马传渔 等 编著
南京大学金陵学院

Linear Algebra

线性代数解题方法与技巧

南京大学出版社

南京大学金陵学院

Linear Algebra

线性代数
解题方法与技巧

马传渔　马　荣　袁明霞　章丽霞　庄凯丽　编著

南京大学出版社

内 容 提 要

本书按《线性代数》主要内容：行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值和二次型进行分类.对全书400余道题目作思维分析、详尽解答、方法总结和题末评注.通过强化训练，旨在提高分析问题、解决问题和应试的能力.

本书每节题目强调“三基”训练，突出解题方法；层次铺垫到位，便于自学和应用.

本书是作者编著的《线性代数》的配套教材，可作为高等学校教学或数学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数解题方法与技巧 / 马传渔等编著.—南京：南京大学出版社，2014.3

ISBN 978-7-305-12910-0

Ⅰ.①线… Ⅱ.①马… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第044057号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路22号　　邮　编 210093
网　　址 http://www.NjupCo.com
出 版 人 左　健

书　　名 线性代数解题方法与技巧
编　　著 马传渔 等
责任编辑 陈亚明　王振义

照　　排 南京紫藤制版印务中心
印　　刷 南京京新印刷厂
开　　本 787×960　1/16　印张21.75　字数414千
版　　次 2013年7月第1版　2013年7月第1次印刷
ISBN 978-7-305-12910-0
定　　价 50.00元

发行热线 025-83594756　83686452
电子邮箱 Press@NjupCo.com
　　　　 Sales@NjupCo.com(市场部)

前　　言

本书依据教育部对大学高等数学制定的教学规范和教学安排编写而成的.它是2013年出版的《线性代数》(见[1])的配套教材,也是南京大学金陵学院教学改革的又一成果.

本书第1章为行列式,第2章为矩阵,第3章为线性方程组,第4章为特征值理论和二次型,共4章.每章设若干节,每节含10道题目,全书共有400余道题目.

通过本书系统的训练,能牢固掌握线性代数的重要知识,能熟练运用解题方法,能增强分析问题的能力,能提高各类应试水平.

1. 本书每节由基础题、提高题和考研题组成.知识覆盖面广,内容丰富,有利于打好扎实的数学基础.

2. 本书每道题目突出解题方法的归纳和运用.内容由浅入深,铺垫知识到位,有助于解题方法的理解、掌握和运用.

3. 本书中线性代数应用范例会激发人们学习的兴趣,明了学科知识的彼此之间的联系和应用,有利于提高解决实际问题的能力.

本书可作为线性代数教学的配套教材,也可作为各类层次读者的教学或数学参考书.

由于水平有限,不当之处在所难免,恳请专家、同行和读者不吝赐教.

目录

第1章 行列式

1.1 利用行列式的定义计算行列式

1. 行列式自成体系，可构成一门基础学科.行列式的知识贯穿在整个线性代数各章内容之中，它是强有力的计算工具.

2. 二阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

是两项的代数和，每项都是不同行不同列元素的乘积.主对角线两元素相乘取正号，另一项取负号.

a_{11}的代数余子式是a_{22}；a_{22}的代数余子式是a_{11}；a_{12}的代数余子式是$-a_{21}$；a_{21}的代数余子式是$-a_{12}$.

3. 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

是6项的代数和，每项都是不同行不同列元素的乘积.三项取正号，三项取负号，可用对角线法则加以记忆和计算.

二阶、三阶行列式分别与二元、三元一次方程组的求解有关.

引入三阶行列式的代数余子式，行列式可按任意一行或任意一列展开，为行列式的计算提供了方便.

4. 将三阶行列式代数余子式的概念推广到n阶列行式，给出n阶行列式D的定义.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j},$$

其中A_{1j}是$a_{1j}(j=1,2,\cdots,n)$的代数余子式，即一个n阶行列式等于它的第一行诸元素与其对应的代数余子式乘积之和.

借助于行列式的性质，得

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} (i=1,2,\cdots,n),$$

这表明行列式D可按任意一行展开.

同样

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\,(j=1,2,\cdots,n),$$

这表明行列式 D 可按任意一列展开.

题 1 计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^2 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$; (6) $\begin{vmatrix} x & x & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$.

解:(1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}=2\times 7-3\times 5=-1.$

(2) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^2 & x^2+x+1 \end{vmatrix}=(x-1)(x^2+x+1)-x^2=x^3-x^2-1.$

(3) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=1\times 3\times 2+2\times 1\times 3+3\times 2\times 1-3\times 3\times 3-2\times 2\times 2-1\times 1\times 1$$
$$=-18.$$

(4) $$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}=0+4\times(-1)\times 3+1\times 1\times 5-0\times 1\times 3-0\times(-1)\times 5$$
$$-4\times 1\times 0=-7.$$

(5) $$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}=0\times 0\times 0+a\times c\times 0+0\times b\times d-0\times 0\times 0-a\times b\times 0$$
$$-0\times c\times d=0.$$

(6) $$\begin{vmatrix} x & x & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}=x\times(-1)\times x+x\times 0\times 1+2\times 0\times 2-2\times(-1)\times 1$$
$$-0\times 2\times x-x\times 0\times x=-x^2+2.$$

评注:本题采用对角线法则求解,此法仅适用于二、三阶行列式.

题 2 证明 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & b_{11} & b_{12} \\ c_{21} & c_{22} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$.

证明:将等式左端的行列式按第一行展开,得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & b_{11} & b_{12} \\ c_{21} & c_{22} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ c_{12} & b_{11} & b_{12} \\ c_{22} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & 0 & 0 \\ c_{11} & b_{11} & b_{12} \\ c_{21} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} - a_{12}a_{21}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

题 3 行列式 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0$ 的充分必要条件是什么?

解:$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a\times a\times 1 + 1\times 0\times 4 + 0\times 1\times 1 - 0\times a\times 4 - 0\times 1\times a$

$-1\times 1\times 1 = a^2 - 1.$

由题意,知 $a^2-1>0$,即得 $|a|>1$.

题 4 当 k 为何值时,$\begin{vmatrix} k & 3 & 4 \\ -1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix} = 0$.

解:$\begin{vmatrix} k & 3 & 4 \\ -1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix} = k\times k\times 1 + 3\times 0\times 0 + 4\times(-1)\times k - 4\times k\times 0$

$-0\times k\times k - 1\times 3\times(-1) = k^2 - 4k + 3.$

由题意,知 $k^2-4k+3=0$,得 $k=1$ 或 3.

题 5 求解下列方程

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ x & 3 & 1 \\ 4 & x & 5 \end{vmatrix} = -3$;　　(2) $\begin{vmatrix} x+1 & 2 & -1 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = 0$.

解:(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ x & 3 & 1 \\ 4 & x & 5 \end{vmatrix}=15+2x^2-24-x=-3$,

即 $2x^2-x-6=0$.

故 $x=2$ 或 $-\frac{3}{2}$.

(2) $\begin{vmatrix} x+1 & 2 & -1 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix}=(x+1)^3+2\times1\times(-1)+(-1)\times2\times1-(-1)$

$\times(-1)\times(x+1)-(x+1)-4(x+1)=0$,

即 $(x+1)^3-6(x+1)-4=0$.

故 $x=-3$ 或 $x=\pm\sqrt{3}$.

评注:三阶行列式采用对角线法则求解较直接,但有时略显繁琐,故也可采用降阶展开法.

题 6　证明:如果 n 阶行列式中等于零的元素个数大于 n^2-n,则此行列式的值为零.

解:因 n 阶行列式中零元素个数大于 n^2-n,故其中作零元素的个数小于 n,于是行列式中必有零行,从而行列式的值为零.

例 7　计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$.

解:将其按第 1 列展开,得

$$D_n=x\begin{vmatrix} x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}y\begin{vmatrix} y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}$$

$$=x^{n+1}+(-1)^{n+1}y^{n+1}.$$

题 8　如果 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中的元素满足 $a_{ij}=-a_{ji}, i,j=1,2,\cdots,n$,则称 D 为反对称行列式.证明:奇数阶反对称行列式 $D=0$.

证明:因 D 为反对称行列式,故 $a_{ii}=-a_{ii}, i=1,2,\cdots,n$.从而 $a_{ii}=0, i=1,2,\cdots,n$,即主对角线上的元素全为零.

设 $D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$，

则 $D^T=\begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

因 $D^T=D$，将 D^T 中每行提出公因数(−1)，

则 $D=(-1)^nD$.

由于 n 是奇数，得 $D=-D$，故 $D=0$.

题 9　计算五阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ -a & 0 & e & f & g \\ -b & -e & 0 & h & l \\ -c & -f & -h & 0 & k \\ -d & -g & -l & -k & 0 \end{vmatrix}.$$

解：因 D 为 5 阶反对称行列式，故 $D=0$.

题 10　计算五阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -6 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 9 & 2 & 10 & 8 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解：注意到第 5 行有 4 个零元素，故可按第 5 行展开，

$$D=5\cdot(-1)^{5+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 10 & 8 \\ 1 & 0 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

对于上面的四阶行列式按第 2 列展开，得

$$D=(-5)\cdot 2\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

再按第 3 列展开，得

$$D=(-5)\cdot(-2)\cdot 7\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -6\\ 3 & 2\end{vmatrix}=1400.$$

评注:计算行列式时,应按零元素较多的行(列)展开,变为低阶的行列式.

1.2　利用行列式的性质,计算或证明行列式

从行列式的定义可看出,当行列式的阶数较高时,直接用定义计算 n 阶行列式的值相当麻烦,为此介绍行列式的一些性质.利用这些性质可简化行列式的计算.

将行列式 D 的行与列互换后得到的新的行列式,称为 D 的转置行列式,记为 D'或 D^{T},即若

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},\text{则 } D'=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

性质 1　行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 相等,即 $D^{\mathrm{T}}=D$.

性质 2　互换行列式的两行(列),行列式的值变号,即

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\xlongequal{(i)\leftrightarrow(j)}-\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

评注:以(i)表示行列式的第 i 行,以$\overset{\frown}{j}$表示行列式的第 j 列,交换 i,j 两行记作$(i)\leftrightarrow(j)$,交换 i,j 两列记作$\overset{\frown}{i}\leftrightarrow\overset{\frown}{j}$.

推论　如果行列式中有两行(列)的对应元素相同,则行列式为 0.

性质 3　n 阶行列式的值等于它的任意一行(列)各元素与其对应的代数余子式的乘积之和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}+\cdots+a_{in}A_{in}\ (i=1,2,\cdots,n),$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\ (j=1,2,\cdots,n).$$

简言之,即行列式可按任意一行(列)展开.

性质 4　行列式的某一行(列)所有元素的公因子可提到行列式符号的外面,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 1　若行列式中某一行(列)的元素全为零,则此行列式的值为零.

推论 2　若行列式中有两行(列)的元素对应成比例,则此行列式的值为零.

性质 5　如果行列式的某一行(列)的各元素都是两个数的和,则此行列式等于两个相应的行列式的和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6　把行列式的某一行(列)的所有元素乘以数 k 加到另一行(列)的相应元素上,行列式的值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明:由性质 5 和性质 4 的推论 2 易得.

评注:数 k 乘以第 j 行(列)加到第 i 行(列)上,记作 $(i)+k(j)$(或 $\widehat{i}+k\widehat{j}$).

题 1　计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 34215 & 35215 \\ 28092 & 29092 \end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix}$.

解:(1) $\begin{vmatrix} 34215 & 35215 \\ 28092 & 29092 \end{vmatrix} \xlongequal{\widehat{2}-\widehat{1}} \begin{vmatrix} 34215 & 1000 \\ 28092 & 1000 \end{vmatrix} \xlongequal{(1)-(2)} \begin{vmatrix} 6123 & 0 \\ 28092 & 1000 \end{vmatrix}$

$=6123000.$

$$(2)\begin{vmatrix}103&100&204\\199&200&395\\301&300&600\end{vmatrix}\xlongequal[\textcircled{3}-2\textcircled{2}]{\textcircled{1}-\textcircled{2}}\begin{vmatrix}3&100&4\\-1&200&-5\\1&300&0\end{vmatrix}=100\begin{vmatrix}3&1&4\\-1&2&-5\\1&3&0\end{vmatrix}$$

$=2000.$

评注:若行列式中元素数值较大,要注意各行(列)之间的关系,利用性质简化行列式.

题2 已知五阶行列式 $D=4$,依照下列次序将 D 作变换:先交换第1列和5列,再转置,接着用3乘所有元素,再用-7乘第2行后加到第1行上,最后用18除第2行所有元素,将经过5次变换后的行列式记为 D_5,则 $D_5=$______.

解:先交换第1列与第5列,行列式的值变为-4.

再转置,值不变.

用3乘所有元素,行列式的值是原来的 3^5 倍,即 $-4\cdot 3^5$.

用-7乘第2行加到第1行,行列式的值不变.

用18除第2行所有元素,值变为原来的$\frac{1}{18}$倍,得-54.

题3 计算 $D=\begin{vmatrix}3&4&5&11\\2&5&4&9\\5&3&2&12\\14&-11&21&29\end{vmatrix}$.

解:$D\xlongequal{(1)-(2)}\begin{vmatrix}1&-1&1&2\\2&5&4&9\\5&3&2&12\\14&-11&21&29\end{vmatrix}\xlongequal[\textcircled{4}-2\textcircled{1}]{\textcircled{2}+\textcircled{1}\;\;\textcircled{3}-\textcircled{1}}\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&7&2&5\\5&8&-3&2\\14&3&7&1\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}7&2&5\\8&-3&2\\3&7&1\end{vmatrix}\xlongequal[(2)-2(3)]{(1)-5(3)}\begin{vmatrix}-8&-33&0\\2&-17&0\\3&7&1\end{vmatrix}=202.$$

评注:本行列式元素中没有±1,若直接用性质消零计算会较麻烦,故可先用性质化一个元素为1或-1,然后再化零,降阶展开求值.

题 4 利用行列式的性质计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 196 & 203 & 199 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} a+1 & a+2 & a+3 \\ b+1 & b+2 & b+3 \\ c+1 & c+2 & c+3 \end{vmatrix}$;　　(6) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

解:(1) $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\overset{\frown}{\underset{\smile}{2}}-2\overset{\frown}{\underset{\smile}{1}}} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 12.$$

(2) $$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 196 & 203 & 199 \end{vmatrix} \xlongequal[\overset{\frown}{\underset{\smile}{3}}-\overset{\frown}{\underset{\smile}{1}}]{\overset{\frown}{\underset{\smile}{2}}-\overset{\frown}{\underset{\smile}{1}}} \begin{vmatrix} 5 & -6 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 196 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= (-1)^{2+1}\cdot 2\begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 8.$$

(3) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,4]{\overset{\frown}{\underset{\smile}{1}}+\overset{\frown}{\underset{\smile}{i}}} \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$\xlongequal[i=2,3,4]{(i)-(1)} 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$\xlongequal[(3)+(1)]{(2)-2(1)} 10\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 160.$$

(4) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3]{\overset{\frown}{\underset{\smile}{1}}+\overset{\frown}{\underset{\smile}{i}}} \begin{vmatrix} \lambda+2 & 1 & \lambda \\ \lambda+2 & \lambda & 1 \\ \lambda+2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(2)-(3)]{(1)-(3)}(\lambda+2)\begin{vmatrix}0&0&\lambda-1\\0&\lambda-1&0\\1&1&1\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}0&\lambda-1\\\lambda-1&0\end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda+2)(\lambda-1)^2.$$

(5) $$\begin{vmatrix}a+1&a+2&a+3\\b+1&b+2&b+3\\c+1&c+2&c+3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&a+2&a+3\\b&b+2&b+3\\c&c+2&c+3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&a+2&a+3\\1&b+2&b+3\\1&c+2&c+3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a&2&3\\b&2&3\\c&2&3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&a&a\\1&b&b\\1&c&c\end{vmatrix}=0.$$

(6) $$\begin{vmatrix}x&y&x+y\\y&x+y&x\\x+y&x&y\end{vmatrix}=2(x+y)\begin{vmatrix}1&y&x+y\\1&x+y&x\\1&x&y\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(3)-(1)]{(2)-(1)}2(x+y)\begin{vmatrix}1&y&x+y\\0&x&-y\\0&x-y&-x\end{vmatrix}=2(x+y)\begin{vmatrix}x&-y\\x-y&-x\end{vmatrix}$$

$$=-2(x^3+y^3).$$

评注:本题利用了行列式的性质求解行列式,这是将行列式简化的一种有效的常用的方法.先利用行列式的性质将某行(或列)尽可能多的元素化为零,再按该行(列)展开.

若行列式的每一行(列)元素之和相同,则将各列(行)加到第1列(行),再提取公因式.

题5　设 $xyz\neq0$,计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1+x&2&3\\1&2+y&3\\1&2&3+z\end{vmatrix}$$

解:方法一:$D\xlongequal[\substack{(2)-(1)\\(3)-(1)}]{}\begin{vmatrix}1+x&2&3\\-x&y&0\\-x&0&z\end{vmatrix}$

$$\xlongequal[\substack{①+\frac{x}{y}②\\①+\frac{x}{z}③}]{}\begin{vmatrix}1+x+\frac{2x}{y}+\frac{3x}{z}&2&3\\0&y&0\\0&0&z\end{vmatrix}$$

$$=\left(1+x+\frac{2x}{y}+\frac{3x}{z}\right)yz=yz+2zx+3xy+xyz.$$

方法二：将 D 中 1,2,3 分别写成 1+0,2+0,3+0，利用行列式性质 5，D 可化为 2^3 个行列式，其中有 4 个为 0，从而

$$D=\begin{vmatrix}1+x & 2+0 & 3+0\\ 1+0 & 2+y & 3+0\\ 1+0 & 2+0 & 3+z\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & y & 0\\ 1 & 0 & z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x & 0 & 3\\ 0 & y & 3\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x & 0 & 0\\ 0 & y & 0\\ 0 & 0 & z\end{vmatrix}$$

$$=yz+2zx+3xy+xyz.$$

题 6　用行列式的性质证明

(1) $\begin{vmatrix}a-b & b-c & c-a\\ b-c & c-a & a-b\\ c-a & a-b & b-c\end{vmatrix}=0$;

(2) $\begin{vmatrix}y+z & z+x & x+y\\ x+y & y+z & z+x\\ z+x & x+y & y+z\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}x & y & z\\ z & x & y\\ y & z & x\end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix}a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n\\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n\end{vmatrix}=0\,(n>2)$;

(4) $\begin{vmatrix}a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2\\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2\\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2\\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2\end{vmatrix}=0.$

证明：(1) 左边 $=\begin{vmatrix}a-b & b-c & c-a\\ b-c & c-a & a-b\\ c-a & a-b & b-c\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,3]{1+i}\begin{vmatrix}0 & b-c & c-a\\ 0 & c-a & a-b\\ 0 & a-b & b-c\end{vmatrix}$

$=0=$ 右边.

(2) 左边 $=\begin{vmatrix}y+z & z+x & x+y\\ x+y & y+z & z+x\\ z+x & x+y & y+z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y & z+x & x+y\\ x & y+z & z+x\\ z & x+y & y+z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}z & z+x & x\\ y & y+z & z\\ x & x+y & y\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}y & z+x & x\\ x & y+z & z\\ z & x+y & y\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}z & x & x+y\\ y & z & z+x\\ x & y & y+z\end{vmatrix}$$