

西北工业大学规划教材

数学分析

(第三册)

典型问题与习题集

丁晓庆 编著

清华大学出版社

数学分析

(第三册)

典型问题与习题集

丁晓庆 编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

这套书总结了作者数十年来关于古典微积分的研究成果和教学经验,对现阶段微积分的教学内容和体系进行了卓有成效的探索 and 改革.

第一册一元微积分部分,基于传统的教学内容引申出“阶估计方法”,通过简捷途径介绍了 Euler 求和公式.

第二册多元微积分部分,比较系统地研究了分析运算的换序问题,介绍了 Riemann 积分的控制收敛定理.

第三册是典型问题与习题集,精选了适合现阶段教学要求并具有一定代表性的例题和习题.

本套书可作为数学专业以及其他对数学要求较高的理工科专业的数学分析教材或参考书.

版权所有,侵权必究.侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

数学分析.第3册,典型问题与习题集/丁晓庆编著.--北京:清华大学出版社,2014

ISBN 978-7-302-36482-5

I. ①数… II. ①丁… III. ①数学分析-高等学校-教材 IV. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 099319 号

责任编辑:陈 明

封面设计:傅瑞学

责任校对:赵丽敏

责任印制:李红英

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社 总 机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:北京国马印刷厂

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×230mm

印 张:25.25

字 数:549 千字

版 次:2014 年 6 月第 1 版

印 次:2014 年 6 月第 1 次印刷

印 数:1~2500

定 价:42.00 元

产品编号:054818-01

前 言

要学好数学分析, 做一定量的练习题是十分必要的.

本书的习题分为三部分. 第一部分是配合教学工作, 严格按教学进度编写的. 第二部分是多样性的题目, 主要目的是补充第一部分的内容, 同时也想满足不同层次的读者在多个阶段对学习数学分析的要求. 第三部分是应用前两册书中得到的换序公式和准则, 探讨一些具体例子.

做练习题的目的, 一方面是为了及时熟悉刚学过的重要概念、定理的内容和定理的证明思想, 另一方面是为了对学过的理论进行巩固和提高. 从这个意义上说, 练习题做得越多越好.

但事物都有两面性. 一个学生能支配的时间总是很有限的, 并且在大学阶段总要同时学习多门课程. 因此, 本书从实际出发, 把第一部分题目分为两类: 一类是“基本题”, 这些都是“课后作业”, 学生务必“及时做, 及时交”; 另一类是“提高题”, 在题号上方标有星号*, 这些不作为课后作业. 出于同样的考虑, 本书把典型例题也分为“基本题”和“提高题”(在题号上方标有星号*).

为方便学生的学习, 同时又考虑不能过多干涉学生的自主学习和思考, 本书对第一部分的一些有难度的题目, 给出了答案或提示. 为方便各类读者, 对第二部分的题目, 基本都有简要解答. 第三部分带有探讨性质, 适合于教师作为参考资料.

学完一段内容后, 我们总要总结和概括. 一般说来, 学生有能力完成这项工作的一部分, 而另一部分是学生没有能力完成的. 出于这样的考虑, 本书对所有章节的内容, 进行了总结和说明. 希望在这样的帮助下, 便于学生尽快熟悉微积分的基本理论, 切实把数学分析学好.

对于错误和不足之处, 欢迎提出宝贵意见.

作者 (dingxq@nwpu.edu.cn)

2014 年元月于西北工业大学

目 录

第 1 章 数列极限	1
1.1 实数的性质 两个重要不等式	1
1.2 数集的确界	3
1.3 数列的确界	5
1.4 数列的极限	7
1.5 极限运算的性质 收敛数列的性质	10
1.6 极限的存在性 实数集的完备性	11
1.7 极限运算和常见初等运算的关系	12
1.8 无穷小数列与无穷大数列	14
1.9 数 e 及其相关极限	15
1.10 数列的上下极限	16
1.11 不定型极限 Stolz 法则	21
第 2 章 函数极限	26
2.1 函数及其相关概念	26
2.2 函数的最值 确界 振幅	28
2.3 函数极限的定义	30
2.4 函数的左右极限	32
2.5 函数在无穷远点的极限	32
2.6 对极限定义的总结	33
2.7 极限的性质 收敛函数的性质	33
2.8 极限的存在性	34
2.9 极限运算和常见运算的关系 求极限的变量替换法	37
2.10 无穷小量与无穷大量	38
2.11 不定型极限 求极限的例子	40
2.12 函数的上下极限	41
2.13 大 O 和小 o	44
第 3 章 函数的连续性	46
3.1 函数在一点的连续性	46
3.2 函数在一点的左右连续性 间断点的分类	47
3.3 连续函数及其运算	48
3.4 闭区间上连续函数的性质	49

3.5 一致连续性	51
第4章 微分与导数	55
4.1 微分和导数的概念	55
4.2 单侧导数 导函数	56
4.3 导数的几何与物理意义	57
4.4 求导法则	59
4.5 常用导数公式	60
4.6 参变量求导法 绝对值求导法 对数求导法	64
4.7 微分学基本定理	65
4.8 高阶导数	67
4.9 微分法则 高阶微分	69
4.10 L'Hospital 法则	70
4.11 Taylor 公式	73
第5章 导数的应用	78
5.1 两个函数的差是常数的条件	78
5.2 函数的单调性	78
5.3 函数的凹凸性	81
5.4 函数的最值	84
5.5 函数的极值	86
5.6 函数的作图	87
第6章 原函数与不定积分	88
6.1 原函数与不定积分的概念	88
6.2 积分运算的线性性质 逐项积分法	88
6.3 第一类换元积分法——凑微分法	89
6.4 第二类换元积分法——参变量积分法	90
6.5 分部积分法	92
6.6 有理函数的积分	93
6.7 三角函数有理式的积分	95
6.8 无理函数的积分举例	96
6.9 说明和补充例子	97
第7章 定积分	100
7.1 定积分的概念 微积分基本公式	100
7.2 积分的性质	102

7.3 函数的可积性 可积函数的一些性质	103
7.4 变限积分及其性质	106
7.5 分部积分法 换元积分法	109
7.6 积分中值定理 分部求和公式	112
7.7 函数的特性与积分的计算	113
7.8 积分不等式	117
补充材料 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式	119
第 8 章 一元微积分的应用 向量值函数的微积分	121
8.1 曲线的长度 弧长微分	121
8.2 平面曲线的曲率 曲率半径	122
8.3 一元向量值函数的概念 极限 连续性	122
8.4 一元向量值函数的微分和导向量	124
8.5 一元向量值函数的积分	125
第 9 章 广义积分	127
9.1 广义积分的概念	127
补充材料 广义积分的 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式	130
9.2 广义积分的收敛性	130
9.3 Riemann 引理 Riemann 点	135
9.4 三个典型的广义积分	136
9.5 有限和的积分估计 有限积的阶估计	137
第 10 章 数项级数 无穷乘积 Euler 求和公式	140
10.1 数项级数的概念和性质	140
10.2 正项级数的收敛性	146
补充材料 正项收敛级数余项的积分估计	152
10.3 一般项级数的收敛性	152
补充材料 一般项收敛级数的余项估计	155
10.4 绝对收敛级数与条件收敛级数的特殊性质	156
10.5 无穷乘积	158
10.6 Euler 求和公式 Stirling 公式	160
补充材料 1 关于 Kummer 判别法	162
补充材料 2 根值系列判别法	162
补充材料 3 关于级数的两个不等式	163
补充材料 4 正项级数的部分和与级数收敛性的关系	164

第 11 章 常见点集的结构 点列的极限	166
11.1 平面点集的结构 二维空间 $\mathbb{R}^2$	166
11.2 空间点集的结构 三维空间 $\mathbb{R}^3$	168
11.3 n 维空间 $\mathbb{R}^n$ n 维空间点集的结构	169
11.4 点列的极限	170
11.5 闭集套定理 有限覆盖定理 聚点原理	171
第 12 章 多元函数的极限和连续性	173
12.1 多元函数的概念	173
12.2 多元函数的极限	174
12.3 偏极限 累次极限换序的充分条件	176
12.4 累次极限的换序公式和换序准则	178
12.5 多元函数的连续性	179
12.6 多元向量值函数 场的概念	181
12.7 向量值函数的极限 连续 曲面的参数方程	182
12.8 向量值连续函数的性质	184
第 13 章 多元函数的偏导数 微分	185
13.1 偏导数的概念	185
13.2 高阶偏导数	185
13.3 多元函数的微分	187
13.4 复合函数的求导法则 微分的形式不变性	188
13.5 微分中值定理 Taylor 公式	191
第 14 章 向量值函数的微分 函数方程与隐函数	193
14.1 二元向量值函数的偏导向量 微分	193
14.2 n 元向量值函数的偏导向量 微分	195
14.3 开映射定理 局部逆映射定理	198
14.4 逆映射存在的充分条件 逆映射的性质	199
14.5 函数方程及其解函数概述	202
14.6 隐函数的微分	203
14.7 隐函数存在定理	207
第 15 章 多元函数微分学的一些应用	210
15.1 曲面的切平面和法向量 曲线的切线	210
15.2 方向导数与梯度	212

15.3	多元函数的最值 Fermat 原理 极值	213
15.4	条件最值 条件极值 Lagrange 乘数法	214
第 16 章	函数列的收敛性	219
16.1	函数列的极限概念	219
补充材料	用多项式一致逼近连续函数	222
16.2	一致收敛性的判定	224
16.3	极限函数的极限 连续 微分	226
16.4	极限与定积分的换序 控制收敛定理	227
16.5	极限与广义积分的换序 单调收敛定理	229
第 17 章	函数项级数的一般理论 Taylor 级数 Fourier 级数	232
17.1	函数项级数的概念及其收敛性	232
17.2	函数项级数的极限 连续 微分	236
17.3	函数项级数的积分	240
17.4	分式级数 函数项无穷乘积	242
17.5	幂级数的一般性质	243
17.6	Taylor 级数	246
17.7	Fourier 级数	249
补充材料	正交系的完备性 Parseval 等式	256
第 18 章	多元函数的偏极限与偏积分	264
18.1	二元函数的偏极限	264
18.2	狭义偏积分	267
18.3	广义偏积分的收敛性	269
18.4	广义偏积分的极限和连续性	272
18.5	广义偏积分的微分	274
18.6	“有限区间 $\times$ 无限区间”上累次积分的换序	275
18.7	“无限区间 $\times$ 无限区间”上累次积分的换序	276
18.8	Beta 函数 Gamma 函数	280
18.9	$\Gamma(s)$ 的有限展开式	283
18.10	Fourier 变换 正余项变换	283
第 19 章	曲线积分	286
19.1	第一型曲线积分	286
19.2	第二型曲线积分	291
补充材料	第二型曲线积分的分部积分法	292

第 20 章 二重积分	296
20.1 二重积分的概念和性质	296
20.2 二重积分的计算	298
20.3 平面区域面积的求法	300
20.4 二重积分的变量替换	302
20.5 Green 公式	306
20.6 积分与路径无关的条件 原函数问题	307
20.7 曲面的面积	308
第 21 章 曲面积分	311
21.1 第一型曲面积分	311
21.2 第二型曲面积分的概念	313
21.3 第二型曲面积分的计算	314
21.4 Stokes 公式 空间曲线积分与路径无关的条件	317
第 22 章 三重积分 多重积分	319
22.1 三重积分的概念	319
22.2 三重积分的计算	320
22.3 三重积分的变量替换	322
22.4 Gauss 公式	327
22.5 场论的基本概念	329
22.6 n 重积分	332
补充材料 化重积分为累次积分的代数定限法	333
22.7 广义重积分 广义曲面积分	336
一些典型问题举例	342
部分练习题的答案与提示	368
参考文献	392

第1章 数列极限

1.1 实数的性质 两个重要不等式

实数理论是古典微积分的理论基础. 我们要熟记实数的12个性质, 以便将来熟练应用.

不等式运算是古典微积分的基本运算. 熟练进行不等式运算, 是顺利学好微积分的关键. 事实证明: 在学习微积分的开始阶段, 学习不顺利的主要原因, 是学习者习惯于初等数学中的等式运算, 对接二连三的不等式运算既不熟练, 也不习惯.

1. 分界数公理 如果数集 A 中每个数不超过数集 B 中每个数, 那么存在数 c , 使得 A 中每个数不超过 c , 而 c 不超过 B 中每个数. 这时, 称 c 为 A, B 的分界数.

2. 平均值不等式 对 n 个正数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n \geq 2$), 几何平均值不超过算术平均值, 即

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

等号成立 $\Leftrightarrow$ 这 n 个正数相同.

3. 基本三角不等式 $\sin \theta < \theta < \tan \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$.

4. 一个常用不等式 $|x - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$.

典型例题 1.1.1 设闭区间 $I_n = [a_n, b_n]$ ($n = 1, 2, \dots$) 形成单调递减闭区间套

$$I_1 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots,$$

那么至少有一点 c 属于所有这些闭区间.

证 由 $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ 可以推出 $a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1$. 类似地, 有

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n < b_n \leq b_{n-1} \leq \cdots \leq b_1, \quad \forall n \geq 1.$$

关于这些闭区间, 用 A, B 分别表示左、右端点组成的集合, 那么 A 的每个数不超过 B 的每个数. 因此, 由分界数公理, $\exists c \in \mathbb{R}$, 使得

$$a_n \leq c \leq b_n, \quad \forall n \geq 1 \quad \#^1$$

练习题

1. 对半径为 R 的圆, 可以做无穷个内接多边形和外切多边形. 用 A 表示内接多边形的面积组成的数集, 用 B 表示外切多边形的面积组成的数集. 写出数集 A, B 的分界数.

2. 根据分界数公理证明: 如果把实数集 $\mathbb{R}$ 分成两个非空的数集 A, A' , 使得

(1) $A \cup A' = \mathbb{R}$, $A \cap A' = \emptyset$ (空集). (2) 数集 A 的任何数不超过数集 A' 的任何数.

那么, 要么数集 A 有最大的数, 要么数集 A' 有最小的数.

¹ 同前两册书中的记号一样, 本书用符号“#”表示一个证明过程的结束, 同时作为句号使用.

3. 证明: 关于数 a , 如果对每个正数 ε , 总成立 $|a| < \varepsilon$, 那么 $a = 0$.

4. 根据 Archimedes 公理证明: 设数 $a \geq 0$, 如果对每个正整数 n , 总成立 $a < \frac{1}{n}$, 那么 $a = 0$.

5. 设闭区间 $I_n = [a_n, b_n] (n=1, 2, \dots)$ 形成单调递减的区间套, 那么 $\exists c \in \mathbb{R}$, 属于所有这些闭区间, 并且 $|a_n - c| \leq b_n - a_n (\forall n \geq 1)$.

6. 在习题 5 中, 附加条件 $b_n - a_n \leq \frac{1}{n} (\forall n \geq 1)$, 证明: 有且只有唯一的数 c 属于每个闭区间.

7. 设区间 $J_n = \left(0, \frac{1}{n}\right) (n=1, 2, \dots)$. 证明: $\{J_n\}$ 是单调减的开区间套, 但没有数属于每个开区间 J_n .

8. 对 n 个正数 $x_1, x_2, \dots, x_n (n \geq 2)$, 证明: 调和平均值不超过几何平均值, 即

$$\frac{1}{\frac{1}{n} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n},$$

等号成立 $\Leftrightarrow$ 这 n 个正数相同.

9. 证明: 设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是 n 个正数. 如果 $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$, 那么 $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n$, 并且等号成立条件是这 n 个数都是 1.

10. 证明: 设自然数 $n \geq 2$, 那么 $\sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$. ($n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1$, 后面的 1 有 $n-2$ 个).

11. 设

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

证明

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n < b_n < \dots < b_2 < b_1.$$

12. 证明: 当 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $\arctan \theta < \theta$.

13. 证明: 当 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $1 - \theta < \frac{\sin \theta}{\theta} < 1$.

14*. 设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是符号相同且都大于 -1 的数, 证明 Bernoulli (伯努利) 不等式

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

15*. 设 $a > 0, b > 0$, 证明:

$$\sqrt[n+1]{ab^n} \leq \frac{a+bn}{1+n}.$$

16*. 设 $a > 0$, $a + b > 0$, 证明:

$$(a+b)^n \geq a^n + na^{n-1}b.$$

17*. 设 $a > 1$, 证明:

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a-1}{n}.$$

1.2 数集的确界

确界是微积分的基本概念之一. 它是古典微积分的灵魂, 用来指导我们做定性分析. 在一般情况下, 即使不知道确界的精确值, 也不会影响确界的作用.

要提高理论水平、锻炼分析能力, 就要逐渐熟悉、掌握确界, 善于通过确界观点, 分析问题.

1. 确界存在定理 有上界的非空数集有唯一的最小上界. 有下界的非空数集有唯一的最大下界.

2. 确界的特征

上确界的特征 对有上界的数集 A , $\beta = \sup A$ 的充要条件是:

- (1) β 是 A 的上界.
- (2) 对每个数 $\varepsilon > 0$, $\beta - \varepsilon$ 不是 A 的上界, 即在 A 中存在数 $a > \beta - \varepsilon$.

特别地, $\forall n \geq 1$, $\exists x_n \in A$, 使得 $x_n > \beta - \frac{1}{n}$.

下确界的特征 对下有界的数集 A , $\gamma = \inf A$ 的充要条件是:

- (1) γ 是 A 的下界.
- (2) 对每个数 $\varepsilon > 0$, $\gamma + \varepsilon$ 不是 A 的下界, 即在 A 中存在数 $a < \gamma + \varepsilon$.

特别地, $\forall n \geq 1$, $\exists x_n \in A$, 使得 $x_n < \gamma + \frac{1}{n}$.

3. 子集的确界 如果数集 $A \subset B$, 那么

$$\sup A \leq \sup B, \quad \inf A \geq \inf B.$$

4. 最大最小数与确界的关系 如果数集 A 有最大数, 那么最大数就是上确界. 如果数集 A 有最小数, 那么最小数就是下确界.

典型例题 1.2.1 设 A, B 是非空有界数集, 记

$$C = \{a+b : a \in A, b \in B\},$$

那么

$$\sup C = \sup A + \sup B.$$

证 设 A, B 的上确界分别是 α, β . 根据上确界的特征定理, 有下列结论:

(1) $\forall a \in A, \forall b \in B$, 有

$$a \leq \alpha, b \leq \beta \Rightarrow a + b \leq \alpha + \beta.$$

这说明 $\alpha + \beta$ 是集合 C 的上界.

(2) 对每个正数 ε , 都存在 $a' \in A, b' \in B$, 使得

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < a', \beta - \frac{\varepsilon}{2} < b' \Rightarrow (\alpha + \beta) - \varepsilon < a' + b' = c' \in C.$$

于是由上确界的特征, $\alpha + \beta$ 就是 C 的上确界_#

练习题

1. 证明数集 A 有界的充要条件是: 存在数 $M > 0$, 使得 A 中每个数 x 满足 $|x| \leq M$.

2. 用证明上确界特征定理的方法, 证明下确界特征定理.

3. 证明: 如果数集 A 有最小数, 那么 $\min A = \inf A$.

4. 证明: 如果 $A \subset B$, 那么 $\inf A \geq \inf B$.

5. 半径为 R 的圆有无穷个内接多边形和外切多边形. 用 A 表示内接多边形的面积组成的数集, 用 B 表示外切多边形的面积组成的数集, 给出数集 A 的上下确界以及数集 B 的下确界.

6. 证明: 如果把实数集 $\mathbb{R}$ 分成两个非空的数集 A, A' , 使得

(1) $A \cup A' = \mathbb{R}, A \cap A' = \emptyset$ (空集); (2) 数集 A 的每个数不大于数集 A' 的每个数.

那么数集 A 有上确界, 数集 A' 有下确界, 并且

$$\sup A = \inf A'.$$

7. 设数集 $A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots \right\}$, 证明:

$$\sup A = 1, \inf A = 1.$$

8. 设数集 $A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}$, 证明:

$$\inf A = 0, \sup A = \frac{1}{2}.$$

9. 设 $B = \{-a, a \in A\}$, 证明:

$$\sup B = -\inf A, \inf B = -\sup A.$$

10. 设 A, B 是非空有界数集, 记 $C = \{a + b : a \in A, b \in B\}$, 仿照典型例题 1.2.1, 证明:

$$\inf C = \inf A + \inf B.$$

11. 设 A, B 是非负数组成的有界数集, 记 $C = \{ab : a \in A, b \in B\}$, 证明:

$$\sup C = \sup A \cdot \sup B, \quad \inf C = \inf A \cdot \inf B.$$

1.3 数列的确界

1. 确界存在定理 有上界的数列有上确界. 有下界的数列有下确界.

2. 上确界的特征 对有上界的数列 $\{x_n\}$, $\beta = \sup\{x_n\}$ 的充要条件是:

(1) β 是 $\{x_n\}$ 的上界.

(2) 对每个数 $\varepsilon > 0$, 数 $\beta - \varepsilon$ 不是 $\{x_n\}$ 的上界, 即存在某一项 $x_{n_0} > \beta - \varepsilon$.

3. 下确界的特征 对下有界的数列 $\{x_n\}$, $\gamma = \inf\{x_n\}$ 的充要条件是:

(1) γ 是 $\{x_n\}$ 的下界.

(2) 对每个数 $\varepsilon > 0$, 数 $\gamma + \varepsilon$ 不是 $\{x_n\}$ 的下界, 即存在某一项 $x_{n_0} < \gamma + \varepsilon$.

4. 确界与加法的关系 对有界数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 有

$$\begin{aligned}\sup_{n \geq 1} a_n + \inf_{n \geq 1} b_n &\leq \sup_{n \geq 1} (a_n + b_n) \leq \sup_{n \geq 1} a_n + \sup_{n \geq 1} b_n, \\ \sup_{n \geq 1} a_n + \inf_{n \geq 1} b_n &\geq \inf_{n \geq 1} (a_n + b_n) \geq \inf_{n \geq 1} a_n + \inf_{n \geq 1} b_n.\end{aligned}$$

5. 确界与乘法的关系 对非负有界数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 在上两式中, 每个加号都可以改为乘号. 另外, 有

$$\begin{aligned}\sup_{n \geq 1} (ca_n) &= c \sup_{n \geq 1} a_n, \quad \inf_{n \geq 1} (ca_n) = c \inf_{n \geq 1} a_n \quad (c > 0), \\ \sup_{n \geq 1} (ca_n) &= c \inf_{n \geq 1} a_n, \quad \inf_{n \geq 1} (ca_n) = c \sup_{n \geq 1} a_n \quad (c < 0).\end{aligned}$$

典型例题 1.3.1 设 $a_n = \sqrt[n]{n}$, 那么 $\{a_n\}$ 是有界数列. 事实上, 由平均值不等式, 有

$$0 \leq a_n = \sqrt[n]{n \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1} \leq \frac{n + (n-1)}{n} < 2.$$

典型例题 1.3.2 设数列 $\{x_n\}$ 满足条件

$$|2x_n + x_{n-1}| \leq M, \quad \forall n \geq 2,$$

M 是正常数, 那么数列 $\{x_n\}$ 是有界的.

证 由所给不等式得到 $|2x_n| - |x_{n-1}| \leq M$. 因此

$$|x_n| \leq \frac{1}{2}|x_{n-1}| + \frac{1}{2}M.$$

通过递推, 得到

$$\begin{aligned}|x_n| &\leq \frac{1}{2}M + \frac{1}{2^2}M + \frac{1}{2^2}|x_{n-2}| \leq \cdots \leq \frac{1}{2}M + \frac{1}{2^2}M + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}M + \frac{1}{2^{n-1}}|x_1| \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)M + \frac{1}{2^{n-1}}|x_1| \leq M + |x_1|, \quad \forall n \geq 2.\end{aligned}$$

典型例题 1.3.3 设 $\{a_n\}$ 是有界数列, 那么

$$\sup_{n \geq 1} e^{a_n} = e^{\sup_{n \geq 1} a_n}, \quad \inf_{n \geq 1} e^{a_n} = e^{\inf_{n \geq 1} a_n}.$$

证 只证第一个结论. 设 $\{a_n\}$ 的上确界是 α , $\{e^{a_n}\}$ 的上确界是 β , 那么

$$e^{a_n} \leq e^{\alpha}, \quad \forall n \geq 1.$$

因此 $\beta \leq e^{\alpha}$. 反过来, 由 β 的定义, 有

$$a_n \leq \ln \beta, \quad \forall n \geq 1.$$

所以, $\alpha \leq \ln \beta$, 因而 $e^{\alpha} \leq \beta$.

练习题

1. 证明: $\{x_n\}$ 是有界数列 $\Leftrightarrow$ 存在数 $M > 0$, 使得数列的每一项 x_n 满足 $|x_n| \leq M$.
2. 证明: $\{x_n\}$ 是有界数列 $\Leftrightarrow \sup\{|x_n|\} < +\infty$.
3. 设 $a_n = \sqrt[n]{n+1}$, 证明 $\{a_n\}$ 是有界数列.
4. 取 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. 证明 $\{a_n\}$ 单调增有上界, $\{b_n\}$ 单调减有下界.
5. 设 $x_1 = \sqrt{2}$, $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$ ($n \geq 2$). 证明 $\{x_n\}$ 是严格单调增有上界的数列.
6. 设 $a > 0$, $x_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$, $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}\right)$ ($n \geq 2$). 证明 $\{x_n\}$ 是单调减有下界的数列.

数列.

7. 设 $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$. 证明 $\{x_n\}$ 是严格单调增有上界的数列.

8. 设 $y_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$. 证明: 如果 $\{x_n\}$ 是单调增有上界的数列, 那么 $\{y_n\}$ 也是

单调增有上界的数列.

9. 证明: $\sup_{n \geq 1} \frac{n}{n+1} = 1$, $\inf_{n \geq 1} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}$.

10. 假设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都是有界数列, $a_n \leq b_n$ ($\forall n \geq 1$), 证明:

$$\inf_{n \geq 1} a_n \leq \inf_{n \geq 1} b_n, \quad \sup_{n \geq 1} a_n \leq \sup_{n \geq 1} b_n.$$

11. 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都是有界数列. 证明: (1) $\inf_{n \geq 1} a_n + \inf_{n \geq 1} b_n \leq \inf_{n \geq 1} (a_n + b_n) \leq \inf_{n \geq 1} a_n + \sup_{n \geq 1} b_n$.

- (2) $\inf_{n \geq 1} a_n + \sup_{n \geq 1} b_n \leq \sup_{n \geq 1} (a_n + b_n) \leq \sup_{n \geq 1} a_n + \sup_{n \geq 1} b_n$.

12. 设 $\{a_n\}$ 是有界数列. 证明: (1) $\inf_{n \geq 1} (-a_n) = -\sup_{n \geq 1} a_n$, $\sup_{n \geq 1} (-a_n) = -\inf_{n \geq 1} a_n$.

- (2) $\inf_{n \geq 1} ca_n = c \inf_{n \geq 1} a_n$, $\sup_{n \geq 1} ca_n = c \sup_{n \geq 1} a_n$ (常数 $c > 0$).

13*. 设 $\{a_n\}$ 是有界数列, 并且 $\inf_{n \geq 1} a_n > 0$, 证明

$$\sup_{n \geq 1} \ln a_n = \ln(\sup_{n \geq 1} a_n), \quad \inf_{n \geq 1} \ln a_n = \ln(\inf_{n \geq 1} a_n).$$

14*. 设数列 $\{x_n\}$ 满足条件

$$|3x_n + x_{n-1}| \leq M, \quad \forall n \geq 2,$$

其中 M 是正常数, 证明: $\{x_n\}$ 是有界数列.

15*. 设 $a_n > 0$, $a_n + \frac{1}{a_{n-1}} \leq 2$ ($\forall n \geq 1$). 证明 $\{a_n\}$ 是单调减有界数列.

16*. 设 $a_n > 0$, $a_n + \frac{4}{a_{n+1}^2} \leq 3$ ($\forall n \geq 1$). 证明 $\{a_n\}$ 是单调增有界数列.

1.4 数列的极限

1. 极限的定性定义 对一个数列 $\{x_n\}$, 当 n 无限增大时, 如果 x_n 无限趋于某个常数 a , 就称 a 是 $\{x_n\}$ 的极限, 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \text{ 或 } x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty).$$

2. 极限的定量定义 (ε - N 定义) 设 $\{x_n\}$ 是一个数列, a 是常数. 如果对每个正数 ε , 都存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, $|x_n - a| < \varepsilon$, 就称 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 称 a 是 $\{x_n\}$ 的极限.

3. 一个数列不以某数为极限的肯定描述 对数列 $\{x_n\}$ 和常数 a , 如果存在正数 ε_0 , 使得数列 $\{x_n\}$ 有无穷项满足 $|x_n - a| \geq \varepsilon_0$, 那么 a 就不是 $\{x_n\}$ 的极限.

这个说法等价于: 存在正数 ε_0 , 使得对每个正整数 N , 都有正整数 $n > N$, 使得

$$|x_n - a| \geq \varepsilon_0.$$

4. 控制收敛原理 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow$ 存在收敛于 0 的数列 ρ_n , 从某一项起控制 $|x_n - a|$, 即存在 $n_0 \in \mathbb{Z}^+$, 使得 $|x_n - a| \leq \rho_n$ ($\forall n \geq n_0$).

5. 用极限定义进行证明的一般步骤

第一, 任取 $\varepsilon > 0$.

第二, 通过不等式运算, 估计 $|x_n - a|$ 的大小, 寻找合适的、收敛于 0 的控制数列 $\rho_n \geq |x_n - a|$. (这样一来, 为使 $|x_n - a| < \varepsilon$, 只需使 $\rho_n < \varepsilon$.)

第三, 根据不等式 $\rho_n < \varepsilon$, 分析哪些 N 满足极限定义的要求, 并选出一个合适的 N 来 (这样的正整数有无穷多个, 选定一个即可), 最后做出总结性结论.

在学习微积分的开始阶段, 用极限定义进行证明是一个难点. 这里难的不是对极限定义不了解, 而是难在不等式的运算不够熟练.