists c\in\mathbb{R}$，属于所有这些闭区间，并且 $|a_n-c|\leqslant b_n-a_n\ (\forall n\geqslant 1)$.

6. 在习题 5 中，附加条件 $b_n-a_n\leqslant\dfrac{1}{n}\,(\forall n\geqslant 1)$，证明：有且只有唯一的数 c 属于每个闭区间.

7. 设区间 $J_n=\left(0,\dfrac{1}{n}\right)(n=1,2,\cdots)$. 证明：$\{J_n\}$ 是单调减的开区间套，但没有数属于每个开区间 J_n.

8. 对 n 个正数 $x_1,x_2,\cdots,x_n\ (n\geqslant 2)$，证明：调和平均值不超过几何平均值，即

$$\frac{1}{\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}\right)}\leqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n},$$

等号成立 $\Leftrightarrow$ 这 n 个正数相同.

9. 证明：设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 n 个正数. 如果 $x_1x_2\cdots x_n=1$，那么 $x_1+x_2+\cdots+x_n\geqslant n$，并且等号成立条件是这 n 个数都是 1.

10. 证明：设自然数 $n\geqslant 2$，那么 $\sqrt[n]{n}<1+\dfrac{2}{\sqrt{n}}$. ($n=\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot 1\cdot\ \cdots\ \cdot 1$，后面的1有 $n-2$ 个).

11. 设

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

证明

$$a_1<a_2<\cdots<a_n<b_n<\cdots<b_2<b_1.$$

12. 证明：当 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$\arctan\theta<\theta$.

13. 证明：当 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$1-\theta<\dfrac{\sin\theta}{\theta}<1$.

14*. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是符号相同且都大于 -1 的数，证明 Bernoulli (伯努利) 不等式

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

15*. 设 $a>0$，$b>0$，证明：

$$\sqrt[n+1]{ab^n}\leqslant\frac{a+bn}{1+n}.$$

16*. 设 $a>0$, $a+b>0$, 证明:

$$(a+b)^n \geqslant a^n + na^{n-1}b.$$

17*. 设 $a>1$, 证明:

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a-1}{n}.$$

1.2　数集的确界

确界是微积分的基本概念之一. 它是古典微积分的灵魂, 用来指导我们做定性分析. 在一般情况下, 即使不知道确界的精确值, 也不会影响确界的作用.

要提高理论水平、锻炼分析能力, 就要逐渐熟悉、掌握确界, 善于通过确界观点, 分析问题.

1. 确界存在定理　有上界的非空数集有唯一的最小上界. 有下界的非空数集有唯一的最大下界.

2. 确界的特征

上确界的特征　对有上界的数集 A, $\beta=\sup A$ 的充要条件是:

(1) β 是 A 的上界.

(2) 对每个数 $\varepsilon>0$, $\beta-\varepsilon$ 不是 A 的上界, 即在 A 中存在数 $a>\beta-\varepsilon$.

特别地, $\forall n\geqslant 1$, $\exists x_n\in A$, 使得 $x_n>\beta-\dfrac{1}{n}$.

下确界的特征　对有下界的数集 A, $\gamma=\inf A$ 的充要条件是:

(1) γ 是 A 的下界.

(2) 对每个数 $\varepsilon>0$, $\gamma+\varepsilon$ 不是 A 的下界, 即在 A 中存在数 $a<\gamma+\varepsilon$.

特别地, $\forall n\geqslant 1$, $\exists x_n\in A$, 使得 $x_n<\gamma+\dfrac{1}{n}$.

3. 子集的确界　如果数集 $A\subset B$, 那么

$$\sup A\leqslant \sup B,\quad \inf A\geqslant \inf B.$$

4. 最大最小数与确界的关系　如果数集 A 有最大数, 那么最大数就是上确界. 如果数集 A 有最小数, 那么最小数就是下确界.

典型例题 1.2.1　设 A, B 是非空有界数集, 记

$$C=\{a+b: a\in A, b\in B\},$$

那么

$$\sup C=\sup A+\sup B.$$

证　设 A, B 的上确界分别是 α, β. 根据上确界的特征定理, 有下列结论:

(1) $\forall a \in A, \forall b \in B$，有

$$a \leqslant \alpha,\ b \leqslant \beta \Rightarrow a + b \leqslant \alpha + \beta .$$

这说明 $\alpha + \beta$ 是集合 C 的上界.

(2) 对每个正数 ε，都存在 $a' \in A,\ b' \in B$，使得

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < a',\ \beta - \frac{\varepsilon}{2} < b' \Rightarrow (\alpha + \beta) - \varepsilon < a' + b' = c' \in C .$$

于是由上确界的特征，$\alpha + \beta$ 就是 C 的上确界 #

练习题

1. 证明数集 A 有界的充要条件是：存在数 $M > 0$，使得 A 中每个数 x 满足 $|x| \leqslant M$.

2. 用证明上确界特征定理的方法，证明下确界特征定理.

3. 证明：如果数集 A 有最小数，那么 $\min A = \inf A$.

4. 证明：如果 $A \subset B$，那么 $\inf A \geqslant \inf B$.

5. 半径为 R 的圆有无穷个内接多边形和外切多边形. 用 A 表示内接多边形的面积组成的数集，用 B 表示外切多边形的面积组成的数集，给出数集 A 的上下确界以及数集 B 的下确界.

6. 证明：如果把实数集 $\mathbb{R}$ 分成两个非空的数集 A, A'，使得

(1) $A \cup A' = \mathbb{R},\ A \cap A' = \varnothing$ (空集); (2) 数集 A 的每个数不大于数集 A' 的每个数.

那么数集 A 有上确界，数集 A' 有下确界，并且

$$\sup A = \inf A' .$$

7. 设数集 $A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots \right\}$，证明:

$$\sup A = 1,\ \inf A = 1 .$$

8. 设数集 $A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots \right\}$，证明:

$$\inf A = 0,\ \sup A = \frac{1}{2} .$$

9. 设 $B = \{-a, a \in A\}$，证明:

$$\sup B = -\inf A,\ \inf B = -\sup A .$$

10. 设 A, B 是非空有界数集，记 $C = \{a + b : a \in A, b \in B\}$，仿照典型例题 1.2.1，证明:

$$\inf C = \inf A + \inf B .$$

11. 设 A, B 是非负数组成的有界数集，记 $C = \{ab : a \in A, b \in B\}$，证明:

$$\sup C = \sup A \cdot \sup B, \qquad \inf C = \inf A \cdot \inf B .$$

1.3 数列的确界

1. 确界存在定理 有上界的数列有上确界. 有下界的数列有下确界.

2. 上确界的特征 对有上界的数列 $\{x_n\}$, $\beta = \sup\{x_n\}$ 的充要条件是:

(1) β 是 $\{x_n\}$ 的上界.

(2) 对每个数 $\varepsilon > 0$, 数 $\beta - \varepsilon$ 不是 $\{x_n\}$ 的上界, 即存在某一项 $x_{n_0} > \beta - \varepsilon$.

3. 下确界的特征 对有下界的数列 $\{x_n\}$, $\gamma = \inf\{x_n\}$ 的充要条件是:

(1) γ 是 $\{x_n\}$ 的下界.

(2) 对每个数 $\varepsilon > 0$, 数 $\gamma + \varepsilon$ 不是 $\{x_n\}$ 的下界, 即存在某一项 $x_{n_0} < \gamma + \varepsilon$.

4. 确界与加法的关系 对有界数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 有

$$\sup_{n\geqslant 1} a_n + \inf_{n\geqslant 1} b_n \leqslant \sup_{n\geqslant 1}(a_n + b_n) \leqslant \sup_{n\geqslant 1} a_n + \sup_{n\geqslant 1} b_n,$$

$$\sup_{n\geqslant 1} a_n + \inf_{n\geqslant 1} b_n \geqslant \inf_{n\geqslant 1}(a_n + b_n) \geqslant \inf_{n\geqslant 1} a_n + \inf_{n\geqslant 1} b_n.$$

5. 确界与乘法的关系 对非负有界数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 在上两式中, 每个加号都可以改为乘号. 另外, 有

$$\sup_{n\geqslant 1}(ca_n) = c\sup_{n\geqslant 1} a_n, \quad \inf_{n\geqslant 1}(ca_n) = c\inf_{n\geqslant 1} a_n \quad (c > 0),$$

$$\sup_{n\geqslant 1}(ca_n) = c\inf_{n\geqslant 1} a_n, \quad \inf_{n\geqslant 1}(ca_n) = c\sup_{n\geqslant 1} a_n \quad (c < 0).$$

典型例题 1.3.1 设 $a_n = \sqrt[n]{n}$, 那么 $\{a_n\}$ 是有界数列. 事实上, 由平均值不等式, 有

$$0 \leqslant a_n = \sqrt[n]{n \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1} \leqslant \frac{n + (n-1)}{n} < 2.$$

典型例题 1.3.2 设数列 $\{x_n\}$ 满足条件

$$|2x_n + x_{n-1}| \leqslant M, \ \forall n \geqslant 2,$$

M 是正常数, 那么数列 $\{x_n\}$ 是有界的.

证 由所给不等式得到 $|2x_n| - |x_{n-1}| \leqslant M$. 因此

$$|x_n| \leqslant \frac{1}{2}|x_{n-1}| + \frac{1}{2}M.$$

通过递推, 得到

$$|x_n| \leqslant \frac{1}{2}M + \frac{1}{2^2}M + \frac{1}{2^2}|x_{n-2}| \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{2}M + \frac{1}{2^2}M + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}M + \frac{1}{2^{n-1}}|x_1|$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)M + \frac{1}{2^{n-1}}|x_1| \leqslant M + |x_1|, \ \forall n \geqslant 2_{\#}$$

典型例题 1.3.3 设 $\{a_n\}$ 是有界数列, 那么

$$\sup_{n\geqslant 1} e^{a_n} = e^{\sup\limits_{n\geqslant 1} a_n}, \quad \inf_{n\geqslant 1} e^{a_n} = e^{\inf\limits_{n\geqslant 1} a_n}.$$

证 只证第一个结论. 设$\{a_n\}$的上确界是α, $\{e^{a_n}\}$的上确界是β, 那么

$$e^{a_n} \leqslant e^{\alpha}, \quad \forall n \geqslant 1.$$

因此$\beta \leqslant e^{\alpha}$. 反过来, 由$\beta$的定义, 有

$$a_n \leqslant \ln\beta, \quad \forall n \geqslant 1.$$

所以, $\alpha \leqslant \ln\beta$, 因而$e^{\alpha} \leqslant \beta$ #

练习题

1. 证明: $\{x_n\}$是有界数列$\Leftrightarrow$存在数$M>0$, 使得数列的每一项x_n满足$|x_n| \leqslant M$.

2. 证明: $\{x_n\}$是有界数列$\Leftrightarrow \sup\{|x_n|\} < +\infty$.

3. 设$a_n = \sqrt[n]{n+1}$, 证明$\{a_n\}$是有界数列.

4. 取$a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n, b_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$. 证明$\{a_n\}$单调增有上界, $\{b_n\}$单调减有下界.

5. 设$x_1 = \sqrt{2}$, $x_n = \sqrt{2+x_{n-1}}$ $(n \geqslant 2)$. 证明$\{x_n\}$是严格单调增有上界的数列.

6. 设$a>0$, $x_1 = \dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)$, $x_n = \dfrac{1}{2}\left(x_{n-1}+\dfrac{1}{x_{n-1}}\right)(n \geqslant 2)$. 证明$\{x_n\}$是单调减有下界的数列.

7. 设$x_n = \dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$. 证明$\{x_n\}$是严格单调增有上界的数列.

8. 设$y_n = \dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$. 证明: 如果$\{x_n\}$是单调增有上界的数列, 那么$\{y_n\}$也是单调增有上界的数列.

9. 证明: $\sup\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{n}{n+1} = 1$, $\inf\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{2}$.

10. 假设$\{a_n\},\{b_n\}$都是有界数列, $a_n \leqslant b_n (\forall n \geqslant 1)$, 证明:

$$\inf_{n\geqslant 1} a_n \leqslant \inf_{n\geqslant 1} b_n, \quad \sup_{n\geqslant 1} a_n \leqslant \sup_{n\geqslant 1} b_n.$$

11. 设$\{a_n\},\{b_n\}$都是有界数列. 证明: (1) $\inf\limits_{n\geqslant 1} a_n + \inf\limits_{n\geqslant 1} b_n \leqslant \inf\limits_{n\geqslant 1}(a_n+b_n) \leqslant \inf\limits_{n\geqslant 1} a_n + \sup\limits_{n\geqslant 1} b_n$.

(2) $\inf\limits_{n\geqslant 1} a_n + \sup\limits_{n\geqslant 1} b_n \leqslant \sup\limits_{n\geqslant 1}(a_n+b_n) \leqslant \sup\limits_{n\geqslant 1} a_n + \sup\limits_{n\geqslant 1} b_n$.

12. 设$\{a_n\}$是有界数列. 证明: (1) $\inf\limits_{n\geqslant 1}(-a_n) = -\sup\limits_{n\geqslant 1} a_n$, $\sup\limits_{n\geqslant 1}(-a_n) = -\inf\limits_{n\geqslant 1} a_n$.

(2) $\inf\limits_{n\geqslant 1} ca_n = c\inf\limits_{n\geqslant 1} a_n$, $\sup\limits_{n\geqslant 1} ca_n = c\sup\limits_{n\geqslant 1} a_n$ (常数$c>0$).

13*. 设 $\{a_n\}$ 是有界数列，并且 $\inf\limits_{n\geqslant1} a_n > 0$，证明

$$\sup_{n\geqslant1}\ln a_n = \ln(\sup_{n\geqslant1} a_n),\quad \inf_{n\geqslant1}\ln a_n = \ln(\inf_{n\geqslant1} a_n).$$

14*. 设数列 $\{x_n\}$ 满足条件

$$|3x_n + x_{n-1}| \leqslant M,\quad \forall n\geqslant 2,$$

其中 M 是正常数，证明：$\{x_n\}$ 是有界数列.

15*. 设 $a_n > 0$，$a_n + \dfrac{1}{a_{n-1}} \leqslant 2$ $(\forall n\geqslant 1)$. 证明 $\{a_n\}$ 是单调减有界数列.

16*. 设 $a_n > 0$，$a_n + \dfrac{4}{a_{n+1}^2} \leqslant 3$ $(\forall n\geqslant 1)$. 证明 $\{a_n\}$ 是单调增有界数列.

1.4 数列的极限

1. 极限的定性定义 对一个数列 $\{x_n\}$，当 n 无限增大时，如果 x_n 无限趋于某个常数 a，就称 a 是 $\{x_n\}$ 的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ 或\ \ x_n \to a\,(n\to\infty).$$

2. 极限的定量定义($\varepsilon-N$ 定义) 设 $\{x_n\}$ 是一个数列，a 是常数. 如果对每个正数 ε，都存在正整数 N，当 $n > N$ 时，$|x_n - a| < \varepsilon$，就称 $\{x_n\}$ 收敛于 a，称 a 是 $\{x_n\}$ 的极限.

3. 一个数列不以某数为极限的肯定描述 对数列 $\{x_n\}$ 和常数 a，如果存在正数 ε_0，使得数列 $\{x_n\}$ 有无穷项满足 $|x_n - a| \geqslant \varepsilon_0$，那么 a 就不是 $\{x_n\}$ 的极限.

这个说法等价于：存在正数 ε_0，使得对每个正整数 N，都有正整数 $n > N$，使得

$$|x_n - a| \geqslant \varepsilon_0.$$

4. 控制收敛原理 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow$ 存在收敛于 0 的数列 ρ_n，从某一项起控制 $|x_n - a|$，即存在 $n_0 \in \mathbb{Z}^+$，使得 $|x_n - a| \leqslant \rho_n$ $(\forall n \geqslant n_0)$.

5. 用极限定义进行证明的一般步骤

第一，任取 $\varepsilon > 0$.

第二，通过不等式运算，估计 $|x_n - a|$ 的大小，寻找合适的、收敛于 0 的控制数列 $\rho_n \geqslant |x_n - a|$. (这样一来，为使 $|x_n - a| < \varepsilon$，只需使 $\rho_n < \varepsilon$.)

第三，根据不等式 $\rho_n < \varepsilon$，分析哪些 N 满足极限定义的要求，并选出一个合适的 N 来(这样的正整数有无穷多个，选定一个即可)，最后做出总结性结论.

在学习微积分的开始阶段，用极限定义进行证明是一个难点. 这里难的不是对极限定义不了解，而是难在不等式的运算不够熟练.