经济数学基础
——微积分

李秀芬 王法珂 ◎ 主编
徐亚男 尹波 王娜 黄海英 ◎ 副主编

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\dfrac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C & (b^2<4ac) \\ \dfrac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\dfrac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|+C & (b^2>4ac) \end{cases}$$

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

经济数学基础
——微积分

李秀芬 王法珂◎主编
徐亚男 尹波 王娜 黄海英◎副主编

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\dfrac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C & (b^2<4ac) \\ \dfrac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\dfrac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|+C & (b^2>4ac) \end{cases}$$

人民邮电出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

经济数学基础. 微积分 / 李秀芬, 王法珂主编. -- 北京 : 人民邮电出版社, 2013.9
ISBN 978-7-115-32283-8

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①李… ②王… Ⅲ. ①经济数学—高等职业教育—教材②微积分—高等职业教育—教材 Ⅳ. ①F224.0②O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第160271号

内 容 提 要

本书在认真分析、总结高职、高专院校各版本高等数学的基础上，从学生实际出发，结合高职院校经济管理类专业培养应用性人才的需要，遵循循序渐进的教学原则编写。本书内容共分6章，包括函数的极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、级数。书末附有常用数学公式和习题参考答案。

本书可供高职、高专经济管理类专业学生使用，亦可作为学习高等数学的参考书。

◆ 主　　编　李秀芬　王法珂
副 主 编　徐亚男　尹　波　王　娜　黄海英
责任编辑　马小霞
执行编辑　肖　稳
责任印制　张佳莹　焦志炜

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市崇文区夕照寺街14号
邮编　100061　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
三河市潮河印业有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：12.75　　　2013年9月第1版
字数：289千字　　2013年9月河北第1次印刷

定价：30.00元

读者服务热线：(010)67170985　印装质量热线：(010)67129223
反盗版热线：(010)67171154

前　　言

随着高职教育的改革与发展不断深入，以及社会对高职教育的新要求，高职教育公共基础课的内容必须与时俱进。本书在认真分析、总结高职高专院校各版本高等数学的基础上，从学生的实际情况出发，结合高职高专院校经济管理类专业培养应用性人才的需求进行编写，具有以下特点：

(1) 在教材结构上，编者结合多年的教学经验，对某些章节的设置进行了新的尝试。例如，将多元函数的有关知识提到与一元函数相应的内容一起讲授，有利于学生对同类知识的贯通理解，同时又节省了课时。目录中多元函数节前加“*”号的内容，老师可以根据实际需要灵活组织教学。

(2) 在内容处理上，充分考虑到高职院校学生的实际情况，遵循“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，在不影响数学基本理论体系的前提下，淡化了逻辑论证和繁琐的推理过程，更注重学生数学技能和应用能力的培养。

(3) 注重以实例引入概念，突出强调数学概念与实际问题的联系；结合学生的专业设计了大量的数学应用例题，培养学生对数学应用的意识和兴趣；注重对基本知识、基本方法和基本技能的训练；教材结构紧凑，语言简练，深入浅出，通俗易懂，便于教与学。

(4) 兼顾了专升本学生的需要。编者在分析多年的专升本考试重点和考试题型的基础上，在各章节的复习题中都穿插了大量的专升本试题，方便准备参加专升本的学生了解情况并进一步学习。

(5) 书后附有数学常用公式，方便复习。每一章节后配有精选的习题和复习题，供学生边学边练和复习所学内容之用。习题和复习题均配有参考答案。

本书由山东省经济管理干部学院李秀芬和王法珂担任主编，徐亚男、尹波、王娜、黄海英担任副主编。其中第 1 章由李秀芬编写，第 2 章由尹波编写，第 3 章由徐亚男编写，第 4 章由王法珂编写，第 5 章由王娜编写，第 6 章由黄海英编写。全书框架结构安排、统稿等任务由李秀芬、王法珂承担，最后由王保合教授、齐恒孝副教授审稿并定稿。

本书在编写过程中，得到了董建文教授、刘彭副教授和邱丽莉教授的大力支持和帮助，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中的错误和不妥之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编　者

2013 年 5 月

目　录

第1章

函数、极限与连续

学习目标

(1) 理解函数的概念和特性,会求函数的定义域、表达式及函数值.

(2) 熟练掌握六类基本初等函数的性质和图像,理解复合函数和初等函数的概念.

(3) 掌握常用经济函数的意义,会建立一些简单实际问题的函数关系式.

(4) 理解极限的概念和性质,熟练掌握极限的运算法则和各种求极限的方法.

(5) 理解无穷大和无穷小的概念,掌握无穷小的性质和比较.

(6) 理解函数的连续性概念,会判断函数在一点是否连续,并会求间断点的类型.

(7) 掌握闭区间上连续函数的性质.

*(8) 理解二元函数的极限与连续性概念.

函数是反映客观世界中变量与变量之间相互联系的一种数学抽象,它是微积分学的研究对象.函数的极限是贯穿微积分始终的一个重要的基本概念,它是研究微积分的主要工具.微积分中的其他几个重要概念,如连续、导数、定积分以及无穷级数的和等,都是用极限来定义的.本章在进一步学习函数概念的基础上,引入函数极限的概念,介绍函数极限的运算法则,并讨论函数的连续性.

第1节 函数

一、函数的概念

先考察几个例子.

例1 生产某种产品的固定成本为6 800元,每生产一件产品,成本增加70元,那么该种产品的总成本y与产量x之间的关系由解析式

$$y=70x+6\ 800$$

给定.当产量 x 取任何一个合理的值时,成本 y 有相应的数值与之对应.

例 2 某一时期银行的人民币定期储蓄存期与年利率如表 1-1 所示.

表 1-1

存期	3 个月	6 个月	1 年	2 年	3 年	5 年
年利率(%)	1.71	2.07	2.25	2.70	3.24	3.60

这个表格给出了定期储蓄存期与年利率之间的对应关系.

例 3 某出租车公司规定收费标准如下:路程不足 3km,车费 5 元;超过 3km 的部分,每千米再加收 1.5 元.出租车车费与路程的关系如图 1-1 所示.

从图 1-1 中可看出对于路程 x 的每一个值,都有唯一确定的车费 y 与之对应.

当然,也可以根据图 1-1 得出路程 x 与车费 y 的关系表达式:

$$y=\begin{cases}5, & 0<x\leqslant 3,\\ 5+1.5(x-3), & x>3.\end{cases}$$

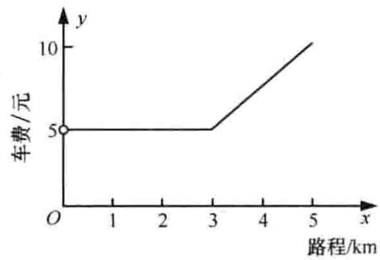


图 1-1

上述三个例子的实际意义、表达方式虽不相同,但具有共同之处:都表达了两个变量在某一变化过程中的对应关系,这种关系确定了一种对应法则.根据这一法则,当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时,另一个变量就有唯一确定的值与之对应,而两个变量之间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 1 设有两个变量 x 和 y,若当变量 x 在某一非空实数集 D 内任意取定一个数值时,变量 y 按照某种对应法则 f 有唯一确定的值与之对应,则称 y 是 x 的**函数**,记作

$$y=f(x),x\in D,$$

其中,变量 x 称为**自变量**,变量 y 称为**函数**(或**因变量**),自变量的取值范围 D 称为函数的**定义域**,数集 $\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的**值域**.

函数 $y=f(x)$ 中,表示对应法则的记号 f 也可改用其他字母,例如"g"、"φ"等,这时函数就记作 $y=g(x)$、$y=\varphi(x)$ 等.

函数的对应法则和定义域是函数的两个要素.**两个函数相同的充要条件是其定义域、对应法则分别相同**,与自变量的选取无关.例如,$w=\sqrt{u}$ 与 $y=\sqrt{x}$ 是相同的函数.

例 1 中总成本 y 是产量 x 的函数,由解析式 $y=70x+6\,800$ 给出;例 2 中对每一存期,都有唯一的年利率与之对应,年利率是存期的函数,由列表给出;例 3 中车费 y 是路程 x 的函数,由图像给出,当然也可以由解析式表示.

函数的表示方法通常有三种:**解析法(公式法)**、**列表法**、**图像法**.

例 3 中路程 x 与车费 y 的关系表达式

$$y=\begin{cases}5, & 0<x\leqslant 3,\\ 5+1.5(x-3), & x>3\end{cases}$$

是一个分段函数.

一般地,把定义域分成若干部分,函数关系由不同的式子分段表达,这样的函数称为**分**

段函数. 分段函数是由几个关系式合起来表示的一个函数，而不是几个函数.

例 4　判断下列函数是否相同.

(1) $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=|x|$；(2) $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$；(3) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$.

解　(1) $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=|x|$ 的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，对应法则也相同，因此它们是同一个函数.

(2) $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 的定义域虽都是 $(-\infty,+\infty)$，但对应法则不同，因此它们是两个不同的函数.

(3) 因为函数 $y=\ln x^2$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而函数 $y=2\ln x$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，因此两个函数不相同.

例 5　求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{9-x^2}$；(2) $f(x)=\lg(4x-3)-\arcsin(2x-1)$.

解　(1) 要使函数有意义，必须满足

$$\begin{cases}1-x\neq 0,\\ 9-x^2\geqslant 0,\end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases}x\neq 1,\\ -3\leqslant x\leqslant 3,\end{cases}$$

所以函数的定义域为 $\{x\,|\,-3\leqslant x\leqslant 3 \text{ 且 } x\neq 1\}$，也可以用区间表示为 $[-3,1)\cup(1,3]$.

(2) 该函数的定义域应满足不等式组

$$\begin{cases}4x-3>0,\\ |2x-1|\leqslant 1,\end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases}x>\dfrac{3}{4},\\ 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

解得函数的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,\dfrac{3}{4}<x\leqslant 1\right\}$.

例 6　设分段函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & -1<x\leqslant 0,\\ x^2, & 0<x\leqslant 1,\\ 3-x, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

(1) 求函数的定义域；

(2) 求 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

(3) 作出函数的图像.

解　(1) 分段函数的定义域是各段自变量取值集合的**并集**，即

$$(-1,0]\cup(0,1]\cup(1,2]=(-1,2],$$

所以函数的定义域是 $(-1,2]$.

(2) $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{2}$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$，

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}.$$

(3) 函数的图像如图 1-2 所示.

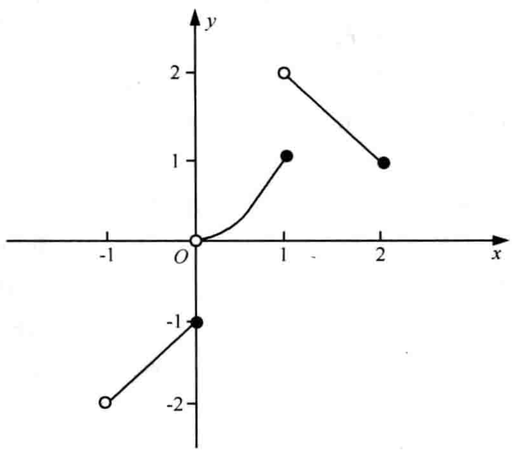


图 1-2

注意：求函数定义域时，一般需要考虑以下几个方面.

(1) 分式的分母不能为零；

(2) 开偶次方时，被开方部分非负；

(3) 指数函数和对数函数中，底数大于零且不等于 1，对数函数的真数部分大于零；

(4) 反三角函数 $\arcsin x$ 和 $\arccos x$，要满足 $|x|\leqslant 1$；

(5) 若函数式中同时含有以上几种情况，则定义域取各部分的**交集**；

(6) 分段函数的定义域是各段自变量取值集合的**并集**.

二、函数的几种特性

1. 函数的单调性

定义 2 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，且对于 (a,b) 内任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**单调递增**的；如果对于 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**单调递减**的.

例如，函数 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调递增的；$y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内是单调递减的，在区间 $[0,+\infty)$ 内是单调递增的，但在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内 $y=x^2$ 不是单调的.

单调递增和单调递减的函数统称为**单调函数**.

2. 函数的奇偶性

定义 3 如果函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于坐标原点对称(若 $x\in D$，则必有 $-x\in D$)，且对于任意的 $x\in D$，有

$$f(-x)=-f(x)$$

恒成立，那么称 $f(x)$ 为**奇函数**. 如果对于任意的 $x\in D$，有

$$f(-x)=f(x)$$

恒成立，那么称 $f(x)$ 为**偶函数**.

例如，$f(x)=\sin x$ 是奇函数；$f(x)=\cos x$ 是偶函数；$f(x)=\sin x+\cos x$ 既不是奇函数，也不是偶函数.

奇函数的图像关于坐标原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称.

3. 函数的周期性

定义 4 对于定义在 D 上的函数 $f(x)$，若存在一个不为零的常数 T，使得对定义域 D 内的任意 x，有 $(x+T)\in D$，且

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为函数 $f(x)$ 的**周期**. 若 $T>0$，并且它是 $f(x)$ 的所有正周期中最小的，则称 T 为 $f(x)$ 的**最小正周期**. 通常所说的周期函数的周期都是指其最小正周期.

例如，函数 $\sin x$、$\cos x$ 都是以 2π 为周期的函数；$\tan x$、$\cot x$ 都是以 π 为周期的函数.

以 T 为周期的函数，在整个定义域内的每个长度为 T 的区间上，其图像有相同的形状.

4. 函数的有界性

定义 5 如果对于函数 $f(x)$，存在一个正数 M，使得对于 (a,b) 内的任意 x，均有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

那么称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内**有界**；如果不存在这样的正数 M，使 $|f(x)|\leqslant M$，那么称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内**无界**.

例如，函数 $f(x)=\sin x$，对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，均有 $|\sin x|\leqslant 1$，所以 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的；而函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是无界的，因为不存在这样的正数 M，对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，使 $|x^2|\leqslant M$ 成立.

对于函数的有界性，做如下几点说明：

(1) 对于任意 $x\in(a,b)$，若存在一个常数 N_1，使 $f(x)\leqslant N_1$ 成立，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有上界；若存在一个常数 N_2，使 $f(x)\geqslant N_2$ 成立，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有下界. **$f(x)$ 在区间 (a,b) 内有界的充分必要条件是 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内既有上界又有下界.**

(2) 当一个函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有界时，正数 M 的取法不是唯一的. 例如，函数 $f(x)=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为存在正数 $M=1$，无论 x 取任何实数，都有 $|\cos x|\leqslant 1$；但我们也可以取 $M=3$，即 $|\cos x|<3$ 总是成立的，实际上 M 可以取任何大于 1 的数.

(3) 有界性是依赖于区间的. 例如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内是有界的，但在区间 $(0,1)$ 内是无界的.

(4) 有界函数的图像介于两条水平直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间，如图 1-3 所示.

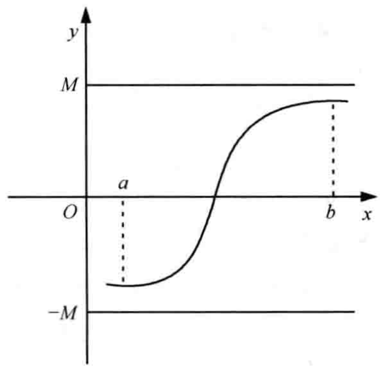


图 1-3

三、反函数与复合函数

1. 反函数

某种商品的单价为 P，销售量为 x，则销售额 $y=Px$. 这时 x 是自变量，y 是 x 的函数. 若已知销售额 y，反过来求销售量 x，则有 $x=\dfrac{y}{P}$. 这时 y 是自变量，x 变成 y 的函数了.

上面的两个式子是同一关系的两种写法；但从函数的角度来看，由于对应法则不同，它们是两个不同的函数，我们称它们互为反函数.

定义 6　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W. 如果对于 W 中的每一个 y，在 D 中都有唯一确定的且满足 $y=f(x)$ 的 x 与之对应，则得到一个定义在 W 上的以 y 为自变量、x 为因变量的新函数，那么称它为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作

$$x=f^{-1}(y),$$

并称 $y=f(x)$ 为**直接函数**.

由定义 6 可见：

(1) 反函数的定义域是直接函数的值域，反函数的值域是直接函数的定义域.

(2) 函数的本质在于定义域和对应法则，而用什么字母表示自变量和因变量无关紧要.

习惯上，$y=f(x)$的反函数表示为 $y=f^{-1}(x)$，其定义域为 W，值域为 D. 于是，在同一直角坐标系里，函数 $y=f(x)$与其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称.

(3) 只有一一对应的函数才有反函数. 例如，$y=x^2(x\in\mathbf{R})$没有反函数，但 $y=x^2(x>0)$有反函数 $y=\sqrt{x}(x>0)$.

为方便以后的学习，在此给出四个反三角函数的定义：

函数 $y=\sin x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$的反函数为**反正弦函数**，记作 $y=\arcsin x$；

函数 $y=\cos x(0\leqslant x\leqslant\pi)$的反函数为**反余弦函数**，记作 $y=\arccos x$；

函数 $y=\tan x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$的反函数为**反正切函数**，记作 $y=\arctan x$；

函数 $y=\cot x(0<x<\pi)$的反函数为**反余切函数**，记作 $y=\operatorname{arccot} x$.

这四个反三角函数的图像与特性见表 1-2.

2. 复合函数

在某一个变化过程中，两个变量的联系有时不是直接的，而是通过另一个变量间接联系起来的. 例如，出租车的车费 R 是路程 s 的函数，路程 s 又是时间 t 的函数，因此车费 R 通过 s 也是时间 t 的函数. 我们把这样复合而成的函数称为复合函数. 一般地，有如下定义：

定义 7 如果 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$的值域与 $f(u)$的定义域的**交集非空**，那么 y 通过中间变量 u 也是 x 的函数，这样的函数是由 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$复合而成的函数，简称**复合函数**，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 称为**中间变量**.

由复合函数的定义可知：

(1) 不是任意两个函数都能够复合成复合函数的. 只有当函数 $u=\varphi(x)$的值域与函数 $y=f(u)$的定义域的交集非空时才可以复合. 例如，$y=\sqrt{u}$，$u=-2^x$ 就不能构成复合函数，这是因为 $u=-2^x$ 的值域$(-\infty,0)$与 $y=\sqrt{u}$的定义域$[0,+\infty)$的交集为空集.

(2) 中间变量可以是多个. 例如，$y=\sqrt{u}$，$u=\cos v$，$v=x^2+1$，则 $y=\sqrt{\cos(x^2+1)}$，这里 u,v 都是中间变量.

例 7 试求函数 $y=u^2$ 与 $u=\cos x$ 构成的复合函数.

解 将 $u=\cos x$ 代入 $y=u^2$ 中，即为所求的复合函数

$$y=\cos^2 x,$$

其定义域为$(-\infty,+\infty)$.

例 8 设 $f(x)=x^2$，$g(x)=2^x$，求 $f[g(x)]$和 $g[f(x)]$.

解 $f[g(x)]=[g(x)]^2=(2^x)^2=4^x$.

$g[f(x)]=2^{f(x)}=2^{x^2}$.

例 9 分析下列复合函数的结构：

(1) $y=\sin(3x+1)$； (2) $y=(\arctan x^3)^2$； (3) $y=e^{\cos\sqrt{\ln x+1}}$.

解 (1) $y=\sin(3x+1)$是由 $y=\sin u$，$u=3x+1$ 复合而成的.

(2) $y=(\arctan x^3)^2$ 是由 $y=u^2$，$u=\arctan v$，$v=x^3$ 复合而成的.

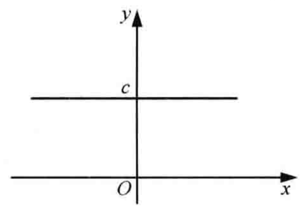
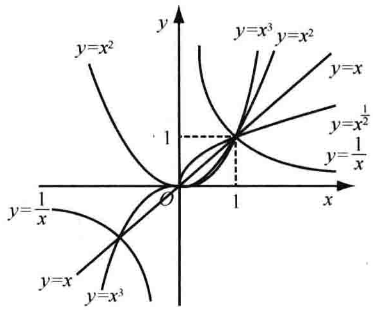
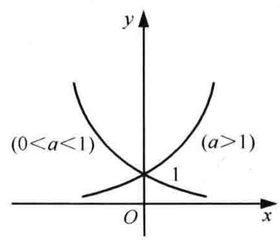
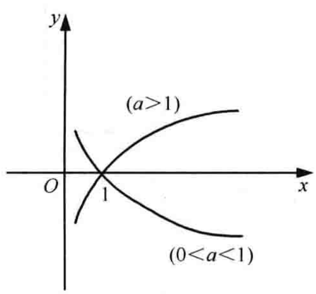
(3) $y=e^{\cos\sqrt{\ln x+1}}$是由 $y=e^u$，$u=\cos v$，$v=\sqrt{t}$，$t=\ln x+1$ 复合而成的.

四、初等函数

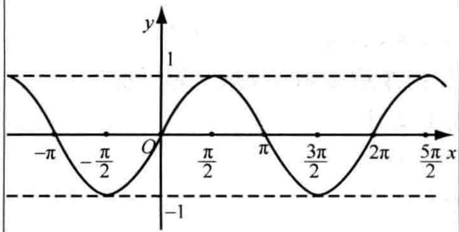
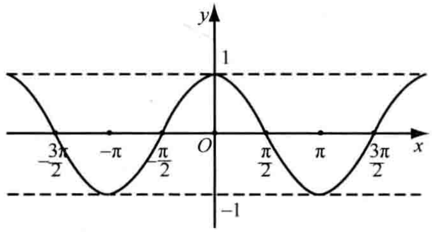
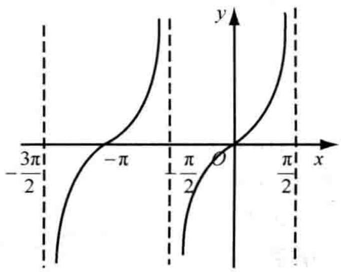
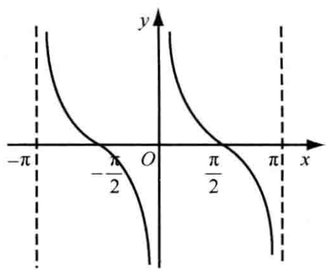
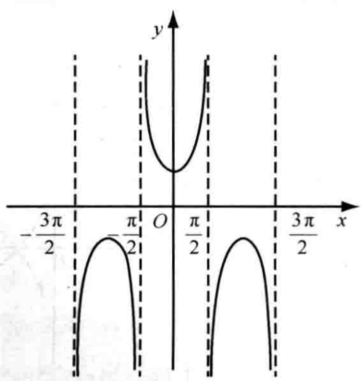
1. 基本初等函数

我们学过的常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，统称为**基本初等函数**. 它是我们今后学习的基础. 为了便于应用，将它们的解析式、定义域、值域、图像和主要特性列于表 1-2 中.

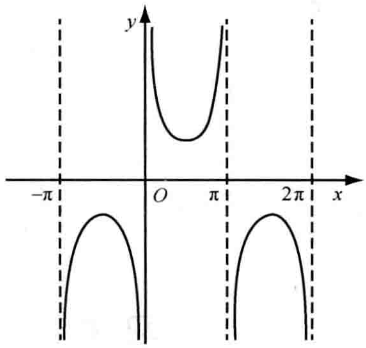
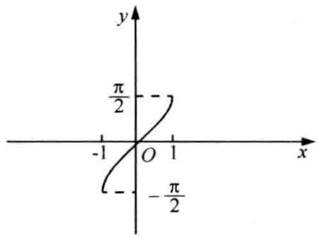
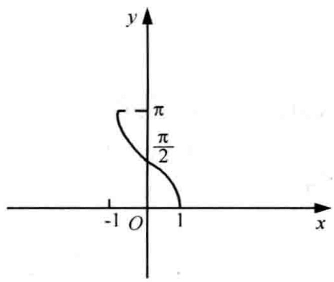
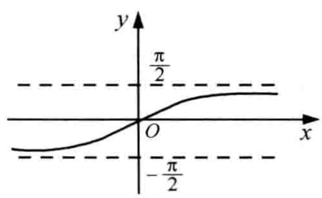
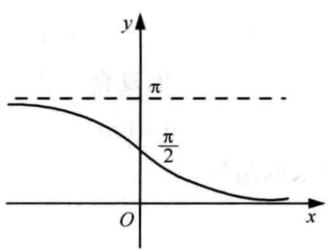
表 1-2

名称	解析式	定义域和值域	图像	主要特性
常数函数	$y=c$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\{c\}$		偶函数，有界
幂函数	$y=x^{\mu}$	定义域和值域随 μ 的不同而不同，但无论 μ 取何值，函数在 $(0,+\infty)$ 内都有定义		经过(1,1)点；在第一象限内，当 $\mu>0$ 时单调递增，当 $\mu<0$ 时单调递减
指数函数	$y=a^x$ $(a>0,$ $a\neq1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		$0<a<1$ 时，a^x 单调递减；当 $a>1$ 时，a^x 单调递增
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>0,$ $a\neq1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		$0<a<1$ 时，$\log_a x$ 是减函数；当 $a>1$ 时，$\log_a x$ 是增函数

续表

名称		解析式	定义域和值域	图像	主要特性
三角函数	正弦函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		以 2π 为周期的奇函数;有界
	余弦函数	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		以 2π 为周期的偶函数;有界
	正切函数	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数;周期为 π,在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调递增($k\in\mathbf{Z}$);无界
	余切函数	$y=\cot x$	$x\neq k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数;周期为 π,在$(k\pi,k\pi+\pi)$内单调递减 ($k\in\mathbf{Z}$);无界
	正割函数	$y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$		偶函数,周期为 2π,无界

续表

名称		解析式	定义域和值域	图像	主要特性
三角函数	余割函数	$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$	$x\neq k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$		奇函数，周期为 2π，无界
反三角函数	反正弦函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$		奇函数，单调递增，有界
	反余弦函数	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调递减，有界
	反正切函数	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$		奇函数，单调递增，有界
	反余切函数	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调递减，有界

2. 初等函数的定义

定义 8 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算并且能用一个解析式表示的函数,叫作**初等函数**.

例如,$y=x^x$,$y=\sqrt[3]{\ln x^2}$,$y=1+\arctan\frac{1}{x}$等都是初等函数;而分段函数

$$y=\begin{cases}3^x, & x\geqslant 0\\ x^2, & x<0\end{cases}$$

不是初等函数(因不能由一个解析式表示),函数 $y=x+x^2+x^3+\cdots$也不是初等函数(因不满足有限次运算).

习题 1－1

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{x^2-5x+4}$;　　(2) $y=\dfrac{1}{\lg(\ln x)}$;

(3) $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$;　　(4) $y=\dfrac{1}{x^2-1}+\arcsin\dfrac{x-1}{2}$.

2. 下列函数 $f(x)$与 $g(x)$是否相同?

(1) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x+3}$,$g(x)=x-1$;

(2) $f(x)=x$,$g(x)=(\sqrt{x})^2$;

(3) $f(x)=|\cos x|$,$g(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$.

3. 已知 $f(x)=\begin{cases}x+2, & 0\leqslant x<1,\\ -1, & x=1,\\ (x-1)^2, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 求函数 $f(x)$的定义域及 $f(0)$,$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$,$f(1)$,$f\left(\dfrac{5}{4}\right)$,$f\left[f\left(\dfrac{5}{4}\right)\right]$的值.

4. 设函数 $f(x)=x+\dfrac{2}{x}$,求 $f(-x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

5. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$;

(2) $f(x)=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})$.

6. 判断下列函数是否有界:

(1) $y=2^x$;　(2) $y=2^x(x<1)$;　(3) $y=\cos(x^2+1)$;　(4) $y=\ln x$.

7. 将下列各题中的 y 表示成 x 的复合函数:

(1) $y=e^u$,$u=2x+1$;　(2) $y=\lg u$,$u=\sqrt{v}$,$v=1+\tan x$.

8. 分析下列复合函数的结构:

(1) $y=\sin x^3$;　(2) $y=\sin^2(1+2x)$;　(3) $y=e^{\arctan\sqrt{x-1}}$;

(4) $y=[\arcsin(1-x^2)]^3$;　(5) $y=\lg[\cos(x^2-1)]$;　(6) $y=x^{\sin x}$.

9. 火车站收取行李费的规定如下：当行李不超过 50 kg 时，按基本运费计算，每千克收 0.30 元；当超过 50 kg 时，超重部分每千克收 0.45 元. 试求行李费 y(单位：元）与行李的重量 x(单位：kg)之间的函数关系式，并画出该函数的图像.

第 2 节 常用的经济函数

在用数学方法分析经济变量之间的关系时，通常需要找出变量之间的函数关系，然后用微积分等知识分析这些经济函数的特性. 本节主要介绍几个常见的经济函数.

一、需求函数与供给函数

1. 需求函数

一种商品的市场需求量，与消费者人数、消费者收入、人们的习惯、季节以及商品的价格等因素有关. 为简化问题的分析，只考虑商品的价格对商品需求量的影响. 商品需求量 Q 与该商品价格 p 的函数关系，称为**需求函数**，记为 $Q=Q(p)$. 这里价格是自变量，$p>0$.

例 1 某音像店销售 CD. 当 CD 价格为 15 元/张时，每天销售量为 100 张；售价每提高 0.1 元，销售量减少 5 张. 试求需求函数.

解 设需求函数为 Q，该 CD 售价为 p 元/张，由题意知 $Q=100-\frac{p-15}{0.1}\times 5$，即

$$Q=50(17-p).$$

由此可以看出，需求函数是单调递减函数，且这种 CD 的售价不能超过 17 元，否则没有销路.

一般地，需求量随价格的上涨而减少，故需求函数通常是价格的单调递减函数.

常见的需求函数有：

(1) 线性需求函数：$Q=a-bp(a>0,b>0)$；

(2) 二次需求函数：$Q=a-bp-cp^2(a>0,b>0,c>0)$；

(3) 指数需求函数：$Q=ae^{-bp},(a>0,b>0)$.

需求函数 $Q=Q(p)$的反函数就是价格函数，记作 $p=p(Q)$.

价格函数也反映了商品需求量与价格的关系.

2. 供给函数

某种商品的供给量也受该商品价格高低的影响. 记商品的供给量为 S，商品的价格为 p，则商品的供给量 S 也可看作价格 p 的函数，称为商品**供给函数**，记作

$$S=S(p).$$

一般地，供给量随价格上涨而增加，故供给函数通常是价格的单调递增函数.

常见的供给函数有线性供给函数、二次供给函数、幂供给函数、指数供给函数等.

使某种商品的市场需求量与供给量相等的价格 p_0，称为**均衡价格**. 当价格 p 高于 p_0 时，供给量增加，而需求量将减少，这时产生"供过于求"的现象；当价格 p 低于均衡价格 p_0 时，供给量减少，而需求量将增加，这时会产生"供不应求"的现象(见图 1-4).

例 2 当小麦每千克的收购价为 1.2 元时，某粮食收购站每天能收购 8 000 kg；如果收

购价每千克提高 0.1 元，则收购量每天可增加 2 000 kg. 求小麦的线性供给函数.

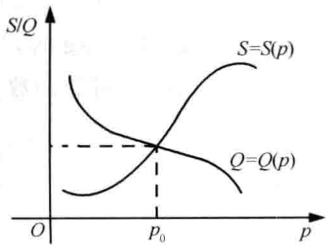


图 1-4

解 设小麦的线性供给函数为

$$S=ap+b,$$

由题意得

$$\begin{cases}8\,000=1.2a+b,\\10\,000=1.3a+b,\end{cases}$$

解得 $a=20\,000$，$b=-16\,000$，所求供给函数为

$$S=20\,000p-16\,000.$$

由此可以看出，小麦的供给函数是单调递增函数；当价格上涨时，小麦收购量会增大.

例 3 已知某商品的供给函数是 $S=-5+3p$，需求函数是 $Q=11-p$，试求该商品的均衡价格.

解 由供需均衡条件，可得

$$11-p_0=-5+3p_0,$$

所以，均衡价格 $p_0=4$.

二、总成本函数、收入函数和利润函数

1. 总成本函数

在生产经营活动中需要有场地、机器设备、劳动力、原材料等投入，称之为生产成本. 它与产品的产量 q 有密切的关系，称之为**总成本函数**，记作 $C(q)$. 总成本函数由固定成本 C_1 和可变成本 $C_2(q)$ 两部分组成，即 $C(q)=C_1+C_2(q)$. 固定成本 C_1 与产量 q 无关，如场地、设备等；可变成本 $C_2(q)$ 随产量 q 的增加而增加，如原材料等.

一般情况下，总成本函数是一个单调递增函数. 常见的成本函数有线性成本函数、二次成本函数、三次成本函数等.

评价一个企业的生产状况，还需要计算**平均成本** $\overline{C}(q)$，即生产 q 个单位产品时，单位产品的成本，有

$$\overline{C}(q)=\frac{C(q)}{q}=\frac{\text{固定成本}+\text{可变成本}}{\text{产量}}.$$

例 4 生产某种产品的总成本(单位:元)是 $C(q)=200+2q$，求生产 40 件这种产品时的总成本和平均成本.

解 生产 40 件该产品时的总成本

$$C(40)=200+2\times40=280(\text{元}),$$

平均成本为

$$\overline{C}(q)=\frac{C(q)}{q}\bigg|_{q=40}=\frac{280}{40}=7(\text{元/件}).$$

2. 收入函数和利润函数

人们总希望尽可能减少成本，提高收入和利润，而收入和利润这些经济变量也都与商品的销售量 q 密切相关. 它们可以看作 q 的函数，分别称为**收入函数和利润函数**，记作 $R(q)$ 和 $L(q)$.