特色专业

普通高等教育
自动化类国家级特色专业系列规划教材

现代控制理论基础

胡立坤　徐辰华　吕智林　编著

科学出版社

普通高等教育自动化类国家级特色专业系列规划教材

现代控制理论基础

胡立坤　徐辰华　吕智林　编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书对现代控制理论的基础内容作了深入浅出而翔实的阐述。全书共6章，包括系统的基本概念与数学基础、动态系统的模型与变换、动态系统的运动分析、动态系统的结构分析、动态系统的稳定性分析和确定性动态系统常规控制综合与设计。在内容的取舍上注重对基本问题的深入解释和工程实用性，给出了大量的相关例题，这些例题对于理解问题与实际应用大有裨益，同时注重与复频域理论的联系，书中还渗透了认识论与方法论，有助于提高理性思维。每章配有一定量的思考题用于巩固相关知识。

本书可作为高等学校自动化专业本科生和非自动化专业（电气类、电子类、机电类、生物信息类、生态类）研究生"现代控制理论"课程的教材和参考书，也可以作为广大科技人员自学的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

现代控制理论基础/胡立坤，徐辰华，吕智林编著．一北京：科学出版社，2014.6

普通高等教育自动化类国家级特色专业系列规划教材

ISBN 978-7-03-040960-7

Ⅰ.①现…　Ⅱ.①胡…②徐…③吕…　Ⅲ.①现代控制理论-高等学校-教材　Ⅳ.①O231

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第121929号

责任编辑：余　江　于海云／责任校对：张怡君

责任印制：闫　磊／封面设计：迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2014年6月第　一　版　开本：787×1092　1/16

2014年6月第一次印刷　印张：24 1/2

字数：580 000

定价：49.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

国内外许多高校都将现代控制理论作为一门重要的系统和控制科学课程，其原因可归结为，现代控制理论中大量的概念、方法、原理和结论对系统进行了清晰而明确的阐述，它所涉及的众多概念、方法、原理具有普适性，也对工科学生在认识论和方法论的提高上大有裨益，不仅对工程科学有重要指导作用，还为社会管理科学提供了可行的研究方法。

本教材是编者近年来从事现代控制理论教学自编讲义的基础上进一步整理编写而成的，书中对现代控制理论的基础内容作了深入浅出而翔实的阐述。全书共6章，包括系统的基本概念与数学基础、动态系统的模型与变换、动态系统的运动分析、动态系统的结构分析、动态系统的稳定性分析和确定性动态系统常规控制综合与设计。为方便教学与阅读，将工科基本数学中未深入涉及的相关数学内容提取到第1章讲述，这些数学内容在后面内容中将屡次用到。

本教材的一些特色可归结如下。

(1) 教材对相关概念与原理进行了深入讨论，特别是线性系统运动特性、稳定性和结构特性。

(2) 教材以状态空间表示为主线，但同时也阐述了其与传递函数矩阵描述、矩阵分式描述、多项式矩阵描述的关系，时域论述与复频域论述是关联在一起的，从多个角度阐述对问题的认识。

(3) 教材中的例子加入了与实验密切结合的实际典型对象例子。

(4) 教材中适时给出了一些思考题，引导读者自学时学会思考，有针对性地分析解决问题。

(5) 教材融合了人文素质教育，将相关的普适概念、原理与认识论、方法论结合起来，融课程教学与人文素质教育于一体。

在教学中，对本科可以淡化对理论问题的证明，侧重在理解方法、原理和结论，强调应用原理和方法解决和分析问题；对研究生不仅要强调理解和应用方法，还要加强锻炼对理论问题的思考，从教材的理论证明中汲取方法论，能从理论层面证明和解释一些相关问题。

编　者

2014年3月

目　　录

前言
第 1 章　系统的基本概念与数学基础 …… 1
1.1　系统及其模型 …… 1
1.2　线性空间与坐标变换 …… 4
1.3　多项式矩阵 …… 9
1.4　矩阵的特征值与特征向量 …… 25
1.5　向量与矩阵范数 …… 36
1.6　线性二次型及矩阵的正定性 …… 40
1.7　有理函数矩阵 …… 41
1.8　矩阵指数函数与计算 …… 53
1.9　一阶常微分方程及其解 …… 56
1.10　线性系统与相关问题说明 …… 66
1.11　动态系统控制的概念及几个基本步骤 …… 68
1.12　现代控制理论的主要任务与涉及内容 …… 70
习题 …… 71
第 2 章　动态系统的模型与变换 …… 73
2.1　引言 …… 73
2.2　状态与状态空间模型 …… 73
2.3　基于机理的状态空间建模 …… 78
2.4　状态空间的实现问题 …… 86
2.5　线性系统状态空间表达式的线性变换与特征结构 …… 100
2.6　传递函数矩阵描述及其零极点 …… 106
2.7　线性系统的多项式矩阵描述与零极点 …… 111
2.8　非本质非线性系统的状态空间表达式及其线性化处理 …… 117
2.9　小结 …… 124
习题 …… 124
第 3 章　动态系统的运动分析 …… 127
3.1　引言 …… 127
3.2　线性系统响应解释 …… 127
3.3　连续定常系统状态空间的解与性能 …… 129
3.4　连续时变系统状态空间的解 …… 140
3.5　连续线性系统的状态转移矩阵及其性质 …… 144
3.6　离散系统分析基础——采样与保持 …… 148
3.7　连续线性系统的状态空间表达式的离散化 …… 156

3.8 离散系统状态方程的解 …… 160
3.9 小结 …… 164
习题 …… 164
第 4 章 动态系统的结构分析 …… 166
4.1 引言 …… 166
4.2 连续线性系统能控性与能观性定义 …… 169
4.3 连续线性系统能控性与能观性判据 …… 174
4.4 连续线性系统输出能控性和输出函数能控性及判据 …… 193
4.5 连续线性系统的对偶关系 …… 197
4.6 定常连续线性系统的能控型与能观型 …… 199
4.7 连续线性系统的结构分解 …… 204
4.8 连续定常线性系统的实现问题及其与结构特性间的关系 …… 211
4.9 基于复频域的并串联线性系统的能控性与能观性 …… 230
4.10 离散线性系统的能控能观性及其判据 …… 232
4.11 小结 …… 240
习题 …… 240
第 5 章 动态系统的稳定性分析 …… 243
5.1 引言 …… 243
5.2 内部稳定性的基本概念 …… 244
5.3 不显含时间的自治系统的 Lyapunov 第二法稳定性判据 …… 250
5.4 不显含时间的自治系统的 LaSalle 不变集原理与稳定性 …… 256
5.5 显含时间的自治系统的 Lyapunov 第二法稳定性判据 …… 258
5.6 显含时间的自治系统的类不变性原理与稳定性 …… 264
5.7 自治系统构造 Lyapunov 函数的方法 …… 268
5.8 线性系统的状态运动稳定性判据 …… 273
5.9 线性系统稳定自由运动的衰减性能估计 …… 283
5.10 自治系统的 Lyapunov 第一法稳定性判据 …… 286
5.11 典型二阶动力学系统的稳定性 …… 291
5.12 自治离散系统的稳定性定义与判据 …… 292
5.13 线性系统的输入输出稳定性 …… 298
5.14 小结 …… 300
习题 …… 300
第 6 章 确定性动态系统常规控制综合与设计 …… 303
6.1 引言 …… 303
6.2 连续时间线性时不变反馈控制系统的结构特性 …… 306
6.3 离散时间线性时不变反馈控制系统的结构特性 …… 318
6.4 线性时不变系统的极点配置问题提法与指标确定 …… 320
6.5 线性时不变系统状态反馈极点配置的存在性与算法 …… 324
6.6 线性时不变系统从输出到状态矢量导数反馈极点配置 …… 335

6.7 线性时不变系统状态反馈与从输出到状态矢量导数反馈复合极点配置 ……… 335
6.8 线性时不变系统输出反馈极点配置存在性与算法 ………………………………… 336
6.9 线性时不变系统反馈镇定问题与求解 ……………………………………………… 346
6.10 线性时不变系统解耦控制………………………………………………………… 350
6.11 基于观测器的线性时不变系统状态反馈控制…………………………………… 366
6.12 小结……………………………………………………………………………………… 380
习题………………………………………………………………………………………… 381
参考文献………………………………………………………………………………………… 384

第 1 章　系统的基本概念与数学基础

20 世纪 50 年代以来，世界各地的控制理论研究者投身于现代控制理论的研究，使其得到蓬勃发展。现代控制理论从诞生之日起就与数学有着极紧密的联系。为了更好地应用控制理论为工程和社会服务，需要透彻理解和掌握相关的数学理论基础，进而吸收现代控制理论的最新成果并推动其发展。

本章首先从系统概念与模型入手，介绍了相关概念、特征、分类、模型形式。其次为了方便教学与自学，选择了现代控制理论所涉及的数学基础，如线性空间与坐标变换、多项式矩阵、有理分式矩阵、矩阵特征值与特征向量、范数、矩阵指数函数、一阶常微分方程与解进行了回顾，有些内容是为了沟通经典控制理论与现代控制理论的联系而加入的。再次又回归到系统，讨论了线性系统的概念与几个基本问题，阐述了动态系统控制的几个基本步骤与特征。最后介绍了目前现代控制理论所涵盖的内容。中间的数学内容，如果读者对部分内容已比较熟悉，可以根据需要跳过这些内容。

1.1　系统及其模型

1.1.1　系统的概念、特征与分类

系统(system)一词来源于古代希腊文(systεmα)，意为部分组成的整体。系统论创始人贝塔朗菲定义："系统是相互联系相互作用的诸元素的综合体"。现代哲学观点认为，系统是由相互关联和相互制约的若干"部分"(元)所组成的具有特定功能的一个"整体"。这一定义指出了系统的几个特征。

(1) 多元性。系统是多样性的统一，差异性的统一，多部件的统一。

(2) 相关性。系统不存在孤立元素组分，所有元素或组分间相互依存、相互作用、相互制约。

(3) 整体性。系统是所有元素构成的复合统一整体，强调结构上的整体性。系统由"部分"组成，各部分相互作用是由物质、能量和信息交换实现的。

(4) 相对性。"整体"(系统)与"部分"称谓是相对的，系统又同时是构成其他系统的部分或"子整体"。

(5) 抽象性。强调高于现实系统，代表了一类系统。对具体的物理系统、自然系统、社会系统的抽象有助于揭示系统的一般特性和规律，具有普适性。也可以说，这种抽象抓住了主要矛盾。

系统状态由描述系统行为特征的变量来表示，并随着时间推移不断演化，导致这种演化的原因中最主要有两点。

(1) 外部环境影响，这是演化的外因，包括人为的控制作用，即有目的行为。

(2) 内部组成部分的相互作用，这是演化的内因。

系统可分为静态系统和动态系统两类。代数系统是一种静态变换，而动态系统则与时间或空间相关。后者普遍存在于自然系统、工程系统和社会系统中，系统状态按确定规律或确定

的统计规律演化。若一个动态系统中有代数约束，则称这种系统为广义系统，它也广泛存在于现实生活中，如电力系统、经济系统、生物系统、奇异摄动系统等。对静态系统，状态是不变的；而对动态系统状态是变化的。状态的"静"与"动"用数学语言表示就是状态的导数是否为零。

1.1.2 动态系统与建模

动态系统指系统状态变量随时间或空间发生演化的系统。其状态变量被定义为时间或空间的函数。这里的状态指足以描述系统过去与现在演化特性的性状的最小集合。

1. 动态系统的行为表征

动态系统的行为表征由各类变量间的关系表征。系统变量有三种形式。

(1) 输入变量包括控制变量、投入变量、扰动变量。

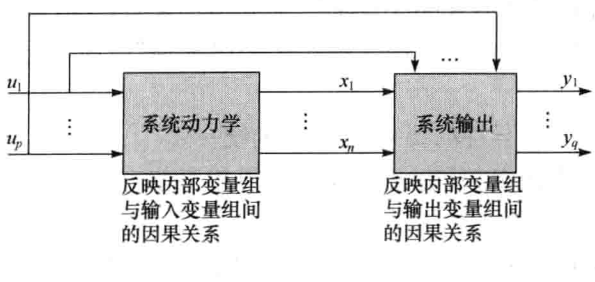
(2) 状态变量是系统内部状态的反映，是动态系统行为表征的实质。

(3) 输出变量表征了动态系统的响应及产出。

动态系统一般通过微分方程或差分方程组来建立各变量间的关系。通过基本理论推导方程组，并进行数值计算，得到系统运动规律和各种性质的严格的或定理性的表达。

2. 动态系统的描述基本形式

动态系统的一般形式有内部描述与外部描述两种基本形式。前者是一个"白箱"，内部行为特征可见，通常用状态空间描述，即通过机理表现出各状态变量间的数学化关系。后者是一个"黑箱"，内部形式不可见，通常用在关注输入输出的场合，如图 1-1 所示，系统有 p 个输入（一般用 $\boldsymbol{u}$ 表示）、n 个状态（一般用 $\boldsymbol{x}$ 表示）、q 个输出（一般用 $\boldsymbol{y}$ 表示）。



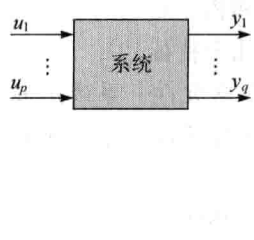


图 1-1　描述动态系统的两种基本形式

对两者进一步说明如下。

(1) "黑箱"描述反映的是输入输出的关系，而"白箱"描述反映的则是内部独立变量的变化。无论哪种描述对实际系统均应满足因果系统要求。

(2) 传递函数(矩阵) 描述只能应用于线性定常系统，而状态空间描述则可以用于所有动态系统。

(3) 高阶微分方程不易求解，而状态空间描述处理的是一阶微分方程，利用矩阵微分方程的解理论较易求解。

(4) 传递函数(矩阵)描述的是在系统初始条件松弛假定下的输入输出关系，而状态方程初始条件可以非零。

(5) 对于机理不明确的复杂系统,很难建立状态空间模型,而借助于超低频特性测试仪,用实验方法可以得到系统的频域特性,进而获得系统的传递函数。这一点在经典控制理论中已有经验。

3. 动态系统的分类

动态系统的分类方法有很多,下面是一些分类情况。

(1) 按系统机制来分:连续变量动态系统(CVDS)、离散事件动态系统(DEDS)。

(2) 按系统特性来分:线性系统(LS)、非线性系统(NLS)。

(3) 按系统参数分布性来分:集中参数-单维系统(Lumped Parameter System,LPS)、分布参数-多维系统(Distributed Parameter System,DPS)。

(4) 按系统作用时间来分:连续时间系统(CTS)、离散时间系统(DTS)。

(5) 按参数随时间变化性来分:定常系统(TIS)、时变系统(TVS)。

本教材限于研究确定性的连续变量、连续/离散时间、线性、集中参数、时不变系统,这是研究其他系统理论的基础。

例 1-1 判断下列方程中所描述系统的类型,初始条件松弛。

(1) $2t\ddot{y}(t)+5\dot{y}(t)+e^{-t}y(t)=u(t)$;

(2) $\dddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+6y(t)+10=u(t)$;

(3) $\ddot{y}(t)=3\dot{y}(t)y^2(t)+2y(t)\dot{u}(t)+u^2(t)$;

(4) $y(t)=\begin{cases}0, & u(t)<2\\ 2u(t), & u(t)\geqslant 2\end{cases}$;

(5) 均匀直杆纵向振动方程(波动方程):$\rho A\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=EA\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$。

解 (1) 集中参数、线性、时变、动态;

(2) 集中参数、非线性、定常、动态;

(3) 集中参数、非线性、定常、动态;

(4) 集中参数、非线性、定常、静态;

(5) 分布式参数、线性、定常、动态。

4. 动态系统的模型与建模

无论自然系统、工程系统,还是社会系统,系统模型均可用来揭示规律或因果关系;可以用于预测或预报;可以为系统向好的方向发展设计控制方案提供依据。建模就是要得到状态变量、输入变量、输出变量、参量、常量间的关系,可以用数据、图表和数学表达式、计算机程序、逻辑关系或各种方式结合来表示。随着所考察问题的性质不同,一个系统可以有不同类型的数学模型,它们代表了系统的不同侧面的属性,对系统建模实质就是对各变量和参量间的关系按照研究需要的角度进行描述,是现实世界中的系统或其部分的行为和特性一个简化描述,并不能完全真实反映实际结构。

建立工程系统模型可以通过两种途径。

一是机理建模,针对已知结构和参数的工程系统,通过理论分析并合理简化推导建立系统模型,模型一般采用动态微分方程表示,当然也可以给出其派生形式,如传递函数、状态空间表示等。

“理论分析”就是利用已有定律与定理对工程系统进行建模。工程系统按其能量属性分为电气、机械、机电、气动、液压、热力的物理规律，常用的定律有物质不灭定律、能量守恒定律、牛顿第二定律、动量矩定理、机械转矩平衡定律、热力学定律、KCL、KVL。而“合理简化”指要抓住主要矛盾，将本质提取出来，建立一个简洁且能反映实际系统物理量变化的相当适用的数学模型。

二是系统辨识，针对内部结构和特性尚不清楚，甚至不了解的情况（“黑箱”），根据一定数量的在系统运行过程中实际观察的物理量数据，利用统计规律和系统辨识算法合理地估计反映系统各物理量相互制约关系的数学模型。

“数据”是通过对系统施加激励，观察和测量响应获得的，由此采用统计学方法建立方程、曲线、图表。需要注意的是，不能随便施加激励，并且只可在线运行获得数据。系统辨识中最基本的方法是最小二乘法，由此建立系统变量间的关系。

社会系统的建模与工程系统有类似的地方，也有不同的地方，往往时间尺度比较大，如社会制度变革、社会经济发展、人口发展、社会可持续发展（巨系统）、现代社会运作等，对这些系统建模重要的目的是产生决策和调控。

为了模型方便分析与应用，无论哪种建模方式，还是针对哪类系统建模，均要遵循建模原则：建模必须在模型的简练性和分析结果的准确性间作出适当的折中。

1.2　线性空间与坐标变换

1.2.1　线性空间

1. 数域的概念

设 **P** 是包含 0 和 1 在内的数集，如果 **P** 中任意两个数的和、差、积、商（除数不为零）仍是 **P** 中的数，则称 **P** 为一个数域。如常用的数域有 **Q**（有理数域）、**R**（实数域）、**C**（复数域）。

例 1-2　判断是否是数域。

$\mathbf{P}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$，$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$两个集合是数域吗?

解　按定义进行简单的运算便可判定：前一个是数域，后一个不是数域。

2. 线性空间的概念

设 **P** 是一个数域，**V** 是 **P** 上的一个非空集合，在 **V** 上定义了两种代数运算“+”，“·”。令 k、m 是 **P** 中的任意数，$\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$ 分别是 **V** 中的任意元素（元素可以是标量、向量、矩阵等），如果这两种运算满足：

(1) 加法交换律 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$；

(2) 加法结合律$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$；

(3) 有 **0** 元（V 中的元素），即 $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$，且 **0** 元是唯一的；

(4) V 中任意元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 有负元 $\boldsymbol{\alpha}'$，即 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}'=\mathbf{0}$，且负元唯一；

(5) $1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$；注意这里的 1 是 **P** 中的元素；

(6) $k\cdot(m\cdot\boldsymbol{\alpha})=(km)\cdot\boldsymbol{\alpha}$；

(7) $(k+m)\cdot\boldsymbol{\alpha}=k\cdot\boldsymbol{\alpha}+m\cdot\boldsymbol{\alpha}$；

(8) $k\cdot(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\cdot\boldsymbol{\alpha}+k\cdot\boldsymbol{\beta}$。

则称 $\mathbf{V}$ 是 $\mathbf{P}$ 上的线性空间。

思考　如何用数域定义证明：

① $0\cdot\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$(提示：用(7)令 $m=-k$)；

② $k\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$(提示：用(8)令 $\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\alpha}$)；

③ 若 $k\cdot\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，则 $k=0$ 或 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$。

例 1-3　判断是否是线性空间。

全体正实数，对于定义的加法与数量乘($a\oplus b=ab,k\cdot a=a^k$)能够成实数域上的线性空间吗？

解　0 元是 1；负元是倒数；但其他性质不符，故不能构成实数域上的线性空间。

3. 线性相关与线性无关的概念

设 $\mathbf{V}$ 是数域 $\mathbf{P}$ 上线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r(r\geqslant 1)$ 是 $\mathbf{V}$ 中向量(可以是矩阵或更高维的)。如果存在 r 个不全为 0 的 $k_1,k_2,\cdots,k_r\in\mathbf{P}$，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0}$，则称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关(其中一个向量必能被其他的向量线性表示)；反之称为线性无关。

例 1-4　判断线性相关性。

实数域 $\mathbf{R}$ 上线性空间 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的一组向量(矩阵)

$$\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

是线性无关的吗？

解　按定义令 $k_{11}\boldsymbol{E}_{11}+k_{12}\boldsymbol{E}_{12}+k_{21}\boldsymbol{E}_{21}+k_{22}\boldsymbol{E}_{22}=\mathbf{0}$，只有当 $k_{11}=k_{12}=k_{21}=k_{22}=0$ 时才成立，所以线性无关。

4. 线性空间维数的概念

如果线性空间 $\mathbf{V}$ 中有 n 个线性无关的向量，但是没有更多数目的线性无关向量，则称 $\mathbf{V}$ 是 n 维的，记 $\dim(\mathbf{V})=n$。注意：这里 $\mathbf{V}$ 是 n 维的并不是说内含向量是 n 维的。同时这 n 个线性无关的向量(如 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$)称为 $\mathbf{V}$ 的一组基，且 $\mathbf{V}$ 中其他任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均可由这组基唯一表示，即

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

称 x_i 组成向量为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标向量。几何上，基就是某种坐标系中坐标轴的集合。

下面分析一个问题，对于空间 $\mathbf{V}$，基有多个，那么任一向量在这些基下的坐标能否转换？

事实上，令 $\mathbf{R}^n$ 的两组基分别为$\{\boldsymbol{e}_i,i=1,2,\cdots,n\}$，$\{\boldsymbol{e}'_j,j=1,2,\cdots,n\}$，则由于 $\mathbf{V}$ 中任一向量可由第一个基表示，所以存在非奇异方阵 $\boldsymbol{P}$(称从前一基到后一基的过渡矩阵)使得

$$(\boldsymbol{e}'_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{e}'_n)=(\boldsymbol{e}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{P}\tag{1-1}$$

于是，$\forall\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{e}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{e}'_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{e}'_n)\begin{pmatrix}x'_1\\\vdots\\x'_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{e}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}x'_1\\\vdots\\x'_n\end{pmatrix}$。所以，基

变化前后对应坐标关系为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \tag{1-2}$$

这说明：基于任意属于 $\mathbf{R}^n$ 的一个元素对应于某一基的坐标与这一元素对应另一基的坐标之间可以通过基与基之间的坐标转换实现。

例 1-5 求基之间的过渡矩阵和空间中元素在基下的坐标。

已知 $\mathbf{R}^4$ 的两组基：

① $\boldsymbol{\varepsilon}_1=[1\quad 0\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=[0\quad 1\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3=[0\quad 0\quad 1\quad 0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_4=[0\quad 0\quad 0\quad 1]^{\mathrm{T}}$；

② $\boldsymbol{\eta}_1=[2\quad 1\quad -1\quad 1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2=[0\quad 3\quad 1\quad 0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_3=[5\quad 3\quad 2\quad 1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_4=[6\quad 6\quad 1\quad 3]^{\mathrm{T}}$。

求：(1) 由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 的过渡矩阵；

(2) $\boldsymbol{\xi}=[1\quad 0\quad 0\quad -1]^{\mathrm{T}}$ 在两组基下的坐标。

解 (1) 由题得

$$(\boldsymbol{\eta}_1\quad \boldsymbol{\eta}_2\quad \boldsymbol{\eta}_3\quad \boldsymbol{\eta}_4)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1\quad \boldsymbol{\varepsilon}_2\quad \boldsymbol{\varepsilon}_3\quad \boldsymbol{\varepsilon}_4)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

故过渡矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(2) $\boldsymbol{\xi}$ 在 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 下的坐标为

$$\boldsymbol{\xi}=[1\quad 0\quad 0\quad -1]^{\mathrm{T}}$$

$\boldsymbol{\xi}$ 在 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 下的坐标为

$$\boldsymbol{P}^{-1}[1\quad 0\quad 0\quad -1]^{\mathrm{T}}=[5/3\quad 8/9\quad 1\quad -11/9]^{\mathrm{T}}$$

1.2.2 线性映射与线性变换

1. 线性映射

设 $\mathbf{V}_1$、$\mathbf{V}_2$ 是数域 $\mathbf{P}$ 的两个线性空间，$\boldsymbol{T}$ 是 $\mathbf{V}_1$ 到 $\mathbf{V}_2$ 的一个映射，如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in\mathbf{V}_1$ 且 n，$m\in\mathbf{P}$，均有 $\boldsymbol{T}(n\boldsymbol{\alpha}_1+m\boldsymbol{\alpha}_2)=n\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\alpha}_1)+m\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\alpha}_2)$，则称 $\boldsymbol{T}$ 是 $\mathbf{V}_1$ 到 $\mathbf{V}_2$ 的线性映射(同态映射)。若 $\boldsymbol{T}$ 是一个一一映射，则 $\boldsymbol{T}$ 称为同构映射。同构映射要求 $\mathbf{V}_1$、$\mathbf{V}_2$ 的维数相等。

线性映射 $\boldsymbol{T}$ 的值域 $\mathbf{R}(\boldsymbol{T})=\mathrm{Im}(\boldsymbol{T})=\{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\alpha})\mid\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{V}_1\}$，它是 $\mathbf{V}_2$ 的子空间。

线性映射 $\boldsymbol{T}$ 的核 $\ker(\boldsymbol{T})=N(\boldsymbol{T})=\{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{V}_1\mid\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}\}$，它是 $\mathbf{V}_1$ 的子空间。

与线性映射相关的结论如下。

(1) 线性映射由基像组唯一确定。

(2) 设 $\boldsymbol{T}$ 是 n 维线性空间 $\mathbf{V}_1$ 到 m 维线性空间 $\mathbf{V}_2$ 的线性映射，$\boldsymbol{\zeta}_1,\boldsymbol{\zeta}_2,\cdots,\boldsymbol{\zeta}_n$ 和 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$ 分别是 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{V}_2$ 中的基。$\boldsymbol{T}$ 在这对基下的矩阵是 $\boldsymbol{A}$(唯一的)，即

$$(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\zeta}_1),\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\zeta}_2),\cdots,\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\zeta}_n))=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m)\boldsymbol{A} \tag{1-3}$$

则

① 线性映射 $\boldsymbol{T}$ 的值域是由基像组张成的空间，即 $\mathbf{R}(\boldsymbol{T})=\mathrm{span}\{\boldsymbol{T}(\zeta_1),\boldsymbol{T}(\zeta_2),\cdots,\boldsymbol{T}(\zeta_n)\}$。

② $\boldsymbol{T}$ 的秩 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{T})=\dim(\mathbf{R}(\boldsymbol{T}))=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$。

③ $\mathrm{rank}(\boldsymbol{T})+\dim(\ker(\boldsymbol{T}))=n$。

思考 如何证明该式？

④ 若对 $\forall\boldsymbol{\alpha}\in V_1$，$\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\zeta_i$，$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\alpha})=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\boldsymbol{\eta}_i$，则 $\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$。

思考 如何证明该式？提示：利用式(1-3)。

(3) 同一线性映射在不同基对下的矩阵一般是不同的，线性映射在不同基对下的矩阵间是相抵（等价）的。

思考 如何说明该结论？

2. 线性（坐标）变换

设 $\mathbf{V}$ 是数域 $\mathbf{P}$ 上线性空间，$\mathbf{V}$ 到自身的线性映射称为 $\mathbf{V}$ 上线性变换。对 $\mathbf{V}$ 上的一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 分别进行线性变换，得

$$\begin{cases}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=a_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{21}\boldsymbol{\varepsilon}_2+a_{31}\boldsymbol{\varepsilon}_3+\cdots+a_{n1}\boldsymbol{\varepsilon}_n\\ \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=a_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{22}\boldsymbol{\varepsilon}_2+a_{32}\boldsymbol{\varepsilon}_3+\cdots+a_{n2}\boldsymbol{\varepsilon}_n\\ \qquad\vdots\\ \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\varepsilon}_n)=a_{1n}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{2n}\boldsymbol{\varepsilon}_2+a_{3n}\boldsymbol{\varepsilon}_3+\cdots+a_{nn}\boldsymbol{\varepsilon}_n\end{cases}$$

记 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\varepsilon}_3),\cdots,\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\varepsilon}_n))$，则

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A}\quad(1\text{-}4)$$

这个表达式说明：基向量的像仍可用基线性表示。

与线性变换相关结论：设 n 维线性空间 $\mathbf{V}$ 上的线性变换 $\boldsymbol{T}$ 在基 $\{\boldsymbol{e}_i,i=1,2,\cdots,n\}$，$\{\boldsymbol{e}'_j,j=1,2,\cdots,n\}$ 下的矩阵分别为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，而由前一基到后一基的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$，即 $(\boldsymbol{e}'_1\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{e}'_n)=(\boldsymbol{e}_1\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{P}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，即 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 互为相似。此结论说明：线性变换在不同基下对应的矩阵是相似的；两个相似的矩阵也可以看成同一线性变换在两组基下对应的矩阵。注：这个结论是线性映射下结论的特例。

思考 如何说明此结论的正确性？

例 1-6 求映射在基下的变换阵。

设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 是 4 维线性空间 $\mathbf{V}$ 的一组基，线性变换 $\boldsymbol{T}$ 在这组基下的矩阵为 $\begin{bmatrix}1&0&2&1\\ -1&2&1&3\\ 1&2&5&5\\ 2&-2&1&-2\end{bmatrix}$。

(1) 求 $\boldsymbol{T}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1-2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_4,\boldsymbol{\eta}_2=3\boldsymbol{\varepsilon}_2-\boldsymbol{\varepsilon}_3-\boldsymbol{\varepsilon}_4,\boldsymbol{\eta}_3=\boldsymbol{\varepsilon}_3+\boldsymbol{\varepsilon}_4,\boldsymbol{\eta}_4=2\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 下的矩阵。

(2) 求 $\boldsymbol{T}$ 的值域与核。

解 (1) 先求 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 到 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 的过渡矩阵。依题得

$$[\boldsymbol{\eta}_1 \quad \boldsymbol{\eta}_2 \quad \boldsymbol{\eta}_3 \quad \boldsymbol{\eta}_4]=[\boldsymbol{\varepsilon}_1 \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 \quad \boldsymbol{\varepsilon}_3 \quad \boldsymbol{\varepsilon}_4]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 3 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 2\end{bmatrix}=[\boldsymbol{\varepsilon}_1 \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 \quad \boldsymbol{\varepsilon}_3 \quad \boldsymbol{\varepsilon}_4]\boldsymbol{P}$$

所以,$\boldsymbol{T}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}2 & -3 & 3 & 2\\ 2/3 & -4/3 & 10/3 & 10/3\\ 8/3 & -16/3 & 40/3 & 40/3\\ 0 & 1 & -7 & -8\end{bmatrix}$$

(2) 对于 $\forall\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{V}$,有 $\boldsymbol{\alpha}=\sum_{i=1}^{4}x_i\boldsymbol{\varepsilon}_i$,

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{T})=\{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\alpha})\}=\left\{\sum_{i=1}^{4}x_i\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\varepsilon}_i)\right\}=\operatorname{span}\{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\varepsilon}_3),\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\varepsilon}_4)\}$$

由线性变换 T 的秩定义,得 $\dim\{T(\boldsymbol{\alpha})\}=\operatorname{rank}(T)=\operatorname{rank}(A)=2$,所以,$\dim(\ker(T))=4-2=2$。

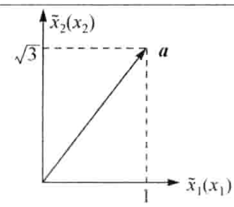
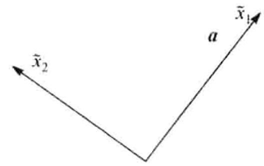
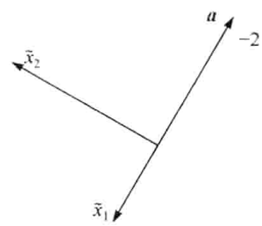
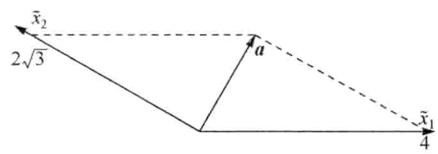
令 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=[1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_2=[0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_3=[0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_4=[0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^{\mathrm{T}}$,显然 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 构成了 $\mathbf{R}^4$ 的一组基,则由 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\alpha})=0$,得 $[\boldsymbol{\varepsilon}_1 \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 \quad \boldsymbol{\varepsilon}_3 \quad \boldsymbol{\varepsilon}_4]\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=0$,即 $\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\mathbf{0}$,解此方程得 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}-2\\-\frac{3}{2}\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}$。所以 $\ker(\boldsymbol{T})=\left\{\boldsymbol{x}\,\middle|\,\boldsymbol{x}=k_1\begin{bmatrix}-2\\-\frac{3}{2}\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{bmatrix},k_1,k_2\in\mathbf{R}\right\}$。

下面讨论一个问题:线性变换的目的是什么?从上面的例子已看到,线性变换可以将一种基下的矩阵变成另一种基下的新矩阵,假若新基选择合适,则可以通过相似变换实现其相应的矩阵,具有较简洁的形式,这将在一定程度上消除系统变量间的耦合关系,也为分析系统提供了方便。在控制理论中,通常将坐标线性变换表示为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{z}$,其中,$\boldsymbol{P}$ 表示变换阵。若 $\boldsymbol{P}$ 是相对于直角正交系到新坐标系的过渡矩阵,那么其每一列相当于一个坐标轴(向量),而坐标分量代表了这个向量在 $\boldsymbol{P}$ 所代表的坐标系(基)下的坐标值。向量还是原来的,只是在不同坐标系(基)下坐标值不一样。

例 1-7 求新坐标系下的变换阵与新坐标值。

已知某向量 $\boldsymbol{a}$ 在某一基下表示为 $\boldsymbol{x}=(1 \quad \sqrt{3})^{\mathrm{T}}$,通过一些变换后的新值如表 1-1 所示。

表 1-1　几种坐标变换例子

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{z}(=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x})$	$\Vert \boldsymbol{z} \Vert_2$	图形	线性变换方式
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$	2		单位(正交)
$\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	2		标准正交 (Given 60°R)
$\begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$	2		标准正交 Householder
$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$	2		普通

从表中可以看出，标准正交变换可以保持坐标范数的一致性，而其他线性变换却不能。这在理论上是由正交变换性质决定的，即对于正交变换 $\boldsymbol{P}$ 有 $\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$，于是有

$$\Vert \boldsymbol{z} \Vert_2=\sqrt{\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}}=\sqrt{(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}}=\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\ (\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}}=\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}}=\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}=\Vert \boldsymbol{x} \Vert_2 \tag{1-5}$$

这表明标准正交矩阵运算是数值稳定的。

同时，正交矩阵的条件数是最小的(为 1)，也可以说明其运算是数值稳定的。关于条件数，后面的内容会涉及。

1.3　多项式矩阵

1.3.1　多项式矩阵的概念

以多项式为元组成的矩阵称为(实数域上的)多项式矩阵，记为

$$\boldsymbol{A}(s)=[a_{ij}(s)]_{m\times n} \tag{1-6}$$

其全体记为 $\mathbf{R}^{m\times n}[s]$。实际上，多项式矩阵是对实数矩阵的扩展，实数矩阵就是各元均为零次多项式的一类特殊多项式矩阵，所以在矩阵的运算上并没有特殊的地方。

对一个方多项式矩阵 $\boldsymbol{A}(s)$ 如果 $\det(\boldsymbol{A}(s))\equiv 0$，称其为奇异的；否则，如果 $\det(\boldsymbol{A}(s))\neq 0$，称其为非奇异的。

思考　对奇异与非奇异多项式矩阵如何理解？

方多项式矩阵$\boldsymbol{A}(s)$是否有逆取决于$\boldsymbol{A}(s)$是否非奇异且对$\forall s$，是否$\boldsymbol{A}(s)\neq\boldsymbol{0}$(即后面要讲的单模)。其逆的计算与数值方阵一样。$\boldsymbol{A}(s)$非奇异与$\boldsymbol{A}(s)$行/列多项式向量线性无关等价；$\boldsymbol{A}(s)$奇异与$\boldsymbol{A}(s)$行/列多项式向量线性相关等价。值得注意的是，多项式向量的线性相关性，不仅依赖于向量组本身，而且依赖于使下式成立的非零$\boldsymbol{\beta}(s)$的存在性

$$(\boldsymbol{a}_1(s)\quad \boldsymbol{a}_2(s)\quad \cdots\quad \boldsymbol{a}_n(s))\boldsymbol{\beta}(s)=0 \tag{1-7}$$

式中，$\boldsymbol{\beta}(s)\in\mathbf{R}^{n\times 1}(s)$或者$\boldsymbol{\beta}(s)\in\mathbf{R}^{n\times 1}$。注意这两种情况可能得到不同的结果，一般在判定线性相关性时取$\boldsymbol{\beta}(s)\in\mathbf{R}^{n\times 1}(s)$。

对于非方多项式称一个多项式矩阵$\boldsymbol{A}(s)=(\boldsymbol{a}_1(s)\quad \boldsymbol{a}_2(s)\quad \cdots\quad \boldsymbol{a}_n(s))$的列可简约，当且仅当$\boldsymbol{A}(s)$对$s$的至少一个值(如$b$)为列线性相关的，即存在不为零的常数矢量$\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}^{n\times 1}$，使$\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{\beta}|_{s=b}=0$；否则称为列不可简约。

对于非方多项式称一个多项式矩阵$\boldsymbol{A}(s)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}'_1(s)\\ \boldsymbol{a}'_2(s)\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}'_n(s)\end{pmatrix}$的行可简约，当且仅当$\boldsymbol{A}(s)$对$s$的至少一个值(如$a$)为行线性相关的，即存在不为零的常数矢量$\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^{1\times m}$，使$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}(s)|_{s=a}=0$；否则称为行不可简约。

多项式矩阵的秩$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}(s))=r$，即至少存在一个$r\times r$子式不恒等于零，而所有等于或大于$(r+1)\times(r+1)$的子式均恒等于零。显然$0\leqslant r\leqslant\min(m,n)$。秩的引入是对方多项式矩阵的奇异性和非奇异性在表示上的统一化：方多项式矩阵的非奇异对应于满秩，而奇异对应于降秩；秩的引入可使方多项式矩阵的奇异程度定量化，秩越小，奇异程度越大；秩的引入也适用于非方多项式矩阵。多项式矩阵的秩有两个性质。

(1) 对任意非零如式(1-6)的多项式矩阵，任取非奇异$m\times m$阵$\boldsymbol{T}(s)$和$n\times n$阵$\boldsymbol{Q}(s)$，则必成立

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}(s))=\operatorname{rank}(\boldsymbol{T}(s)\boldsymbol{A}(s))=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{Q}(s)) \tag{1-8}$$

(2) 令$\boldsymbol{T}(s)$和$\boldsymbol{Q}(s)$为任意非零$m\times n$和$m\times p$多项式矩阵，则必有

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{T}(s)\boldsymbol{Q}(s))\leqslant\min(\operatorname{rank}(\boldsymbol{T}(s)),\operatorname{rank}(\boldsymbol{Q}(s))) \tag{1-9}$$

在多项式矩阵中有一类具有特有性质且应用广泛的矩阵称为单(幺)模矩阵，它指对于一个方多项式矩阵$\boldsymbol{A}(s)$满足$\det(\boldsymbol{A}(s))=c$，$c$为独立于$s$的非零常数。实际上，单(幺)模矩阵对于$\forall s\in\mathbf{C}$，多项式矩阵$\boldsymbol{A}(s)$均为可逆，所以单模矩阵$\boldsymbol{A}(s)$是非奇异的。单(幺)模矩阵的一个基本性质：一个方多项式矩阵$\boldsymbol{A}(s)$为单模矩阵，当且仅当$\boldsymbol{A}^{-1}(s)$也是多项式矩阵；并且$\boldsymbol{A}^{-1}(s)$也是单模的。

思考 如何证明这一基本性质？(提示：充分利用多项式矩阵伴随阵的特点和逆矩阵的特点)

例 1-8 计算多项式矩阵的秩，并说明该矩阵是否是单模矩阵。

已知$\boldsymbol{A}(s)=\begin{pmatrix}s+2 & s^2+3s+2\\ s-1 & s^2-1\end{pmatrix}$，求该矩阵的秩，并说明该矩阵是否是单模矩阵。

解 易看出所有1阶子式均不恒等于0，而2阶子式为0，所以据定义，$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}(s))=1$，在实数多项式集合上是线性相关的。由于2阶行列式值为0，所以它不是单模矩阵。

思考 若相关系数在实数域上取值，再次判定上例矩阵列向量的线性相关性。