大学数学学习辅导丛书

高等数学典型题解答指南

第2版

主编 李汉龙 王金宝 缪淑贤

- 联系考研，渗透精讲历年考研真题
- 典型例题，深入讲解思路方法技巧
- 习题答案，权威提供详尽准确解析
- 同步自测，梯度测试提升应试能力

国防工业出版社
National Defense Industry Press

大学数学学习辅导丛书

高等数学典型题解答指南

（第2版）

主　编　李汉龙　王金宝　缪淑贤
副主编　艾　瑛　闫红梅　律淑珍
参　编　隋　英　孙丽华　孙艳玲

国防工业出版社
·北京·

内 容 简 介

本书是在2011年出版第1版的基础上修订的，对全书的内容作了全新的修订，修正了第1版中出现的一些错误，替换了第12章全部测试题.内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、自测试题及解答，共12章.前11章配备了较多的典型例题和同步习题，并对典型例题给出了详细的分析、解答和评注.第12章是自测试题及解答.

本书可作为理工科院校本科各专业学生的高等数学课程学习指导书或考研参考书，也可以作为相关课程教学人员的教学参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学典型题解答指南/李汉龙，王金宝，缪淑贤主编.—2版.—北京：国防工业出版社，2014.4
(大学数学学习辅导丛书)
ISBN 978-7-118-09372-8

Ⅰ.①高... Ⅱ.①李... ②王... ③缪... Ⅲ.①高等数学-高等学校-题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第075541号

※

国防工業出版社 出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)
北京奥鑫印刷厂印刷
新华书店经售
*
开本 787×1092 1/16 印张 23 字数 531 千字
2014年4月第2版第1次印刷 印数 1—4000册 定价 39.90元

(本书如有印装错误，我社负责调换)

国防书店：(010)88540777 发行邮购：(010)88540776
发行传真：(010)88540755 发行业务：(010)88540717

第2版前言

本书是在2011年出版的第1版的基础上修订的，对全书的内容作了全新的修订.

高等数学是理工科高等院校的一门最重要的基础课，它对学生综合素质的培养及后续课程的学习起着极其重要的作用. 因此，学好高等数学至关重要，而高等数学题海茫茫，变化万千. 许多学生上课能听懂，解题却不知道从何下手，或自己想不到，别人一点就明白. 究其原因，其中主要一条是高等数学内容多、学时少、速度快、班级大. 许多学生在学习过程中囫囵吞枣，课堂上没有理解，课后又缺少归纳总结，结果事倍功半. 我们编写这本参考书，旨在帮助高等数学的读者较好地解决学习中的困难，其特点是针对不同的问题，对分析、解决问题的思路、方法和技巧加以指导. 编者一方面汇总了国内同类教材的主要优点，另一方面融合了沈阳建筑大学理学院众多教师长期讲授该门课程的经验体会，力求思路清晰、推证简洁且可读性强，从而满足广大师生的教学及学习需求.

本书是高等院校理工科类各专业学生学习高等数学课程必备的辅导书，是有志考研学生的精品之选，是授课教师极为有益的教学参考书，是无师自通的自学指导书. 与国内通用的各类优秀的《高等数学》教材相匹配，可同步使用，同时也可以作为考研辅导书；全书共分12章，内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、自测试题及解答等.

本书以高等数学课程教材的内容为准，按题型归类，进行分析、解答与评注，归纳总结具有共性题目的解题方法，解题简捷、新颖，具有技巧性而又道理显然，可使读者思路畅达，所学知识融会贯通，灵活运用，达到事半功倍之效. 它将成为学生学习《高等数学》的良师益友.

本书全书前11章每章内容分为四部分：①内容概要可以使读者了解课程内容；②典型例题分析、解答与评注通过对例题的详细剖析，细致解答，指导读者掌握解题思路和解题方法；③本章小结可帮助读者更清楚明了地把握学习要点，更深刻地理解该章的主要学习内容；④同步习题及解答对本章重点习题进行梳理，帮助读者检验掌握程度. 第12章中给出自测试题及解答，供读者自测.

本书第1章由隋英重新修订；第2章、第3章由李汉龙重新修订；第4章由孙艳玲重新修订；第5章由缪淑贤重新修订；第6章由孙丽华重新修订；第7章由闫红梅重新修订；第8章由艾瑛重新修订；第9章、第10章、第11章、第12章由王金宝重新修订.

全书由李汉龙统稿，王金宝、李汉龙、缪淑贤审稿. 另外，本书的编写和再版得到了国防工业出版社的大力支持，在此表示衷心的感谢！

本书参考了国内出版的一些教材，见本书所附参考文献. 由于水平所限，书中不足之处在所难免，恳请读者、同行和专家批评指正.

编 者

2014 年 1 月

目　录

第 1 章　函数与极限

1.1　内 容 概 要

1.1.1　基本概念

1. 函数

设数集 $D\subset \mathbf{R}$,称映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数,记为 $y=f(x),x\in D$,数集 D 叫做函数的定义域,x 叫做自变量,y 叫做因变量. y 的取值范围叫做函数的值域.

2. 数列极限

设有数列 $\{x_n\}$ 和常数 a,若对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists$ 正整数 N,当 $n>N$ 时,总有 $|x_n-a|<\varepsilon$,则称 a 是数列当 $n\to\infty$ 时的极限,记为 $\lim\limits_{n\to\aleph}x_n=a$.

3. 函数极限

设函数 $f(x)$ 在某 $\mathring{U}(x_0)$ 内有定义,若对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,对 $\forall x\in\mathring{U}(x_0)$,总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立,A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限,记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

左极限:$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时,总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

右极限:$f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时,总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时有极限 A,即 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$,$\exists X>0$,当 $|x|>X$ 时,总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

4. 无穷小

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$,则 $\alpha(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$,则 β 是 α 的高阶无穷小,记为 $\beta=o(\alpha)$.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$,则 β 与 α 是等价无穷小,记为 $\beta\sim\alpha$.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq0$,则 β 与 α 是同阶无穷小.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq0$,则 β 是 α 的 k 阶无穷小.

5. 无穷大

设函数 $f(x)$ 在某 $\mathring{U}(x_0)$ 内有定义,对 $\forall M>0$,$\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,总有 $|f(x)|>M$,则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时为无穷大量,记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

6. 连续

设函数$f(x)$在某$U(x_0)$内有定义,如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,那么就称函数$f(x)$在点$x_0$连续.

7. 间断

函数$f(x)$在点x_0处不连续,则称$y=f(x)$在点x_0处间断,称x_0为间断点.

若$f(x)$在点x_0出现如下情况之一,那么x_0是间断点:

(1) $y=f(x)$在点x_0处无定义.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,但不等于$f(x_0)$.

间断点有以下几种常见类型:

设x_0是函数$f(x)$的间断点,左极限$f(x_0-0)$和右极限$f(x_0+0)$都存在,则x_0为函数$f(x)$的第一类间断点,其中左极限$f(x_0-0)$、右极限$f(x_0+0)$存在并相等时,称x_0为可去间断点;左、右极限存在但不相等时,称x_0为跳跃间断点.

不是第一类间断点的任何间断点都是第二类的间断点,其中当左极限$f(x_0-0)$和右极限$f(x_0+0)$至少有一个为无穷时,称x_0为无穷型间断点;当$x\to x_0$时,函数值$f(x)$无限地在两个不同数之间变动,称x_0为振荡型间断点.

1.1.2 基本理论

1. 函数的性质

(1) 有界性:设函数$f(x)$的定义域是D,若$\exists M>0$,使得$\forall x\in X\subset D$,总有$|f(x)|\leqslant M$,则称$f(x)$在X上有界.若不存在这样的M,则称$f(x)$在X上无界.

(2) 单调性:设函数$f(x)$的定义域是D,区间$I\subset D$,如果对I中任意两点x_1及x_2,当$x_1<x_2$时,恒有$f(x_1)<f(x_2)$(或$f(x_1)>f(x_2)$),则称$f(x)$在I上单调增加(或单调减少).

(3) 奇偶性:设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称,若$\forall x\in D$,恒有$f(-x)=f(x)$,则称$f(x)$是偶函数;若$\forall x\in D$,恒有$f(-x)=-f(x)$,则称$f(x)$是奇函数.

偶函数的图形关于y轴对称;奇函数的图形关于原点对称.

(4) 周期性:设函数$f(x)$的定义域是D,若存在一个不为零的数l,使得$\forall x\in D$,有$x\pm l\in D$且$f(x+l)=f(x)$恒成立,则称$f(x)$为周期函数,l为$f(x)$的周期,一般指最小正周期.

若l是$f(x)$的周期,则$\dfrac{l}{a}$是$f(ax+b)$的周期,$a\neq 0$,b为任意实数.

2. 数列极限性质

(1) (唯一性)若数列$\{x_n\}$收敛,则极限必唯一.

(2) (有界性)若数列$\{x_n\}$收敛,则必有界.

(3) (局部保号性)如果$\lim\limits_{x\to\infty}x_n=a$且$a>0(a<0)$,那么存在正整数$N$,当$n>N$时,有$x_n>0(x_n<0)$.

(4) (收敛数列与其子数列间的关系)若数列$\{x_n\}$收敛于a,则其任一子数列也收敛于a.

(5)(数列极限的四则运算法则)设有数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$. 如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$,则$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=A+B$,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=A\cdot B$,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{A}{B}$(当$y_n\neq0$,$B\neq0$时).

(6)(夹逼准则)若$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$,且$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(7)(单调有界数列的收敛性)单调有界数列必收敛.

3. 函数极限性质

(1)(唯一性)若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,则此极限唯一.

(2)(局部有界性)若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,则$f(x)$在的某$\mathring{U}(x_0)$内有界.

(3)(局部保号性)如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,而且$A>0$(或$A<0$),那么$\exists\ \mathring{U}(x_0)$,当$x\in\mathring{U}(x_0)$时,有$f(x)>0$(或$f(x)<0$).

(4)(函数极限与数列极限的关系)设函数$f(x)$在某$\mathring{U}(x_0)$内有定义. 则极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在$\Leftrightarrow$对任何$x_n\in\mathring{U}(x_0)$且$x_n\to x_0$,$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$都存在且与$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$相等.

(5)(极限存在的充要条件)$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=A=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=A=\lim_{x\to-\infty}f(x)$$

$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$(其中$\alpha$是当$x$某个变化趋势的无穷小)

(6)(极限的四则运算法则)若$\lim f(x)$和$\lim g(x)$都存在,则

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$$

$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)},\lim g(x)\neq0$$

【注意】 上述法则成立的条件是各自的极限都存在,否则不可以进行极限的四则运算.

(7)(夹逼准则)设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$,且在某$\mathring{U}(x_0)$内有$f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$,则$\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$.

4. 无穷小的性质

(1)在自变量的同一变化过程中,如果$f(x)$为无穷大,则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小;反之,如果$f(x)$为无穷小,且$f(x)\neq0$,则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大.

(2)有限个无穷小的和也是无穷小.

(3)有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

(4)常数与无穷小的乘积是无穷小.

(5)有限个无穷小的乘积也是无穷小.

【注意】(1)无穷多个无穷小量之和不一定是无穷小量.

(2)无穷多个无穷小量之积也不一定是无穷小量.

5. 函数连续性的性质

(1) 一切基本初等函数在其定义域内都是连续的,因此,若$f(x)$是基本初等函数,x_0属于它的定义域,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

(2) 设$g(x)$在x_0连续,$g(x_0)=u_0$,又$y=f(u)$在u_0连续,则由复合函数的连续性得:$\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}g(x)]=f[g(x_0)]=f(u_0)$;一切初等函数在其定义区间内是连续的.

(3) 幂指数极限运算法则:设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$, 则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=A^B$.

6. 闭区间连续函数性质

(1)(最大和最小值定理)若$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则$f(x)$在$[a,b]$上必有最大值和最小值.

(2)(有界性定理)若$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,$f(x)$在$[a,b]$上有界.

(3)(零点定理)若$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且$f(a)$与$f(b)$异号,那么在开区间(a,b)内至少存在一点ξ,使$f(\xi)=0$.

(4)(介值定理)若$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且$f(x)$在$[a,b]$端点处函数值不同,即$f(a)=A,f(b)=B$,且$A\neq B$,则对介于A,B之间的任意一个数C,在开区间(a,b)内至少存在一点ξ,使$f(\xi)=C$.

7. 重要结论

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$.

(2) $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

(4) $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e$.

(5) $\lim\limits_{\varphi(x)\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{\varphi(x)}\right]^{\varphi(x)}=e$.

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{ax+b}{ax+c}\right]^{hx+k}=e^{\frac{(b-c)h}{a}}$.

(7) 当$x\to 0$时,有下面常用的的等价无穷小公式:

$\sin x\sim x$; $\tan x\sim x$; $\arcsin x\sim x$; $\arctan x\sim x$; $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$; $\ln(1+x)\sim x$; $e^x-1\sim x$; $a^x-1\sim x\ln a$; $\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x$; $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$.

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0},n=m\\0,n>m\\\infty,n<m\end{cases}$, $a_0\neq 0,b_0\neq 0,m$、n为非负整数.

1.1.3 基本方法

(1) 求函数的定义域和函数的表达式.

(2) 极限的计算.

① 利用定义;

② 利用代数的方法求极限;

③ 利用两个重要极限;

④ 利用极限存在准则;

⑤ 利用等价无穷小代换;

⑥ 利用函数的连续性和四则运算法则;

⑦ 分段函数在分段点处的极限;

⑧ 利用导数定义求极限(见第 2 章);

⑨ 利用罗比达法则(见第 2 章);

⑩ 利用拉格朗日中值定理(见第 3 章);

⑪ 利用泰勒公式(见第 3 章);

⑫ 利用定积分求极限(见第 5 章)

⑬ 利用级数的收敛性(见第 12 章).

(3) 根据函数的极限和连续性,确定函数中的待定系数.

(4) 无穷小的比较.

(5) 函数连续性判断.

(6) 闭区间上连续函数性质的应用.

1.2 典型例题分析、解答与评注

1.2.1 函数的概念

函数的基本要素是定义域和对应法则. 因此,函数部分的主要题型是求函数的定义域和函数的表达式等. 难点是求两个函数的复合. 注意两个函数复合是有条件的,尤其要注意两个分段函数的复合.

例 1.1 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$,求函数 $f(x+a)+f(x-a)\,(a>0)$ 的定义域.

分析 对于函数 $f(x+a)+f(x-a)$ 来说,其定义域内的变量既要满足函数关系 $f(x+a)$,又要满足函数关系 $f(x-a)$,因此,可从 $f(x)$ 的定义域入手,找满足上述关系的两个集合的交集.

解答 由函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$,得

$$\begin{cases} 0 \leqslant x+a \leqslant 1 \\ 0 \leqslant x-a \leqslant 1 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} -a \leqslant x \leqslant 1-a \\ a \leqslant x \leqslant 1+a \end{cases}$$

故 $a \leqslant x \leqslant 1-a$,所以,当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时,函数在 $x=\dfrac{1}{2}$ 点有定义;当 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时,函数的定义域为 $[a,1-a]$;当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时无解,即定义域为空集.

评注 求复合函数的定义域,要注意函数关系 f 的定义域是相同的.

例 1.2 已知 $f(x+2)=2^{x^2+4x}-x$,求 $f(x-2)$.

分析 求复合函数的关键是先求出函数的对应法则 $f(x)$.

解答

〈方法一〉由于 $f(x+2)=2^{(x+2)^2-4}-(x+2)+2$,所以 $f(x)=2^{x^2-4}-x+2$,于是 $f(x-2)=2^{x^2-4x}-x+4$.

〈方法二〉令 $t=x+2$,代入函数表达式中,得 $f(t)=2^{t^2-4}-t+2$,因此,$f(x)=2^{x^2-4}-x+2$,于是 $f(x-2)=2^{x^2-4x}-x+4$.

评注 此题用了两种方法,第一种方法是凑类型法,将给出的表达式凑成对应符号 $f(\ )$ 内中间变量的表达形式,然后得出 $f(x)$ 的表达式;第二种方法是变量替换法. 两种方法各有优劣,不能一概而论,要根据题目的具体情况作出选择.

1.2.2 求极限的方法

1. 利用极限的定义求极限

例 1.3 用极限定义证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

分析 用极限定义证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$,只需对 $\forall\varepsilon>0$,能找到一个 N,当 $\forall n>N$ 时,使 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$ 恒成立,由于 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}=\dfrac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\dfrac{a^2}{n}<\varepsilon$,只需 $n>\dfrac{a^2}{\varepsilon}$. 由 N 正整数,可取 $N=\left[\dfrac{a^2}{\varepsilon}\right]$.

证明 对 $\forall\varepsilon>0$,要使 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}=\dfrac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\dfrac{a^2}{n}<\varepsilon$ 成立,只需 $n>\dfrac{a^2}{\varepsilon}$.

故取 $N=\left[\dfrac{a^2}{\varepsilon}\right]$,则对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists N>0$,当 $n>N$ 时,恒有

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

评注 用“$\varepsilon-N$”语言来证明数列极限的存在性,关键是从不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 出发,找到正整数 N. 求 N 时,可以利用适当放大的方法.

例 1.4 用极限定义证明:$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=1$.

分析 要证 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=1$,需对 $\forall\varepsilon>0$,能找到一个正数 δ,当 $0<|x-2|<\delta$ 时,使 $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}-1\right|<\varepsilon$ 恒成立. 由于 $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}-1\right|=|x-2|<\varepsilon$,只需取 $\delta=\varepsilon$.

证明 对 $\forall\varepsilon>0$,要使 $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}-1\right|=\left|\dfrac{x^2-4x+4}{x-2}\right|=\left|\dfrac{(x-2)^2}{x-2}\right|=|x-2|<\varepsilon$ 成

立，只需取 $\delta=\varepsilon$，则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\varepsilon>0$，当 $0<|x-2|<\delta$ 时，恒有

$$\left|\frac{x^2-3x+2}{x-2}-1\right|<\varepsilon$$

由函数极限 $\varepsilon-\delta$ 定义，有

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{x-2}=1$$

评注 用"$\varepsilon-\delta$"语言来证明当 $x\to x_0$ 时函数极限的存在性，关键是从不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 出发，找到正数 δ.

2. 利用代数的方法求极限

例 1.5 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}$.

分析 先求和 $\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}=\frac{1+2+\cdots n}{n^2}=\frac{n(1+n)}{2n^2}=\frac{1+n}{2n}$，然后再求极限.

解答 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(1+n)}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+n}{2n}=\frac{1}{2}$

评注 此题说明无穷多个无穷小的和不一定是无穷小.

例 1.6 求极限：$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

分析 当 $x\to1$ 时，为 $\frac{0}{0}$ 型的不定式，可用分解因式的方法，约去零因式 $(x-1)$，然后根据极限四则运算法则计算.

解答 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+2x+3)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x+2}{x^2+2x+3}=\frac{1}{2}$

评注 对于含有零因式的 $\frac{0}{0}$ 型的未定式，在后续课程中用洛必达法则求解也可.

例 1.7 求极限：$\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{4}{4-x^2}-\frac{1}{2-x}\right)$.

分析 当 $x\to2$ 时，两个分式均趋于 ∞，可先通分，转换为 $\frac{0}{0}$ 型的不定式，然后再用分解因式的方法，约去零因式 $(2-x)$.

解答 $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{4}{4-x^2}-\frac{1}{2-x}\right)=\lim\limits_{x\to2}\frac{4-(2+x)}{(2+x)\cdot(2-x)}=\lim\limits_{x\to2}\frac{(2-x)}{(2+x)(2-x)}=\lim\limits_{x\to2}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{4}$

评注 $\infty-\infty$ 型的不定式，一般要转换为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 的不定式来计算.

例 1.8 求极限：(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-5^n}{3^n+5^n}(n\in\mathbf{N})$.

分析 两题均为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的分式，可用最大项同除以分子和分母.

解答 (1) 分子、分母的最高次方相同均为 x^{50}，故分子和分母同除以 x^{50}，即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2-\frac{3}{x}\right)^{20}\left(3+\frac{2}{x}\right)^{30}}{\left(2+\frac{1}{x}\right)^{50}}=\frac{2^{20}\cdot3^{30}}{2^{50}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$$

(2) 分子、分母同除 5^n,即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-5^n}{3^n+5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n-1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n+1}=-1$$

评注 上述两题在用最大项同除以分子和分母的同时,还利用了无穷大的倒数是无穷小和公比绝对值小于 1 的等比数列的极限为零的结论. 可见在求解极限的过程中,可以多种方法相结合使用.

例 1.9 求极限:(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$;(2) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{5}}$.

分析 所求极限中含有根式,可将分子和分母同时有理化.

解答 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}+1}=\frac{1}{2}$$

(2) $$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{5}}=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2x+1}-\sqrt{5})(\sqrt{2x+1}+\sqrt{5})(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{2x-4}=\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)}{2(x-2)}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$$

评注 分子和分母同时有理化后:① 由 $\infty-\infty$ 型的无理式转化成 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的有理式,然后分子、分母同除最高次幂 $\sqrt{x}$;② 由 $\frac{0}{0}$ 的无理式转化成 $\frac{0}{0}$ 型的有理式,然后利用因式分解消去零因式 $(x-2)$.

例 1.10 求极限:$\lim\limits_{x\to1}\frac{1-\sqrt[n]{x}}{1-\sqrt[m]{x}}$ $(m,n\in\mathbf{N})$.

分析 所求极限中含有根式,但分子、分母的根指数不相同,无法将分子和分母同时有理化,因此考虑变量替换法.

解答 令 $t=\sqrt[mn]{x}$ 则当 $x\to1$ 时,$t\to1$,于是

$$\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt[n]{x}}{1-\sqrt[m]{x}}=\lim_{t\to1}\frac{1-t^m}{1-t^n}=\lim_{t\to1}\frac{(1-t)(1+t+t^2+\cdots+t^{m-1})}{(1-t)(1+t+t^2+\cdots+t^{n-1})}=\frac{m}{n}$$

评注 本题中变量替换的主要目的是去掉根式,将无理式转化成有理式,然后根据有理式中消去零因子的方法求之.

3. 利用两个重要极限

例 1.11 求极限:$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)}{x}$.