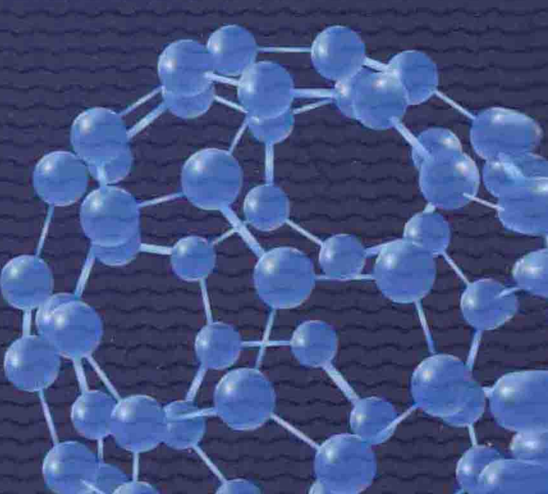
免费提供
电子教案

高等院校规划教材
计算机科学与技术系列

离散数学

刘宝宏 编著



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高等院校规划教材·计算机科学与技术系列

离散数学

刘宝宏　编著

机械工业出版社

本书以离散数学各个分支的基础理论为核心，以理工科大学生的应用需求为出发点，以提高学生的数学素养为目标，以离散数学的基本概念贯穿始终，重点讲授集合论、抽象代数、图论原理和数理逻辑的基本理论和方法，并从建模的观点来分析如何采用离散数学的理论为现实世界建模。希望读者通过本书的学习，能够理解离散数学的基本特点和思维方式，掌握离散数学的基本概念和基本技能，灵活运用离散数学的方法进行相关问题的建模和分析。

本书既可作为高等学校理工科相关专业的教材，也可作为离散数学爱好者的参考书。

本书有电子课件，需要的教师可登录 www.cmpedu.com 免费注册、审核通过后下载，或联系编辑索取（QQ：2966938356，电话：010-88379739）。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学 / 刘宝宏编著. —北京：机械工业出版社，2014.6

高等院校规划教材·计算机科学与技术系列

ISBN 978-7-111-46414-3

Ⅰ. ①离…　Ⅱ. ①刘…　Ⅲ. ①离散数学－高等学校－教材　Ⅳ. ①O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 070774 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）

责任编辑：郝建伟　陈崇昱

责任印制：李　洋

责任校对：张艳霞

北京宝昌彩色印刷有限公司印刷

2014 年 7 月第 1 版·第 1 次印刷

184mm×260mm·14.75 印张·363 千字

0001－3000 册

标准书号：ISBN 978-7-111-46414-3

定价：36.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：（010）88361066	教材网：http://www.cmpedu.com
销售一部：（010）68326294	机工官网：http://www.cmpbook.com
销售二部：（010）88379649	机工官博：http://weibo.com/cmp1952
读者购书热线：（010）88379203	**封面无防伪标均为盗版**

出版说明

计算机技术在科学研究、生产制造、文化传媒、社交网络等领域的广泛应用，极大地促进了现代科学技术的发展,加速了社会发展的进程，同时带动了社会对计算机专业应用人才的需求持续升温。高等院校为顺应这一需求变化，纷纷加大了对计算机专业应用型人才的培养力度，并深入开展了教学改革研究。

为了进一步满足高等院校计算机教学的需求，机械工业出版社聘请多所高校的计算机专家、教师及教务部门针对计算机教材建设进行了充分的研讨，达成了许多共识，并由此形成了教材的体系架构与编写原则，策划开发了“高等院校规划教材”。

本套教材具有以下特点：

1）涵盖面广，包括计算机教育的多个学科领域。

2）融合高校先进教学理念，包含计算机领域的核心理论与最新应用技术。

3）符合高等院校计算机及相关专业人才培养目标及课程体系的设置，注重理论与实践相结合。

4）实现教材“立体化”建设，为主干课程配备电子教案、素材和实验实训项目等内容，并及时吸纳新兴课程和特色课程教材。

5）可作为高等院校计算机及相关专业的教材，也可作为从事信息类工作人员的参考书。

对于本套教材的组织出版工作，希望计算机教育界的专家和老师能提出宝贵的意见和建议。衷心感谢广大读者的支持与帮助！

机械工业出版社

前　言

离散数学是高等院校计算机专业普遍开设的一门基础课程。实际上，离散数学中的数学方法、建模思想等在诸多学科中均有重要应用。在信息时代，离散数学不仅是计算机专业的必修课，还应该成为高等院校理工科其他相关专业的基础课程。很多高校都面向非计算机专业开设了离散数学课程。

作者从 2004 年开始为国防科技大学自动化专业和仿真工程专业的本科生开设离散数学课程。在教学过程中，我们发现现有的离散数学教材主要针对计算机专业的特点和需求编写，没有反映非计算机专业的特点和需求，很少考虑理工科其他专业对离散数学教学目标的不同要求，其他专业的学生在学习离散数学时只能对原有教材进行精简后使用。这些教材注重知识体系的完整性和严谨性，但对数学知识的来龙去脉和数学知识点背后的数学思想阐述不够。

我们认为，非计算机专业“离散数学”的教学目标应该是提高学生的数学素养、逻辑思维能力和采用离散数学的思想对实际问题进行建模的能力。这一目标不同于计算机专业，也不同于数学专业，所以在内容取舍上我们根据专业特点进行了精心选择。为了适应非计算机专业对离散数学教学的需求，同时为广大离散数学爱好者提供一本深入浅出的参考资料，我们在现有各类离散数学教材的基础上，对教学内容和教学方法进行提炼，形成了独具特色的教学内容体系和教学方式，取得了良好的教学效果。本书就是作者多年来教学经验的一个初步总结。

本书以离散数学中各个分支的基础理论为核心，以理工科大学生的应用需求为出发点，以提高学生的数学素养为目标，以离散数学的基本概念贯穿始终，重点讲授集合论、抽象代数、图论原理和数理逻辑的基本理论和方法，并从建模的观点来分析如何采用离散数学的理论为现实世界建模。教材紧贴理工科大学生的特点，选取离散数学中基础性、典型性内容进行讲解，将各部分教学内容有机组织起来，形成合理的教学内容体系，同时保持结构的完整性，组织的合理性。

本书注重对思想方法的分析，使学生学到的不仅仅是数学知识，而且能够体会其背后的数学思想。我们在讲述数学理论的同时给出当时的背景，对数学思想方法的总结，将数学史和数学思想的教学结合起来，将人文素养的培养渗透到教材中，让学生在探索、研究过程中自己去发现数学思想，“提出”数学结论，为学生的探索、发现和创新提供机会。

离散数学的习题浩如烟海，所以本书没有提供大量习题，而是倡导“探索式”学习，通过问题引导学生思考。本书的练习以“停下来，想一想”的形式穿插到相关内容当中。这些

都是需要学生思考并且认真对待的问题，在正文讲解的基础上，希望学生运用已经学到的知识自己去探求、解决这些问题，主动去获取新知识。这对于提高学生的学习能力，培养主动思考的习惯是很有帮助的。学生在学习过程中，一定要养成“多想想”的习惯。这样，由教材中讲到的“一”，学生能够引申出“三”甚至“十”来。另外，书中还设置了很多“问题研究”和“编程实践”题目，希望学生通过课外的拓展练习进一步学习离散数学的相关知识，并通过应用实例提高读者利用离散数学知识对现实世界进行建模抽象的能力，提高读者发现问题和解决问题的能力。

我们衷心希望读者能够通过本书的学习，深入理解离散数学的基本特点和思维方式，掌握离散数学的基本概念和基本技能，灵活运用离散数学的方法进行相关问题的建模和分析。希望本书能成为一本与众不同的离散数学教材，成为一把引领读者进入数学殿堂的钥匙。

本书编写过程中参考了大量国内外已出版的离散数学教材和相关著述，在此对这些文献的作者表示诚挚谢意。

由于作者水平有限，加之时间仓促，书中难免存在不妥之处，请读者原谅，并提出宝贵意见。

作　者

目　录

第二篇 抽象代数

第三篇 图论入门

第一篇 集 合 论

集合论是由德国数学家康托（G. Cantor，1845-1918）在 1871 年前后创立的。康托是 19 世纪末 20 世纪初德国伟大的数学家，是数学史上最富有想象力，也是最具争议的人物之一。他所创立的集合论被誉为 20 世纪最伟大的数学创造。集合的概念大大扩充了数学的研究领域，给数学结构提供了一个统一的基础，集合论不仅影响了现代数学，而且也深深影响了现代哲学和逻辑学。

康托 1845 年 3 月 3 日生于俄国圣彼得堡一个丹麦-犹太血统的富商家庭。1856 年康托和他的父母一起迁居到德国的法兰克福。像许多优秀的数学家一样，他在中学阶段就表现出一种对数学的特殊敏感，并不时得出令人惊奇的结论。1863 年，他进入柏林大学，1867 年获得博士学位。1874 年，康托在克列勒的《数学杂志》上发表了关于无穷集合理论的第一篇革命性文章。数学史上一般认为这篇文章的发表标志着集合论的诞生。

康托的集合论是数学上最具有革命性的理论。他所面对的是数学上最棘手的对象——无穷集合，因此集合论的创立也充满了坎坷。康托在研究集合论时，抛弃了一切经验和直观，他通过理性分析得出的结论经常和人们的常识相悖，令人难以置信，但其推理逻辑严密、不容置疑。康托的创造性工作与传统的数学观念发生了尖锐冲突，遭到一些人的反对、攻击甚至谩骂。有人说，康托的集合论是一种“疾病”，康托的概念是“雾中之雾”，甚至说康托是“疯子”。来自数学权威们的巨大精神压力终于摧垮了康托，使他心力交瘁，患了精神分裂症，住进了精神病医院。

真金不怕火炼，康托的思想终于大放光彩。在 1897 年举行的第一次国际数学家会议上，他的成就终于得到承认。伟大的哲学家、数学家罗素称赞康托的工作“可能是这个时代所能夸耀的最伟大的工作”。可是这时康托已经神志恍惚，不能从人们的崇敬中得到安慰和喜悦。1918 年 1 月 6 日，康托在一家精神病院去世。

集合论是现代数学中重要的基础理论。它的概念和方法已经渗透到代数、拓扑和分析等许多数学分支，以及物理学、生物学等自然科学研究中，为这些学科提供了基础的方法和描述工具，改变了这些学科的面貌。我们甚至可以说，如果没有集合论，就很难对现代数学获得一个深刻的理解。所以集合论的创立不仅对数学基础的研究具有重要意义，而且对现代数学的发展也有深远的影响。

随着信息时代的到来，集合的元素已由传统的“数集”和“点集”拓展成包含文字、符号、图形、图表和声音等的多媒体信息，构成了各种数据类型的集合。集合不仅可以用来表示数及其运算，更可以用来表示和处理非数值信息。数据的增加、删除、修改、排序以及数据间关系的描述等这些很难用传统的数值计算来进行的操作，却可以很方便地用集合运算来处理。从而集合论在编译原理、开关理论、信息检索、形式语言、数据库和知识库、人工智能等各个领域得到了广泛的应用。人们根据实际应用的需要又发展出很多现代集合论，如扎德（Zadeh）的模糊集理论和保拉克（Pawlak）的粗糙集理论，等等。集合论的方法已经成为计算科学工作者不可缺少的数学基础知识。

第1章 经典集合论基础

集合是现代数学中的基本概念。德国大数学家希尔伯特在谈到集合论时曾说过："这对我来说是最值得钦佩的数学理智之花，也是在纯粹理性范畴中人类活动所取得的最高成就之一。没有人能把我们从康托为我们创造的乐园中驱赶出去。"下面就让我们一起走进康托的"乐园"，领略集合论的魅力。

本章主要介绍经典集合论的基本概念、集合的描述、集合运算和幂集等概念及其应用。

1.1 集合的基本概念

在日常生活中，我们经常说人的集合、设备集合、物种集合等。在数学上，自然数集合、整数集合、有理数集合、实数集合更是充斥在各种文献中。那么，集合到底是什么呢？

1.1.1 集合的定义

集合是数学中的基本概念，正如点、直线等概念一样，它是不能用其他概念来精确定义的原始概念。对于集合这一概念存在很多种不同的描述。按照集合论创始人康托的说法，"凡是在我们的感觉或思维中可以明确区分的对象物，把它们看成是一个整体，这个整体，我们就称它是集合"。直观地讲，集合就是所要讨论的一类对象的整体，或者具有同一性质的单元的集体。本书给出关于集合的如下描述性定义：

【定义 1.1】 一些不同的确定的对象的全体称为**集合**，而这些对象称为集合的**元素**。

集合通常用大写英文字母表示，集合中的元素用小写英文字母表示。

下面是集合的一些例子。

例 1.1 集合的实例：

- 方程 $x^2-1=0$ 的实数解集合；
- 26 个英文字母的集合；
- 坐标平面上所有点的集合；
- 全体中国人的集合；
- 所有质数的集合；

⋮

1.1.2 集合的表示

为了描述一个集合，我们引入两种集合的表示方法：

1. 枚举表示法

枚举法是指把集合中的元素全部列出来，并将所有元素写在{ }中，元素之间使用逗号分开。枚举表示法是一种显式表示法。当集合中的元素为无穷多个时，可以只列出部分元素，其余部分可以根据已经列出的元素的规律推出。

例 1.2　用枚举法表示集合：

- 由元素 a，b，c，d 构成的集合表示为 $A=\{a, b, c, d\}$。
- 一个星期的集合可以表示为 $W=\{\text{Sun, Mon, Tue, Wed, Thu, Fri, Sat}\}$。
- 全体正偶数的集合可以表示为 $E=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$。

2．性质表示法

性质表示法，顾名思义就是通过给出集合中的代表元素所必须满足的性质来确定属于这个集合的全部元素。性质表示法是一种隐式表示法。性质表示法的形式为 $A=\{x \mid P(x)\}$。其中，“|”前面的“x”表示集合中的代表元素，它必须满足“|”后面所规定的性质；$P(x)$ 表示元素 x 要满足性质 P。$P(x)$可以是对性质的自然语言描述，也可以是形式化语言描述。

例 1.3　“全体正偶数的集合”用性质表示法表示为

$$A=\{x \mid x \text{ 是正偶数}\} \text{或} A=\{x \mid x=2n, n\in\mathbf{N}^+\}。$$

1.1.3　集合与元素

一个元素 a 属于集合 A 表示为 $a\in A$，元素 a 不属于集合 A 表示为 $a\notin A$。

例 1.4　设 $A=\{x \mid x\in\mathbf{R} \text{ 且 } x^2-1=0\}$，则 $A=\{-1, 1\}$，$1\in A$，$2\notin A$。

【定义 1.2】 在研究集合时，如果所讨论的集合都是某一固定集合的子集，则称该集合为**全集**，一般记为 E。将元素个数为零的集合（即不包含任何元素的集合）称为**“空集”**，记为$\varnothing$。

需要注意的是，一个集合可能是另一个集合的元素，从而构成集合的层次结构。

例 1.5　集合 A 的构成如图 1-1 所示，集合 A 可表示为 $A=\{a, \{b, c\}, d, \{\{d\}\}\}$，则有

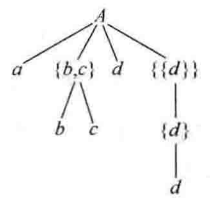


图 1-1　集合的层次结构（例 1.5 图）

$$A=\{a, \{b, c\}, d, \{\{d\}\}\}，\{b,c\}\in A，b\notin A，\{\{d\}\}\in A，\{d\}\notin A，d\in A。$$

1.1.4　集合的特点

在经典集合论中，集合具有确定性、无序性、互异性和多样性等特点，下面我们进一步说明。

1．确定性

在经典集合论中，集合中的元素是确定的。一个元素要么属于一个集合，要么不属于一个集合，不存在模棱两可的情况。例如，对于集合 $A=\{x \mid x \text{ 是自然数，且 } x<100\}$，我们可以确定 $30\in A$，$102\notin A$。

停下来，想一想
“所有好书的集合”、“北京市所有老年人的集合”应如何描述？请给出你的答案，然后再继续阅读。

确定性是经典集合论对元素的基本要求。但对有些集合来说，元素是否属于一个集合却并不那么容易确定。例如“所有好书的集合”，一本书究竟是不是好书，每个人的评判标准不同，不同时代的评价标准也不同；又如“全国所有老年人的集合”，90 岁的人肯定属于老年人

集合，那么 50 岁的人是否属于老年人的集合呢？51 岁、52 岁和 53 岁呢？这些问题在经典集合论里是无法解决的。美国控制论专家 L.A. Zadeh 教授提出的模糊集合是解决此类问题的数学工具。模糊集合描述上述集合的方法是引入“隶属度”的概念。在经典集合中，一个元素对一个集合的隶属度非 1 则 0。而在模糊集合中隶属度是一个函数。例如，所有老年人的集合可描述为

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} 0 & 0<x\leqslant 50 \\ \left\{1+\left[5/(x-50)\right]^{-2}\right\}^{-1} & 50<x\leqslant 100 \end{cases}$$

则易求得

$$\mu_{\tilde{A}}(49)=0,\ \mu_{\tilde{A}}(55)=0.5,\ \mu_{\tilde{A}}(80)=0.973\ 。$$

这表明 49 岁不算老年人，55 岁只能算半老，而 80 岁已经算是很老了。隶属函数的定义可以根据问卷调查、统计数据等多种方式获得。读者可以通过模糊数学方面的书籍来进一步理解模糊集合。

在后面的学习中，读者可以自己研究如何将经典集合中的概念和运算扩展到模糊集合中，并和 Zadeh 教授的思路进行比较。

2．无序性

无序性是指集合的含义与其中元素的顺序无关。例如，集合$\{a, b, c, d, e\}$，$\{d, c, e, a, b\}$和$\{e, c, d, b, a\}$都是表示同一个集合。

当我们列出一个集合时，一般都遵循某种顺序，而无论采用什么顺序，都不会影响集合的含义。

3．互异性

互异性是指集合中的元素互不相同。在一个集合的描述中重复的元素被看做彼此是无区别的，因此可以认为是一个元素。例如,$\{a, b, b, c, c\}$和$\{a, b, c\}$是同一个集合。

4．多样性

从概念上讲，集合中的元素是任意的，它甚至可以是别的已经定义的集合。

例 1.6　以下均是合法的集合：

$A=\{a，b，\{1，2，3\}\}$

$B=\{1，\text{张三}，a，\text{一班}\}$

$C=\{a，\{a\}，\{\{a\}，b\}，\{\{a\}\}，1\}$

$D=\{1，a，*，-3，\{a，b\}，\{x|\,x\ \text{是汽车}\}，\text{地球}\}$

$S=\{a，\{1，2\}，p，\{q\}\}$

延伸阅读

关于集合元素多样性的说明

从概念上讲，一个集合中的元素是任意的，不应对集合中的元素做任何限定，这样才可以保证定义的广泛适用性。但是在实际用到的集合中，通常构成一个集合的元素都是相互关联的，而不是杂乱无章的，这样的集合才是有意义的集合，例如，我们讲的“全体实

数的集合”“本次比赛获得优胜奖的选手的集合”“所有钝角的集合”等都是有意义的集合。但从数学抽象的角度讲，我们并不会对集合中的元素做任何限制。

另一方面，一些元素放在一起所构成的集合有没有意义还要看我们讨论的目的，例如，集合{汽车，手机，别墅}，乍一看是没有意义的，但是如果说这是某人资产的集合，那么这个集合又是有意义的。

问题研究

检索文献，了解集合论的发展历史、康托的生平，进一步认识集合论的意义，深刻理解集合的基本概念。

1.2 集合间的关系

1.2.1 集合之间有哪些关系

设 A 和 B 是两个集合，那么 A 和 B 之间存在什么关系呢？一般来说，集合之间的关系包括以下几种：

1．属于关系

一个集合是另一个集合的元素。例如：

$$A=\{1,2\}，B=\{\{1,2\}，\{3,4\}，\{2,3\}\}，根据定义，有 A\in B。$$

2．相等关系

当且仅当 A、B 两个集合含有完全相同的元素时，称集合 A 和集合 B 相等，记作 $A=B$。例如：

$$\{1,2,4\}=\{1,2,2,4\}$$

$$\{1,2,4\}=\{1,4,2\}$$

$$\{\{1,2\},4\}\neq\{1,4,2\}$$

对于相等关系我们有如下的外延性公理。

【外延性公理】两个集合是相等的，当且仅当它们的元素是相同的。

3．包含关系

如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，称集合 B **包含**集合 A 或集合 A **包含于**集合 B，又称 A 是 B 的子集。记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$。例如：设 $A=\{1,2\}$，$B=\{1, 2, 3, 4\}$，根据定义，有 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$。

请读者注意：$\in$ 和 $\subseteq$ 是不同层次的问题。“$\in$”刻画的是元素与集合之间的关系，而“$\subseteq$”刻画的则是集合之间的关系。

如果 $A\subseteq B$ 并且 $A\neq B$，也就是说集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，同时集合 B 中的元素比集合 A 多，则称 A **真包含于** B 或称 A 是 B 的真子集。

停下来，想一想

是否存在集合 A 和 B，使得 $A\in B$ 且 $A\subseteq B$？若存在，请举一例。请给出你的答案，然

后再继续阅读。

这样的集合 A 和 B 是存在的，例如，设 $A=\{a\}$，$B=\{a, \{a\}, b, c\}$，则有

$$A \in B \text{ 且 } A \subseteq B$$

再如：

$$\varnothing \in \{\varnothing\} \text{ 且 } \varnothing \subseteq \{\varnothing\}。$$

下面给出几个关于集合间关系的定理，这些定理比较简单，其证明请读者自行给出。

【定理 1.1】 对任意集合 A，必有 $\varnothing \subseteq A$。

【定理 1.2】 对任意集合 A，必有 $E \supseteq A$。

【定理 1.3】 对任意集合 A，必有 $\varnothing \subseteq A \subseteq E$。

【推论 1.1】 空集 $\varnothing$ 只有一个。

【定理 1.4】 设有集合 A 和 B，则 $A=B$ 的充分必要条件是 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$。

【分析】 根据我们目前所学的集合论知识，对该定理使用反证法分别证明其充分性和必要性。

【证明】 首先，证明必要性，即证明如果 $A=B$，则 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$。

假设 $A=B$，但 $A \subseteq B$ 和 $B \subseteq A$ 至少有一个不成立，不妨设 $A \subseteq B$ 不成立，即表明至少存在一个 $x \in A$ 但 $x \notin B$，这与已知 $A=B$ 矛盾。类似地，如果 $B \subseteq A$ 不成立，也会与 $A=B$ 矛盾。所以假设不成立，从而必有结论：如果 $A=B$，则 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$。

然后证明充分性，即证明如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则 $A=B$。

假设 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，但 $A \neq B$。根据两个集合相等的定义，至少存在一个元素 x，$x \notin A$ 且 $x \notin B$，或者 $x \in B$ 且 $x \notin A$，但前者与 $A \subseteq B$ 矛盾，后者与 $B \subseteq A$ 矛盾，故假设不成立，从而必有如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则 $A=B$。

命题得证。 □

定理 1.4 十分重要，它是证明两个集合相等的基本方法，同时也建立了集合的相等和包含之间的关系。

延伸阅读

集合概念在计算机中的表示

集合是各种高级程序设计语言中的重要数据结构。下面简要介绍在 Java 语言中如何描述集合相关的数据结构。

Java 中所用的集合类都实现了 Collection 接口。Java 集合类主要分为 3 种类型：

- Set（集）：表示数学上的集合，集合中的对象不按特定方式排序，并且没有重复的对象；
- List（列表）：类似于数组，集合中的对象按照索引位置排序，可以有重复对象，允许按照对象在集合中的索引位置检索对象；
- Map（映射）：集合中的每个元素包含一对键对象和值对象，集合中没有重复的键对象，但值对象可以重复。

关于 Java 集合类的具体使用以及其他编程语言对集合的支持请读者参考相关资料。在后面的学习过程中，读者可以选择一种编程语言来实现集合的计算机表示和集合运算。