

大学数学学习辅导丛书

高等数学 典型题解答指南

第2版

主编 李汉龙 王金宝 缪淑贤

- 联系考研，渗透精讲历年考研真题
- 典型例题，深入讲解思路方法技巧
- 习题答案，权威提供详尽准确解析
- 同步自测，梯度测试提升应试能力



国防工业出版社
National Defense Industry Press

大学数学学习辅导丛书

高等数学典型题解答指南

(第2版)

主 编	李汉龙	王金宝	缪淑贤
副主编	艾 瑛	闫红梅	律淑珍
参 编	隋 英	孙丽华	孙艳玲

国防工业出版社

· 北京 ·

内 容 简 介

本书是在2011年出版第1版的基础上修订的,对全书的内容作了全新的修订,修正了第1版中出现的一些错误,替换了第12章全部测试题.内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、自测试题及解答,共12章.前11章配备了较多的典型例题和同步习题,并对典型例题给出了详细的分析、解答和评注.第12章是自测试题及解答.

本书可作为理工科院校本科各专业学生的高等数学课程学习指导书或考研参考书,也可以作为相关课程教学人员的教学参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学典型题解答指南 / 李汉龙, 王金宝, 缪淑贤
主编. —2版. —北京:国防工业出版社, 2014.4
(大学数学学习辅导丛书)
ISBN 978-7-118-09372-8

I. ①高... II. ①李... ②王... ③缪... III. ①高等数学—高等学校—题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 075541 号

※

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 23 字数 531 千字

2014年4月第2版第1次印刷 印数 1—4000 册 定价 39.90 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店: (010)88540777

发行邮购: (010)88540776

发行传真: (010)88540755

发行业务: (010)88540717



第2版前言

本书是在2011年出版的第1版的基础上修订的,对全书的内容作了全新的修订.

高等数学是理工科高等院校的一门最重要的基础课,它对学生综合素质的培养及后续课程的学习起着极其重要的作用.因此,学好高等数学至关重要,而高等数学题海茫茫,变化万千.许多学生上课能听懂,解题却不知道从何下手,或自己想不到,别人一点就明白.究其原因,其中主要一条是高等数学内容多、学时少、速度快、班级大.许多学生在学习过程中囫圇吞枣,课堂上没有理解,课后又缺少归纳总结,结果事倍功半.我们编写这本参考书,旨在帮助高等数学的读者较好地解决学习中的困难,其特点是针对不同的问题,对分析、解决问题的思路、方法和技巧加以指导.编者一方面汇总了国内同类教材的主要优点,另一方面融合了沈阳建筑大学理学院众多教师长期讲授该门课程的经验体会,力求思路清晰、推证简洁且可读性强,从而满足广大师生的教学及学习需求.

本书是高等院校理工科类专业学生学习高等数学课程必备的辅导书,是有志考研学生的精品之选,是授课教师极为有益的教学参考书,是无师自通的自学指导书.与国内通用的各类优秀的《高等数学》教材相匹配,可同步使用,同时也可以作为考研辅导书;全书共分12章,内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、自测试题及解答等.

本书以高等数学课程教材的内容为准,按题型归类,进行分析、解答与评注,归纳总结具有共性题目的解题方法,解题简捷、新颖,具有技巧性而又道理显然,可使读者思路畅达,所学知识融会贯通,灵活运用,达到事半功倍之效.它将成为学生学习《高等数学》的良师益友.

本书全书前11章每章内容分为四部分:①内容概要可以使读者了解课程内容;②典型例题分析、解答与评注通过对例题的详细剖析,细致解答,指导读者掌握解题思路和解题方法;③本章小结可帮助读者更清楚明了地把握学习要点,更深刻地理解该章的主要学习内容;④同步习题及解答对本章重点习题进行梳理,帮助读者检验掌握程度.第12章中给出自测试题及解答,供读者自测.

本书第1章由隋英重新修订;第2章、第3章由李汉龙重新修订;第4章由孙艳玲重新修订;第5章由缪淑贤重新修订;第6章由孙丽华重新修订;第7章由闫红梅重新修订;第8章由艾瑛重新修订;第9章、第10章、第11章、第12章由王金宝重新修订.

全书由李汉龙统稿, 王金宝、李汉龙、缪淑贤审稿. 另外, 本书的编写和再版得到了国防工业出版社的大力支持, 在此表示衷心的感谢!

本书参考了国内出版的一些教材, 见本书所附参考文献. 由于水平所限, 书中不足之处在所难免, 恳请读者、同行和专家批评指正.

编 者
2014 年 1 月

目 录

第 1 章 函数与极限	1	2.2.5 导数的应用	36
1.1 内容概要	1	2.2.6 函数的微分	37
1.1.1 基本概念	1	2.3 本章小结	39
1.1.2 基本理论	2	2.4 同步习题及解答	40
1.1.3 基本方法	4	2.4.1 同步习题	40
1.2 典型例题分析、解答与评注 ..	5	2.4.2 同步习题解答	43
1.2.1 函数的概念	5	第 3 章 微分中值定理与导数	
1.2.2 求极限的方法	6	的应用	53
1.2.3 根据函数的极限和		3.1 内容概要	53
连续性,确定函数中的		3.1.1 基本概念	53
待定系数	11	3.1.2 基本理论	53
1.2.4 无穷小的比较	11	3.1.3 基本方法	55
1.2.5 函数连续性判断	12	3.2 典型例题分析、解答与	
1.2.6 闭区间上连续函数		评注	56
性质的应用	12	3.2.1 中值定理问题	56
1.3 本章小结	13	3.2.2 按洛必达法则求	
1.4 同步习题及解答	13	极限	64
1.4.1 同步习题	13	3.2.3 不等式的证明	71
1.4.2 同步习题解答	15	3.2.4 函数的单调性	74
第 2 章 导数与微分	18	3.2.5 函数的极值和最值 ..	76
2.1 内容概要	18	3.2.6 函数的凹凸性和	
2.1.1 基本概念	18	拐点	78
2.1.2 基本理论	18	3.3 本章小结	80
2.1.3 基本方法	19	3.4 同步习题及解答	80
2.2 典型例题分析、解答与		3.4.1 同步习题	80
评注	20	3.4.2 同步习题解答	82
2.2.1 函数导数的计算	20	第 4 章 不定积分	88
2.2.2 利用导数定义求		4.1 内容概要	88
极限	34	4.1.1 基本概念	88
2.2.3 讨论函数的可导性 ..	35	4.1.2 基本理论	88
2.2.4 通过函数的连续性和		4.1.3 基本方法	89
可导性,确定函数		4.2 典型例题分析、解答	
中的常数	36		

与评注	89	第 6 章 常微分方程	145
4.2.1 与原函数有关的命题	89	6.1 内容概要	145
4.2.2 求有理函数的不定积分	91	6.1.1 基本概念	145
4.2.3 求含根式的不定积分	93	6.1.2 基本理论	145
4.2.4 求三角有理式的不定积分	96	6.1.3 基本方法	146
4.2.5 求含有反三角函数、对数函数或指数函数的不定积分	100	6.2 典型例题分析、解答与评注	148
4.2.6 求抽象函数的不定积分	102	6.2.1 一阶微分方程的解法	148
4.2.7 求分段函数的不定积分	105	6.2.2 高阶微分方程的解法	153
4.2.8 求递推式的不定积分	105	6.2.3 求解含有变限积分的方程	160
4.3 本章小结	106	6.2.4 微分方程的应用	162
4.4 同步习题及解答	106	6.3 本章小结	165
4.4.1 同步习题	106	6.4 同步习题及解答	165
4.4.2 同步习题解答	108	6.4.1 同步习题	165
第 5 章 定积分	112	6.4.2 同步习题解答	167
5.1 内容概要	112	第 7 章 向量代数与空间解析几何	173
5.1.1 基本概念	112	7.1 内容概要	173
5.1.2 基本理论	113	7.1.1 基本概念	173
5.1.3 基本方法	115	7.1.2 基本理论	174
5.2 典型例题分析、解答与评注	116	7.1.3 基本方法	177
5.2.1 与定积分的定义性质有关的问题	116	7.2 典型例题分析、解答与评注	177
5.2.2 变限积分及其导数问题	118	7.2.1 求点的坐标	177
5.2.3 定积分的计算	122	7.2.2 关于向量的运算	178
5.2.4 反常积分的计算	132	7.2.3 利用向量求解几何问题	181
5.2.5 定积分的应用	133	7.2.4 关于空间曲面与空间曲线	183
5.3 本章小结	140	7.2.5 求平面方程	189
5.4 同步习题及解答	141	7.2.6 求空间直线方程	191
5.4.1 同步习题	141	7.2.7 点、直线、平面之间的关系	195
5.4.2 同步习题解答	143	7.2.8 关于距离	196
		7.2.9 关于夹角	198
		7.3 本章小结	200
		7.4 同步习题及解答	200

7.4.1	同步习题	200	9.1.3	基本方法	243
7.4.2	同步习题解答	202	9.2	典型例题分析、解答与 评注	244
第8章	多元函数微分法及其 应用	206	9.2.1	二重积分性质的 应用	244
8.1	内容概要	206	9.2.2	二重积分的计算	245
8.1.1	基本概念	206	9.2.3	三重积分的计算	250
8.1.2	基本理论	207	9.2.4	重积分的应用	257
8.1.3	基本方法	210	9.3	本章小结	263
8.2	典型例题分析、解答与 评注	211	9.4	同步习题及解答	264
8.2.1	求多元函数定 义域	211	9.4.1	同步习题	264
8.2.2	求多元函数关系	211	9.4.2	同步习题解答	265
8.2.3	二元函数极限的 求法	212	第10章	曲线积分与曲面积分	267
8.2.4	证明二元函数极限 不存在	214	10.1	内容概要	267
8.2.5	二元函数连续性的 讨论	215	10.1.1	基本概念	267
8.2.6	一般多元显函数偏 导数的求法	216	10.1.2	基本理论	268
8.2.7	多元复合函数的偏 导数的求法	218	10.1.3	基本方法	272
8.2.8	隐函数的偏导数的 求法	219	10.2	典型例题分析、解答与 评注	272
8.2.9	全微分的求法	222	10.2.1	对弧长的(第一类) 曲线积分的计算	272
8.2.10	方向导数与梯度的 求法	223	10.2.2	对坐标的(第二类) 曲线积分的计算	276
8.2.11	多元函数微分学的 几何应用	225	10.2.3	对面积的(第一类) 曲面积分的计算	284
8.2.12	多元函数极值与 最值的求法	228	10.2.4	对坐标的(第二类) 曲面积分的计算	286
8.3	本章小结	232	10.2.5	曲线积分与曲面积分 的应用	291
8.4	同步习题及解答	236	10.3	本章小结	294
8.4.1	同步习题	236	10.4	同步习题及解答	295
8.4.2	同步习题解答	237	10.4.1	同步习题	295
第9章	重积分	240	10.4.2	同步习题解答	296
9.1	内容概要	240	第11章	无穷级数	300
9.1.1	基本概念	240	11.1	内容概要	300
9.1.2	基本理论	240	11.1.1	基本概念	300

11.1.2	基本理论	301	级数	320
11.1.3	基本方法	304	11.3	本章小结
11.2	典型例题分析、解答与 评注	305	11.4	同步习题及解答
11.2.1	级数敛散性的 判别	305	11.4.1	同步习题
11.2.2	求函数项级数的 收敛域	313	11.4.2	同步习题解答
11.2.3	求幂级数的收敛半径 及收敛域	314	第 12 章	自测试题及解答
11.2.4	求幂级数的和 函数	316	12.1	自测试题及解答(上)
11.2.5	将函数展开成幂 级数	318	12.1.1	自测试题(上)
11.2.6	将函数展开成傅里叶		12.1.2	自测试题解答(上)
				337
			12.2	自测试题及解答(下)
			12.2.1	自测试题(下)
			12.2.2	自测试题解答(下)
				353
			参考文献	358

第1章 函数与极限

1.1 内容概要

1.1.1 基本概念

1. 函数

设数集 $D \subset \mathbf{R}$, 称映射 $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数, 记为 $y = f(x), x \in D$, 数集 D 叫做函数的定义域, x 叫做自变量, y 叫做因变量. y 的取值范围叫做函数的值域.

2. 数列极限

设有数列 $\{x_n\}$ 和常数 a , 若对 $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 总有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 则称 a 是数列当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

3. 函数极限

设函数 $f(x)$ 在某 $\dot{U}(x_0)$ 内有定义, 若对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 对 $\forall x \in \dot{U}(x_0)$, 总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立, A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

左极限: $f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时, 总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

右极限: $f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时, 总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时有极限 A , 即 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

4. 无穷小

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$, 则 $\alpha(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小.

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则 β 是 α 的高阶无穷小, 记为 $\beta = o(\alpha)$.

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 则 β 与 α 是等价无穷小, 记为 $\beta \sim \alpha$.

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 则 β 与 α 是同阶无穷小.

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$, 则 β 是 α 的 k 阶无穷小.

5. 无穷大

设函数 $f(x)$ 在某 $\dot{U}(x_0)$ 内有定义, 对 $\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 总有 $|f(x)| > M$, 则称 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时为无穷大量, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

6. 连续

设函数 $f(x)$ 在某 $U(x_0)$ 内有定义, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 那么就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

7. 间断

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续, 则称 $y = f(x)$ 在点 x_0 处间断, 称 x_0 为间断点.

若 $f(x)$ 在点 x_0 出现如下情况之一, 那么 x_0 是间断点:

- (1) $y = f(x)$ 在点 x_0 处无定义.
- (2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在.
- (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但不等于 $f(x_0)$.

间断点有以下几种常见类型:

设 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点, 左极限 $f(x_0 - 0)$ 和右极限 $f(x_0 + 0)$ 都存在, 则 x_0 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点, 其中左极限 $f(x_0 - 0)$ 、右极限 $f(x_0 + 0)$ 存在并相等时, 称 x_0 为可去间断点; 左、右极限存在但不相等时, 称 x_0 为跳跃间断点.

不是第一类间断点的任何间断点都是第二类的间断点, 其中当左极限 $f(x_0 - 0)$ 和右极限 $f(x_0 + 0)$ 至少有一个为无穷时, 称 x_0 为无穷型间断点; 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数值 $f(x)$ 无限地在两个不同数之间变动, 称 x_0 为振荡型间断点.

1.1.2 基本理论

1. 函数的性质

(1) 有界性: 设函数 $f(x)$ 的定义域是 D , 若 $\exists M > 0$, 使得 $\forall x \in X \subset D$, 总有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在 X 上有界. 若不存在这样的 M , 则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

(2) 单调性: 设函数 $f(x)$ 的定义域是 D , 区间 $I \subset D$, 如果对 I 中任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加 (或单调减少).

(3) 奇偶性: 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 若 $\forall x \in D$, 恒有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 是偶函数; 若 $\forall x \in D$, 恒有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 是奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称; 奇函数的图形关于原点对称.

(4) 周期性: 设函数 $f(x)$ 的定义域是 D , 若存在一个不为零的数 l , 使得 $\forall x \in D$, 有 $x \pm l \in D$ 且 $f(x + l) = f(x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为周期函数, l 为 $f(x)$ 的周期, 一般指最小正周期.

若 l 是 $f(x)$ 的周期, 则 $\frac{l}{a}$ 是 $f(ax + b)$ 的周期, $a \neq 0$, b 为任意实数.

2. 数列极限性质

(1) (唯一性) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则极限必唯一.

(2) (有界性) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则必有界.

(3) (局部保号性) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 且 $a > 0$ ($a < 0$), 那么存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有 $x_n > 0$ ($x_n < 0$).

(4) (收敛数列与其子数列间的关系) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 则其任一子数列也收敛于 a .

(5) (数列极限的四则运算法则) 设有数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$. 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = A + B, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = A \cdot B, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B} \quad (\text{当 } y_n \neq 0, B \neq 0 \text{ 时}).$$

(6) (夹逼准则) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 且 $y_n \leq x_n \leq z_n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

(7) (单调有界数列的收敛性) 单调有界数列必收敛.

3. 函数极限性质

(1) (唯一性) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则此极限唯一.

(2) (局部有界性) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在的某 $\dot{U}(x_0)$ 内有界.

(3) (局部保号性) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 而且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 那么 $\exists \dot{U}(x_0)$, 当 $x \in \dot{U}(x_0)$ 时, 有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

(4) (函数极限与数列极限的关系) 设函数 $f(x)$ 在某 $\dot{U}(x_0)$ 内有定义. 则极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow$ 对任何 $x_n \in \dot{U}(x_0)$ 且 $x_n \rightarrow x_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ 都存在且与 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 相等.

(5) (极限存在的充要条件) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$ (其中 α 是当 x 某个变化趋势的无穷小)

(6) (极限的四则运算法则) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 都存在, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

【注意】 上述法则成立的条件是各自的极限都存在, 否则不可以进行极限的四则运算.

(7) (夹逼准则) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$, 且在某 $\dot{U}(x_0)$ 内有 $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$.

4. 无穷小的性质

(1) 在自变量的同一变化过程中, 如果 $f(x)$ 为无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小; 反之, 如果 $f(x)$ 为无穷小, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

(2) 有限个无穷小的和也是无穷小.

(3) 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

(4) 常数与无穷小的乘积是无穷小.

(5) 有限个无穷小的乘积也是无穷小.

【注意】 (1) 无穷多个无穷小量之和不一定是无穷小量.

(2) 无穷多个无穷小量之积也不一定是无穷小量.

5. 函数连续性的性质

(1) 一切基本初等函数在其定义域内都是连续的, 因此, 若 $f(x)$ 是基本初等函数, x_0 属于它的定义域, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

(2) 设 $g(x)$ 在 x_0 连续, $g(x_0) = u_0$, 又 $y = f(u)$ 在 u_0 连续, 则由复合函数的连续性得: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(g(x))] = f[\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)] = f[g(x_0)] = f(u_0)$; 一切初等函数在其定义区间内是连续的.

(3) 幂指数极限运算法则: 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = A^B$.

6. 闭区间连续函数性质

(1) (最大和最小值定理) 若 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有最大值和最小值.

(2) (有界性定理) 若 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

(3) (零点定理) 若 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号, 那么在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使 $f(\xi) = 0$.

(4) (介值定理) 若 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 端点处函数值不同, 即 $f(a) = A, f(b) = B$, 且 $A \neq B$, 则对介于 A, B 之间的任意一个数 C , 在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使 $f(\xi) = C$.

7. 重要结论

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1.$$

$$(2) \lim_{\varphi(x) \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

$$(4) \lim_{\varphi(x) \rightarrow 0} [1 + \varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}} = e.$$

$$(5) \lim_{\varphi(x) \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{\varphi(x)}\right]^{\varphi(x)} = e.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{ax+b}{ax+c}\right]^{hx+k} = e^{\frac{(b-c)h}{a}}.$$

(7) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 有下面常用的等价无穷小公式:

$$\sin x \sim x; \tan x \sim x; \arcsin x \sim x; \arctan x \sim x; 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2; \ln(1+x) \sim x; e^x - 1 \sim x;$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a; \sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x; (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x.$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & n = m \\ 0, & n > m \\ \infty, & n < m \end{cases}, a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, m, n \text{ 为非负整数}.$$

1.1.3 基本方法

(1) 求函数的定义域和函数的表达式.

(2) 极限的计算.

- ① 利用定义;
 - ② 利用代数方法求极限;
 - ③ 利用两个重要极限;
 - ④ 利用极限存在准则;
 - ⑤ 利用等价无穷小代换;
 - ⑥ 利用函数的连续性和四则运算法则;
 - ⑦ 分段函数在分段点处的极限;
 - ⑧ 利用导数定义求极限(见第2章);
 - ⑨ 利用罗比达法则(见第2章);
 - ⑩ 利用拉格朗日中值定理(见第3章);
 - ⑪ 利用泰勒公式(见第3章);
 - ⑫ 利用定积分求极限(见第5章);
 - ⑬ 利用级数的收敛性(见第12章).
- (3) 根据函数的极限和连续性,确定函数中的待定系数.
- (4) 无穷小的比较.
- (5) 函数连续性判断.
- (6) 闭区间上连续函数性质的应用.

1.2 典型例题分析、解答与评注

1.2.1 函数的概念

函数的基本要素是定义域和对应法则. 因此,函数部分的主要题型是求函数的定义域和函数的表达式等. 难点是求两个函数的复合. 注意两个函数复合是有条件的,尤其要注意两个分段函数的复合.

例 1.1 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 求函数 $f(x+a) + f(x-a)$ ($a > 0$) 的定义域.

分析 对于函数 $f(x+a) + f(x-a)$ 来说,其定义域内的变量既要满足函数关系 $f(x+a)$,又要满足函数关系 $f(x-a)$,因此,可从 $f(x)$ 的定义域入手,找满足上述关系的两个集合的交集.

解答 由函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 得

$$\begin{cases} 0 \leq x+a \leq 1 \\ 0 \leq x-a \leq 1 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} -a \leq x \leq 1-a \\ a \leq x \leq 1+a \end{cases}$$

故 $a \leq x \leq 1-a$, 所以,当 $a = \frac{1}{2}$ 时,函数在 $x = \frac{1}{2}$ 点有定义;当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时,函数的定义域为 $[a, 1-a]$; 当 $a > \frac{1}{2}$ 时无解,即定义域为空集.

评注 求复合函数的定义域,要注意函数关系 f 的定义域是相同的.

例 1.2 已知 $f(x+2)=2^{x^2+4x}-x$,求 $f(x-2)$.

分析 求复合函数的关键是先求出函数的对应法则 $f(x)$.

解答

〈方法一〉由于 $f(x+2)=2^{(x+2)^2-4}-(x+2)+2$,所以 $f(x)=2^{x^2-4}-x+2$,于是 $f(x-2)=2^{x^2-4x}-x+4$.

〈方法二〉令 $t=x+2$,代入函数表达式中,得 $f(t)=2^{t^2-4}-t+2$,因此, $f(x)=2^{x^2-4}-x+2$,于是 $f(x-2)=2^{x^2-4x}-x+4$.

评注 此题用了两种方法,第一种方法是凑类型法,将给出的表达式凑成对应符号 $f(\quad)$ 内中间变量的表达形式,然后得出 $f(x)$ 的表达式;第二种方法是变量替换法.两种方法各有优劣,不能一概而论,要根据题目的具体情况作出选择.

1.2.2 求极限的方法

1. 利用极限的定义求极限

例 1.3 用极限定义证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n} = 1$.

分析 用极限定义证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n} = 1$,只需对 $\forall \varepsilon > 0$,能找到一个 N ,当 $\forall n > N$ 时,使 $\left| \frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n} - 1 \right| < \varepsilon$ 恒成立,由于 $\left| \frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n} - 1 \right| = \frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n} = \frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)} < \frac{a^2}{n} < \varepsilon$,只需 $n > \frac{a^2}{\varepsilon}$.由 N 正整数,可取 $N = \left[\frac{a^2}{\varepsilon} \right]$.

证明 对 $\forall \varepsilon > 0$,要使 $\left| \frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n} - 1 \right| = \frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n} = \frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)} < \frac{a^2}{n} < \varepsilon$ 成立,只需 $n > \frac{a^2}{\varepsilon}$.

故取 $N = \left[\frac{a^2}{\varepsilon} \right]$,则对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$,当 $n > N$ 时,恒有

$$\left| \frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n} - 1 \right| < \varepsilon$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n} = 1$.

评注 用“ $\varepsilon-N$ ”语言来证明数列极限的存在性,关键是从不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 出发,找到正整数 N .求 N 时,可以利用适当放大的方法.

例 1.4 用极限定义证明: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2} = 1$.

分析 要证 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2} = 1$,需对 $\forall \varepsilon > 0$,能找到一个正数 δ ,当 $0 < |x-2| < \delta$ 时,使 $\left| \frac{x^2-3x+2}{x-2} - 1 \right| < \varepsilon$ 恒成立.由于 $\left| \frac{x^2-3x+2}{x-2} - 1 \right| = |x-2| < \varepsilon$,只需取 $\delta = \varepsilon$.

证明 对 $\forall \varepsilon > 0$,要使 $\left| \frac{x^2-3x+2}{x-2} - 1 \right| = \left| \frac{x^2-4x+4}{x-2} \right| = \left| \frac{(x-2)^2}{x-2} \right| = |x-2| < \varepsilon$ 成

立,只需取 $\delta = \varepsilon$, 则对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon > 0$, 当 $0 < |x - 2| < \delta$ 时, 恒有

$$\left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} - 1 \right| < \varepsilon$$

由函数极限 $\varepsilon - \delta$ 定义, 有

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = 1$$

评注 用“ $\varepsilon - \delta$ ”语言来证明当 $x \rightarrow x_0$ 时函数极限的存在性, 关键是从不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 出发, 找到正数 δ .

2. 利用代数的方法求极限

例 1.5 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$.

分析 先求和 $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \frac{n(1+n)}{2n^2} = \frac{1+n}{2n}$, 然后再求极限.

解答 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1+n)}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+n}{2n} = \frac{1}{2}$

评注 此题说明无穷多个无穷小的和不一定是无穷小.

例 1.6 求极限: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$.

分析 当 $x \rightarrow 1$ 时, 为 $\frac{0}{0}$ 型的不定式, 可用分解因式的方法, 约去零因式 $(x - 1)$, 然后根据极限四则运算法则计算.

解答 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+2x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2}$

评注 对于含有零因式的 $\frac{0}{0}$ 型的未定式, 在后续课程中用洛必达法则求解也可.

例 1.7 求极限: $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4}{4-x^2} - \frac{1}{2-x} \right)$.

分析 当 $x \rightarrow 2$ 时, 两个分式均趋于 ∞ , 可先通分, 转换为 $\frac{0}{0}$ 型的不定式, 然后再用分解因式的方法, 约去零因式 $(2-x)$.

解答 $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4}{4-x^2} - \frac{1}{2-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - (2+x)}{(2+x) \cdot (2-x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)}{(2+x)(2-x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2+x} = \frac{1}{4}$

评注 $\infty - \infty$ 型的不定式, 一般要转换为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 的不定式来计算.

例 1.8 求极限: (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 5^n}{3^n + 5^n} (n \in \mathbb{N})$.

分析 两题均为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的分式, 可用最大项同除以分子和分母.

解答 (1) 分子、分母的最高次方相同均为 x^{50} , 故分子和分母同除以 x^{50} , 即

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(2 - \frac{3}{x}\right)^{20} \left(3 + \frac{2}{x}\right)^{30}}{\left(2 + \frac{1}{x}\right)^{50}} = \frac{2^{20} \cdot 3^{30}}{2^{50}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{30}$$

(2) 分子、分母同除 5^n , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 5^n}{3^n + 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n - 1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n + 1} = -1$$

评注 上述两题在用最大项同除以分子和分母的同时, 还利用了无穷大的倒数是无穷小和公比绝对值小于 1 的等比数列的极限为零的结论. 可见在求解极限的过程中, 可以多种方法相结合使用.

例 1.9 求极限: (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x})$; (2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{5}}$.

分析 所求极限中含有根式, 可将分子和分母同时有理化.

$$\begin{aligned} \text{解答} \quad (1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x + \sqrt{x}} - x}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}} + 1} = \frac{1}{2} \\ (2) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{5}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2 + 5} - 3)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)(\sqrt{2x + 1} + \sqrt{5})}{(\sqrt{2x + 1} - \sqrt{5})(\sqrt{2x + 1} + \sqrt{5})(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{2x - 4} = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{2(x - 2)} = \frac{2\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

评注 分子和分母同时有理化后: ① 由 $\infty - \infty$ 型的无理式转化成 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的有理式, 然后分子、分母同除最高次幂 $\sqrt{x}$; ② 由 $\frac{0}{0}$ 型的无理式转化成 $\frac{0}{0}$ 型的有理式, 然后利用因式分解消去零因式 $(x - 2)$.

例 1.10 求极限: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[n]{x}}{1 - \sqrt[m]{x}} \quad (m, n \in \mathbf{N})$.

分析 所求极限中含有根式, 但分子、分母的根指数不相同, 无法将分子和分母同时有理化, 因此考虑变量替换法.

解答 令 $t = \sqrt[mn]{x}$ 则当 $x \rightarrow 1$ 时, $t \rightarrow 1$, 于是

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[n]{x}}{1 - \sqrt[m]{x}} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1 - t^m}{1 - t^n} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(1 - t)(1 + t + t^2 + \cdots + t^{m-1})}{(1 - t)(1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1})} = \frac{m}{n}$$

评注 本题中变量替换的主要目的是去掉根式, 将无理式转化成有理式, 然后根据有理式中消去零因子的方法求之.

3. 利用两个重要极限

例 1.11 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x}$.