高等学校（独立学院）经济数学系列教材

李延敏　总主编

经济数学Ⅱ

线性代数

邹尔新　王艳　主编

刘诗淼　朱生　副主编

科学出版社

高等学校(独立学院)经济数学系列教材

李延敏　总主编

经济数学Ⅱ
线性代数

邹尔新　王　艳　主　编
刘诗淼　朱　生　副主编

科学出版社
北　京

内　容　简　介

本书是吉林省精品课“经济数学”项目及吉林省教育科学“十二五”规划重点项目研究成果之一，是高等学校(独立学院)经济数学系列教材第二部《经济数学Ⅱ线性代数》. 内容包括行列式、矩阵、线性方程组与向量、矩阵特征值与特征向量、二次型，每章配有习题和适当的选做题，书后给出参考答案，便于对照自测学习.

本书可作为高等学校经济管理类本科生学习教材，也可作为报考研究生学生的数学复习参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

经济数学Ⅱ线性代数/邹尔新，王艳主编. —北京：科学出版社，2014. 6
高等学校(独立学院)经济数学系列教材/李延敏总主编
ISBN 978-7-03-040953-9

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①邹… ②王… Ⅲ. ①经济数学-高等教育-教材 ②线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. ①F224. 0 ②O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 122171 号

责任编辑：张中兴　王胡权 / 责任校对：朱光兰
责任印制：阎　磊 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京中新伟业印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2014 年 6 月第　一　版　开本：720×1000 B5
2014 年 6 月第一次印刷　印张：11 1/2
字数：231 000

定价：24.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

高等学校(独立学院)经济数学系列教材由《经济数学Ⅰ微积分》、《经济数学Ⅱ线性代数》、《经济数学Ⅲ概率论与数理统计》三部教材组成.经济数学是高等学校经济管理类专业的核心课程之一,是学习计量经济学、西方经济学、统计学、管理学等大多数专业基础课,以及专业课之前必修的重要基础课,也是几乎所有经济管理类专业考研的必考科目.

本书是吉林省精品课"经济数学"项目及吉林省教育科学"十二五"规划重点项目研究成果之一,是高等学校(独立学院)经济数学系列教材的第二部.

线性代数是以线性方程组求解这一实际问题为主要背景,通过深入研究各类矩形数表的形态、特点、性质及其运算规律,形成的严密理论体系的数学学科.线性代数所体现出的对向量和矩阵等形象的几何观念与有关的抽象代数方法间的内在关系的充分揭示,以及它严密的逻辑推理、巧妙的综合归纳、简明的表述形式等,在训练和培养学生的逻辑思维和空间想象能力等综合素质方面,具有其他学科不可替代的作用,教师应在教学中结合不同内容,充分发挥这一作用.

人们在处理各类复杂数据信息时,首先对它们进行归纳和整理,并形成各类矩形数表,然后再做更深入的处理和分析,这个过程常要用到线性代数的有关理论和方法.例如,线性代数圆满解决了科学研究和生产实际中常见的多个未知量多个方程大规模线性方程组的求解问题;再如,线性代数为运筹学、管理学提供了重要的理论和方法;特别地,目前在各个领域被广泛应用的多元概率统计分析方法,其理论基础的建立和对实际问题的分析、计算,几乎离不开线性代数这一工具.本书通过实例具体介绍了线性代数在这方面的应用,希望以此激发学生的学习兴趣.

线性代数对许多复杂的计算问题,都实现了表述形式上的简明符号化,充分体现了数学所独有的美学特质. 特别是这种符号化大大方便于计算软件的编程和使用,推进了应用计算机实现复杂计算的程序化.本书在这方面重点作了介绍,教师应注意引导学生在发现和欣赏数学美的同时,深刻认识和理解这种符号化的理论意义和实用价值.

线性代数所研究的许多内容都涉及如何手工计算和如何简化计算,如行列式的性质与计算、矩阵的运算、求线性方程组的解、求矩阵的特征值与特征向量、二次型的标准化等,这在计算工具落后的早期非常有意义.今天,随着计算机和数学软件的发展和普及,手工计算已经过时,但这些内容在线性代数中仍具有重要的理论意义.学习这些内容并配合做对应的练习题,不仅对学生的思维能力、计算能力有

着特殊的训练价值，而且也为今后相关数学软件的正确使用打下必要的基础. 同时，本书在每一章后都编配了类型丰富的习题，并在往年的考研真题中筛选了一部分作为选做题，供准备考研的学生自测练习.

本书编写中，充分考虑了财经类专业学生的特点和需要，并融入了编者的教学经验和体会. 在概念的叙述上更注重科学性、逻辑性和准确性. 如开篇就结合数域的概念，明确界定了本书内容主要涉及的是实数域；又如对行列式的定义作了更明晰的说明；再如在对行列式的性质、对换的性质、矩阵初等变换的性质等描述上作了一些修正，使之更准确、更符合逻辑. 在问题的证明中力求通俗易懂；在介绍计算方法时更讲究实用简洁. 例如，在矩阵的分块运算中提出了预运算的概念，更利于教师的讲解和学生的理解；又例如在齐次线性方程组基础解系的求法上作了改进，新方法既简单又形象直观. 书中还以“注意”“说明”等给出了很多提示，例如在计算和证明问题时，如何正确合理的选用行向量、列向量；又如为何要谨慎使用初等列变换等，以利于学生对重要内容及方法的把握. 此外，书中带“ * ”号的内容可以选讲.

本书第 1 章和第 5 章由邹尔新和刘诗淼编写；第 2 章和第 3 章由王艳编写；第 4 章由朱生编写；全书的编写思想、结构安排和统稿定稿由邹尔新承担.

本书出版得到了科学出版社和长春财经学院(原吉林财经大学信息经济学院)的大力支持，策划编辑张中兴和责任编辑王胡权为本书出版做了大量工作，在此一并表示衷心感谢.

最后，真诚欢迎读者、同行和专家对本书提出批评指正.

编　者

2014 年 1 月

目　　录

第1章　行　列　式

行列式来源于二元和三元线性方程组的求解，之后被应用于一般 n 元线性方程组求解的实际问题. 同时行列式理论也是线性代数的一个基本而重要的内容.

1.1　n 阶行列式

一、数域

定义 1　设 F 为两个以上的数构成的集合，若对 F 中的任意两个数 a 和 b，$a+b$，$a-b$，ab，$\frac{a}{b}(b\neq 0)$ 仍在 F 中，即 F 对**有理运算**“加、减、乘、除”是封闭的，则称 F 为一个**数域**.

例如，所有的有理数构成**有理数域**；所有的实数构成**实数域**；所有的复数构成**复数域**.

注意：因为实数域基本可以满足线性代数的理论研究和实际应用的需要，即所涉及的运算绝大多数为有理运算，实数经有理运算其结果仍在实数域上，所以除特别说明外，本书将主要在实数域上讨论问题.

二、二阶、三阶行列式

求解含有两个未知量、两个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

可用加减消去法得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12},$$
$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，可得方程组的唯一解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

由公式(1.2)，可对未知量 x_1，x_2 的系数构成的二行二列的正方形数表定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.3}$$

为**二阶行列式**，记作 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，其中横排称为**行**，竖排称为**列**，数 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为**行列式的元素**. 下标 i 称为**行标**，表示这个元素在第 i 行；下标 j 称为**列标**，表示这个元素在第 j 列. 式(1.3)也称为方程组(1.1)的**系数行列式**.

说明：二阶行列式，是通过对“＝”号左边的正方形数表，规定“＝”号右边的运算规则(规则源于方程组求解)而定义的. 行列式既指符号 D、$|\quad|$ 或 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，也指展开式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，有时也指计算所得数值. 以上说明可推广到后面的三阶以及 n 阶行列式.

二阶行列式的计算公式(1.3)，可利用对角线法则记忆. 图 1.1 中连接 a_{11} 和 a_{22} 的线称为**主对角线**，对应的**乘积项** $a_{11}a_{22}$ 取正号；连接 a_{12} 和 a_{21} 的线称为**副对角线**，对应的乘积项 $a_{12}a_{21}$ 取负号.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

图 1.1

利用二阶行列式，线性方程组(1.1)的解式(1.2)中的分子可分别表示为

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

当系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$$

时，方程组(1.1)有唯一解，该解可用行列式符号简记为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

例 1　解线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2=1, \\ 2x_1-3x_2=-12. \end{cases}$

解　因系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=1\times(-3)-2\times 2=-7\neq 0,$$

故方程组有唯一解. 又

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -12 & -3 \end{vmatrix}=1\times(-3)-2\times(-12)=21,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -12 \end{vmatrix}=1\times(-12)-1\times 2=-14,$$

于是方程组的唯一解为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{21}{-7}=-3$ ，$x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-14}{-7}=2.$

类似地，由对三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\tag{1.4}$$

的加减消去法求解过程，可以对未知量 x_1,x_2,x_3 的系数构成的三行三列的正方形数表定义

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\begin{aligned}&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\&\quad-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\end{aligned}\tag{1.5}$$

为**三阶行列式**，也称为方程组(1.4)的系数行列式.

公式(1.5)中六个乘积项的代数和，也可利用对角线法则记忆：图 1.2 中连接 a_{11},a_{22},a_{33} 的线称为主对角线，由主对角线、一边和主对角线平行的两个三角形连接的三个元素的乘积均取正号；连接 a_{13},a_{22},a_{31} 的线称为副对角线，由副对角线、一边和副对角线平行的两个三角形连接的三个元素的乘积均取负号.

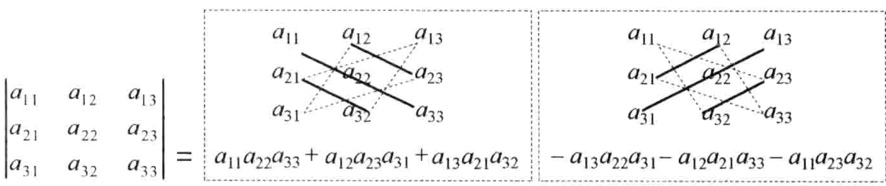

图 1.2

例如，

$$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix}2&4&1\\2&-1&-2\\4&2&-3\end{vmatrix}\\&=2\times(-1)\times(-3)+4\times(-2)\times4+1\times2\times2\\&\quad-[1\times(-1)\times4]-[4\times2\times(-3)]-[2\times(-2)\times2]\\&=14.\end{aligned}$$

类似地，可定义三阶行列式 $D_j(j=1,2,3)$，D_j 是把系数行列式 D 中第 j 列元素换成方程组(1.4)的**常数项** b_1,b_2,b_3 得到的，即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

当系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$$

时,线性方程组(1.4)有唯一解,且该解可用行列式符号简记为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例 2　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2, \\ x_1-x_2=-1, \\ 2x_1+x_2-2x_3=-2. \end{cases}$$

解　由

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=3\neq 0,\quad D_1=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=3,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix}=6,\quad D_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=9,$$

原方程组有唯一解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{3}{3}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{6}{3}=2,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{9}{3}=3.$$

由于定义了二阶和三阶行列式,所以二元和三元线性方程组复杂的加减消去法求解过程,转换成了符号化、程序化的行列式计算. 实际应用中,线性方程组的未知量及方程的个数会远远多于 3 个,这就需要把二阶、三阶行列式推广到一般的 n 阶行列式,为此先引入排列及其逆序数等概念.

三、排列及其逆序数

定义 2　由数字 $1,2,\cdots,n(n\geqslant 2)$ 组成的一个有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$ 称为一个 **n 级排列.**

例如,3142 是 4 级排列,52431 是 5 级排列.

不同的 n 级排列的总数为 $n!$ 个. 如 3 级排列的总数为 $3!=6$ 个,即

123　132　213　231　312　321.

如果一个排列中各个数都按照从左到右、从小到大的自然顺序排列，则称之为**标准排列**. 上例中仅 123 是标准排列，而其余排列中都存在较大数排在较小数左侧的情况.

定义 3 在 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中，如果较大的一个数排在较小的一个数左侧(不一定相邻)，则称这一对数构成一个**逆序**. 排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中逆序的总个数，称为该排列的**逆序数**，记作 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$. 逆序数是偶数或零的排列称为**偶排列**，逆序数是奇数的排列称为**奇排列**.

显然，标准排列的逆序数为 0，是偶排列.

例 3 求下列排列的逆序数，并判断它们的奇偶性.

(1) 52431；(2) $n(n-1)\cdots 21$.

解 (1) 52431 中，5 的逆序有 4 个“52,54,53,51”；2 的逆序有 1 个“21”；4 的逆序有 2 个“43,41”；3 的逆序有 1 个“31”，故 $\tau(52431)=4+1+2+1=8$，该排列为偶排列.

(2) $\tau[n(n-1)\cdots 21]=(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$，易知，该排列当 $n=2$ 或 3 时为奇排列；$n=4k$ 或 $4k+1$ $(k=1,2,\cdots)$ 时为偶排列；$n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时为奇排列.

定义 4 在排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，仅把其中某两个数 i_s 和 i_t 的位置互换，得到一个新排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$，这一过程称为**一次对换**或**一个对换**，记作 (i_s,i_t).

例如：$52431 \xrightarrow{(2,3)} 53421 \xrightarrow{(5,1)} 13425$，其中 $\tau(52431)=8$，$\tau(53421)=9$，$\tau(13425)=2$，这里偶排列 52431 经过一次对换(2,3)变成了奇排列 53421，奇排列 53421 经过一次对换(5,1)变成了偶排列 13425.

定理 1 经过一次对换，前后两个排列的奇偶性相反.

证明 先证明相邻两个数对换的情形. 设原排列为

$$\cdots ij \cdots,$$

经过对换 (i,j) 得到一个新排列

$$\cdots ji \cdots,$$

其中“…”表示那些没动的数.

与原排列比较，新排列中 j 或 i 分别与其他数字之间以及其他数字之间的左右顺序均未改变，仅 i 与 j 的左右顺序变了. 如果 ij 不构成逆序，则 ji 构成逆序；如果 ij 构成逆序，则 ji 不构成逆序，即该对换导致新排列比原排列的逆序数增加 1 或减少 1. 因此对换相邻两个数，对换前后两个排列的奇偶性相反.

再证明两个数 i 与 j 之间夹有 s 个数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 时的情形. 设原排列为

$$\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots,$$

经过对换 (i,j) 得到一个新排列

$$\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots.$$

显然,该对换可以通过一系列相邻两数的对换来实现,即在原排列中,先把 i 依次与 $k_1,k_2,\cdots,k_s,j$ 作 $s+1$ 次相邻两数的对换,化为排列

$$\cdots k_1k_2\cdots k_sji\cdots,$$

再把数 j 依次与 $k_s,\cdots,k_2,k_1$ 作 s 次相邻两数的对换,最终得到新排列

$$\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots.$$

因为对换 (i,j) 等同于上述的 $2s+1$(奇数)次相邻两数的对换,即原排列是经过奇数次的奇偶性交替改变得到的新排列,所以对换 (i,j) 前后两个排列的奇偶性相反.

总之,经过一次对换,前后两个排列的奇偶性相反.

定理 2 在全部不同的 n 级排列中,奇、偶排列的个数相等,均为 $\frac{n!}{2}$.

证明 设全部不同的 n 级排列中有 p 个奇排列和 q 个偶排列,则 $p+q=n!$. 对于这 p 个不同的奇排列,均在相同的两个位置 s,t 上做一次对换 $(i_{ks},i_{kt})(k=1,2,\cdots,p)$,由定理 1 必得到 p 个偶排列. 注意,原来不同的两个奇排列,被对换的两个位置上数字 $i_{ks},i_{kt}(k=1,2,\cdots,p)$ 不都相同时,对换后的两个偶排列必不相同;被对换的两个位置上数字全都相同时,其他位置上的数字必不都相同,对换后的两个偶排列仍不相同,即不同的奇排列经过对换后不能得到相同的偶排列,故奇排列的个数不会大于偶排列的个数,即 $p\leqslant q$. 同理 $q\leqslant p$,从而 $p=q=\frac{n!}{2}$.

四、n 阶行列式

观察二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

其展开式是乘积项的代数和,且具有以下特点:

(1) 乘积项共有 2! 项;

(2) 每个乘积项是位于不同行且不同列的两个元素的乘积;

(3) 每个乘积项左侧的符号可这样确定:当该乘积项两个元素的行标为标准排列时,如果列标构成偶排列,则该项取正号;如果列标构成奇排列,则该项取负号. 例如,项 $a_{11}a_{22}$ 的两个元素的列标构成偶排列 12,取正号;而项 $a_{12}a_{21}$ 的两个元素的列标构成奇排列 21,取负号.

再看三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

其展开式也是乘积项的代数和，且具有与二阶行列式类似的特点：

(1) 乘积项共有 3! 项；

(2) 每个乘积项是位于不同行且不同列的三个元素的乘积；

(3) 每个乘积项左侧的符号可这样确定：当该乘积项三个元素的行标为标准排列时，如果列标构成偶排列，则该项取正号；如果列标构成奇排列，则该项取负号. 例如，乘积项 $a_{12}a_{23}a_{31}$ 的三个元素的列标构成偶排列 231，取正号；乘积项 $a_{11}a_{23}a_{32}$ 的三个元素的列标构成奇排列 132，取负号.

由上述特点，二阶行列式的展开式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2}$ 表示对所有二级排列求和. 三阶行列式的展开式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对所有三级排列求和.

参照上述分析，并与 n 个方程、n 个未知量的线性方程组求解的加减消去法实际计算相结合，对 n 行、n 列的正方形数表有如下定义.

定义 5 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{1.6}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有不同的 n 级排列共 $n!$ 项求和，每个乘积项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 是位于不同行不同列的 n 个元素的乘积，其行标为标准排列，符号由列标排列的逆序数 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 确定，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时取正号，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列时取负号. n 阶行列式也可简记为 $|a_{ij}|$. 这是因为，每个乘积项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 由乘法交换律可按任意顺序写成 $a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}\cdots a_{i_nk_n}$，而其所取的正负号是不变的. 再由定理 1 可以证明

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(k_1k_2\cdots k_n)}=(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)},$$

故可以给出与定义 5 等价的一般形式的定义.

定义 5′ n 阶行列式

$$D=|a_{ij}|=\sum_{n!\text{项}}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n},\tag{1.7}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 分别是行标和列标的 n 级排列.

类似地,把行列式展开式中每个乘积项,通过交换因子顺序使列标成为标准排列,可得与定义 5 等价的又一种形式的定义.

定义 5″ n 阶行列式

$$D=|a_{ij}|=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn},\tag{1.8}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 是行标的 n 级排列.

由上述定义可见:"="号右边的可能非常复杂的运算,可以用"="号左边的符号简明表示,这在理论上有重要意义,同时也为使用计算机对行列式作程序化运算打下基础.

例 4 判断 5 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

展开式中的两个乘积项的符号.

(1) $a_{11}a_{24}a_{35}a_{42}a_{53}$;(2) $a_{31}a_{24}a_{15}a_{42}a_{53}$.

解 (1) 由定义 5,$a_{15}a_{22}a_{34}a_{43}a_{51}$ 的行标为标准排列,列标 52431 的逆序数为 8,所以该项取正号.

(2) 由定义 5′,$(-1)^{\tau(32145)+\tau(14523)}=(-1)^{3+4}=-1$,故 $a_{31}a_{24}a_{15}a_{42}a_{53}$ 取负号.

若将 $a_{31}a_{24}a_{15}a_{42}a_{53}$ 分别改写为 $a_{15}a_{24}a_{31}a_{42}a_{53}$ 和 $a_{31}a_{42}a_{53}a_{24}a_{15}$,则由定义 5,得 $\tau(54123)=7$,且 $a_{15}a_{24}a_{31}a_{42}a_{53}$ 仍取负号,而由定义 5″,$\tau(34521)=7$,$a_{31}a_{42}a_{53}a_{24}a_{15}$ 还是取负号.这也验证了定义 5,定义 5′和定义 5″等价.

例 5 计算 5 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \\ e & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 由定义知 $D=\sum\limits_{j_1j_2j_3j_4j_5}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4j_5)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$ 中所有乘积项均由来自不同行且不同列的元素构成.显然只有当第一行取 a、第二行取 b、第三行取 c、第四行取 d 和第五行取 e 时,构成的乘积项才可能不为零,即仅当列标排列

$j_1j_2j_3j_4j_5=23451$ 时，$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}=a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{51}=abcde$ 才可能不为零，其余各乘积项均为零，因此 $D=(-1)^{\tau(23451)}abcde=(-1)^4abcde=abcde$.

例 6 计算**上三角形行列式**（主对角线下方元素全为零的行列式）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 $D=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$.

在第 n 行中，当列标 $j_n\neq n$ 时，$a_{n1}=a_{n2}=\cdots=a_{nn-1}=0$，代入一般乘积项为零，故仅当 $j_n=n$ 时，

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_{n-1}n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_{n-1}n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1j_{n-1}}a_{nn};$$

在第 $n-1$ 行中，当列标 $j_{n-1}\neq n-1$ 时，$a_{(n-1)n}$ 因与 a_{nn} 在同一列不能取，而 $a_{(n-1)1}=a_{(n-1)2}=\cdots=a_{(n-1)(n-2)}=0$，代入一般乘积项均为零，故仅当 $j_{n-1}=n-1$ 时，

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_{n-2}(n-1)n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_{n-2}(n-1)n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{(n-1)(n-1)}a_{nn};$$

依此类推有

$$D=\sum_{12\cdots n}(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\text{（主对角线元素的乘积）}.$$

对角形行列式（主对角线以外的元素全为零的行列式）是上三角形行列式的特殊情形，故有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理，**下三角形行列式**（主对角线上方元素全为零的行列式）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$