

WAVELET DOMAIN DIGITAL IMAGE
MODELING AND APPLICATION



小波域数字图像 建模及其应用

肖志云 著



北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

014035895

TN911.73

95

小波域数字图像 建模及其应用

肖志云 著



 **北京理工大学出版社**

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



北航

C1723215

TN911.73
95

内 容 简 介

小波变换是近十几年来发展起来的一种新的信号处理工具,由于其特有的多分辨率分析特性与良好的时频局部分析特性,使其被广泛应用于信号和图像处理领域。基于小波域的各种图像统计模型在图像处理领域中充当了一个重要角色。本书以小波变换为工具,系统讨论了小波域图像统计模型在图像降噪、图像超分辨率重构、图像复原、图像修复、图像数字水印等方面的应用。

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

小波域数字图像建模及其应用 / 肖志云著. —北京:北京理工大学出版社, 2014.3

ISBN 978 - 7 - 5640 - 8951 - 1

I. ①小… II. ①肖… III. ①小波理论 - 应用 - 数字图象 - 系统建模 - 研究 IV. ①TN911.73

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 045034 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(总编室)

82562903(教材售后服务热线)

68948351(其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 保定市中华美凯印刷有限公司

开 本 / 710 毫米 × 1000 毫米 1/16

印 张 / 12.5

字 数 / 200 千字

版 次 / 2014 年 3 月第 1 版 2014 年 3 月第 1 次印刷

定 价 / 38.00 元

责任编辑 / 王玲玲

文案编辑 / 王玲玲

责任校对 / 孟祥敬

责任印制 / 王美丽

图书出现印装质量问题,请拨打售后服务热线,本社负责调换

前 言

小波被誉为“数学的显微镜”。小波自 20 世纪 80 年代开始发展,在数学领域享有极高的荣誉,随着其日趋完善,小波已渐为各个领域所熟悉并应用,特别是在图像处理中发挥了极为重要的作用,如在图像数据压缩、复原、去噪等方面均取得了相当多的科研成果。

随着小波理论的深入发展,小波应用产业的建立也成为一种趋势。各种以小波理论研究和应用为主的公司和研究小组相继成立,例如,以 Daubechies 为首的 Bell 实验室小波小组、Donoho 领导的 Stanford 大学的小波与统计学中心、Gopinath 和 Burrus 领导的 Rice 大学的小波与多滤波器组中心以及 Wickerhauser 等的小波包应用研究中心。而《Wavelet Digest》也成了 Internet 上发行最广的专业期刊之一。从 20 世纪 90 年代初,国内不少院校和科研单位相继成立了小波理论和应用研究的专题小组,已取得了部分突出成果。而且,可以实现小波变换的集成芯片也已经问世。现在,有关小波理论的文献已经遍布当代信息科学的所有学科。所有这些都充分显示了小波分析自身的优势和强大的生命力。

本书以小波变换为工具,以小波域数字图像统计模型为基础,系统讨论了自然图像小波域统计模型在图像去噪、图像超分辨率重构、图像复原、图像数字水印、图像修复以及纹理图像分割等方面的应用研究,是在作者长期研究小波变换在图像处理中的应用的的基础上撰写而成的,是作者科研成果的体现。书中的各种应用均取材于当前国内外小波应用领域的最新文献及作者近几年的科研成果,对工程应用具有直接的指导意义和较大的学术价值和作用。

本书撰写过程中,得到了内蒙古工业大学电力学院、内蒙古自治区机电控制重点实验室以及作者曾经生活、学习过的中科院自动化所国家专用集成电路设计工程技术研究中心相关老师和研究生的帮助,在此表

示衷心的感谢。本书中所述及的研究工作得到了国家自然科学基金、内蒙古自然科学基金、内蒙古高等学校科学研究基金以及内蒙古工业大学重点研究项目基金的资助。

由于作者水平有限，书中难免会有疏漏与不妥之处，恳请读者不吝指正。

作 者

2013年11月20日

于内蒙古工业大学电力学院自动化系

目 录

第 1 章 数字图像小波变换及其统计模型	1
1.1 从傅里叶变换到小波变换	1
1.2 小波变换	3
1.2.1 连续小波变换	4
1.2.2 离散小波变换	7
1.2.3 二维信号的小波多分辨率分析	8
1.3 自然图像小波变换的基本性质	10
1.4 自然图像的小波域统计模型	12
本章参考文献	20
第 2 章 基于小波域统计模型的图像去噪算法	22
2.1 小波域图像去噪算法综述	22
2.1.1 图像退化模型描述	22
2.1.2 小波域图像去噪算法综述	23
2.1.3 各种小波变换在信号去噪中的应用	32
2.1.4 不同噪声场合中的小波去噪算法	33
2.1.5 图像去噪算法的性能衡量标准	34
2.2 基于快速参数估计的小波域 HMT 模型及其图像去噪算法	35
2.2.1 小波域隐马尔科夫树 (HMT) 模型	36
2.2.2 基于小波域 HMT 模型的去噪算法	46
2.2.3 基于快速参数估计的小波域 HMT 模型的去噪算法	47
2.2.4 Gibbs 效应的消除	51
2.2.5 实验结果分析与结论	51
2.3 基于二元树复小波的局部高斯混合模型图像去噪算法	55
2.3.1 局部高斯混合模型 (Local Gaussian Mixture Model, LGMM)	56
2.3.2 二元树复小波变换 (Dual-Tree Complex Wavelet	

Transform)	57
2.3.3 基于二元树复小波变换的局部高斯混合降噪算法框架	59
2.3.4 基于二元树复小波变换的局部高斯混合模型的 参数估计	60
2.3.5 算法描述	62
2.3.6 实验结果分析与结论	62
2.4 基于自适应阈值分类的小波域混合模型去噪	65
2.4.1 小波系数的分类	65
2.4.2 基于分类的小波域混合模型图像去噪算法	66
2.4.3 算法描述	69
2.4.4 Gibbs 效应的消除	70
2.4.5 实验结果分析与结论	70
本章参考文献	72
第3章 基于小波域统计模型的图像超分辨重构	78
3.1 引言	78
3.2 图像退化模型	79
3.3 病态问题分析	82
3.4 超分辨率思想概述	82
3.5 超分辨率算法综述	84
3.6 基于 MCA 与小波域 HMT 扩展模型的图像超分辨率算法	86
3.6.1 形态分量分析 (MCA)	86
3.6.2 小波域 HMT 模型的扩展	89
3.6.3 基于贝叶斯的图像超分辨算法框架	90
3.6.4 图像的先验模型	91
3.6.5 基于 MCA 与 HMT 的图像的超分辨率重构算法	92
3.7 基于零空间追踪的图像超分辨率算法	96
3.7.1 显微镜采样时间与采样分辨率之间的矛盾	96
3.7.2 零空间追踪算法	97
3.7.3 基于零空间追踪的图像超分辨率重构算法	101
本章参考文献	104
第4章 基于小波域统计模型的图像复原算法	108
4.1 引言	108
4.2 小波域复原 (反卷积) 问题综述	109
4.2.1 复原问题的小波域描述	109

4.2.2	小波域复原(反卷积)贝叶斯理论	109
4.2.3	复原(反卷积)问题的规整化理论及方法	112
4.2.4	小波域图像复原的研究现状	113
4.3	基于快速估计的小波域 HMT 模型图像复原	116
4.3.1	图像复原的 Bayes 方法及其小波域表示	116
4.3.2	基于小波域 HMT 模型图像复原算法	118
4.3.3	实验结果分析与结论	122
4.4	基于小波域局部高斯模型的图像复原算法	125
4.4.1	问题描述	125
4.4.2	小波域局部高斯模型	126
4.4.3	基于小波域局部高斯模型的图像复原算法	127
4.4.4	实验结果分析与结论	129
4.5	基于傅里叶与小波域双变量模型的图像复原算法	131
4.5.1	频率域规整化求逆	132
4.5.2	小波域双变量模型的收缩去噪	133
4.5.3	算法描述	134
4.5.4	仿真结果及结论	135
4.6	基于非抽取小波域双变量模型的图像复原	136
4.6.1	基于双变量模型的非抽取小波域图像复原	137
4.6.2	算法的描述	140
4.6.3	实验结果分析	141
	本章参考文献	143
第 5 章	小波域的图像修复算法	147
5.1	基于小波变换的图像修复算法	147
5.1.1	基小波的选取	148
5.1.2	低频图像修复	149
5.1.3	高频信息的预测和自然化处理	150
5.1.4	算法实现	150
5.2	基于小波变换的纹理图像修复算法	152
5.2.1	算法总体描述	153
5.2.2	数据准备	154
5.2.3	确定优先权	154
5.2.4	纹理块的填充	156
5.2.5	实验结果与算法分析	156

本章参考文献	159
第 6 章 小波域图像数字水印算法	161
6.1 图像数字水印技术介绍	161
6.2 基于阈值分类的小波域图像数字水印算法	166
6.2.1 小波域图像数字水印算法的关键技术	166
6.2.2 低频子带水印嵌入方法	167
6.2.3 高频子带水印嵌入方法	168
6.2.4 算法描述	169
6.2.5 实验结果	170
6.3 基于 EM 分类的小波域图像数字水印算法	172
6.3.1 EM 算法原理	172
6.3.2 基于 EM 分类的小波域图像数字水印算法	174
6.3.3 实验结果分析与结论	176
本章参考文献	178
第 7 章 基于小波域快速参数估计的 HMT 模型纹理分割	180
7.1 纹理分割综述	180
7.2 小波域局部参数快速估计的 HMT 模型	181
7.3 基于小波域局部参数快速估计的 HMT 模型纹理分割	182
7.3.1 纹理特征矢量训练	182
7.3.2 纹理分割	183
7.3.3 纹理分割结果融合	184
7.3.4 实验结果分析与结论	185
本章参考文献	187

第 1 章

数字图像小波变换 及其统计模型

1.1 从傅里叶变换到小波变换

在信号处理中,重要的方法之一是傅里叶变换(Fourier Transform, FT),它架起了时间域和频率域之间的桥梁。FT一直统治着线性时不变的信号处理,最主要的原因是FT所用的正弦波 $e^{j\omega t}$ 是所有线性时不变算子的特征向量。

设 $f(t)$ 是系统的输入信号, $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$,则函数 $f(t)$ 的连续FT定义为:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f(t) dt \quad (1-1)$$

相应地, $F(\omega)$ 的FT逆变换定义为:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} F(\omega) d\omega \quad (1-2)$$

因此,需要用数值积分计算FT,即取 $f(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的离散点上的值来计算这个积分。但在实际应用中,人们希望用计算机进行信号的频谱分析及其他方面的处理工作,所以要求信号在时域和频域上都是离散的,且为有限长。下面介绍离散傅里叶变换(Discrete Fourier Transform, DFT)的定义。

给定实的或复的离散时间序列 $f_0, f_1, \dots, f_{N-1}$,设该序列绝对可和,即满足 $\sum_{n=0}^{N-1} |f_n| < \infty$,则序列 $\{f_n\}$ 的DFT为:

$$X(k) = F(f_n) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1-3)$$

序列 $\{X(k)\}$ 的离散傅里叶逆变换 (IDFT) 为:

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (1-4)$$

其中, n 是对时间域的离散化; k 是对频率域的离散化, 且它们都是以 N 为周期的。离散傅里叶变换序列 $\{X(k)\}$ 是以 2π 为周期, 且具有共轭对称性。

从物理意义上讲, FT 的实质是把 $f(t)$ 波形分解成许多不同频率和幅值正弦波的叠加和, 这样就可以从时域转换到频域, 以实现信号的分析。

虽然 FT 能够将信号的时域特征和频域特征联系起来, 但只能从信号的时域和频域分别观察, 而不能将二者结合起来。这是因为信号时域波形中不包含任何频域信息, 而其傅里叶谱是信号的统计特征, 是信号整个时域内的积分, 没有局部化分析信号的功能, 所以不具备时域信息。这样, 在信号分析中就存在一对矛盾, 即时域和频域的局部化矛盾。

在实际生活中, 瞬变信号范围比平稳信号大得多, 也更加复杂, 并且信号在每一时刻附近的频域特征都很重要, 因此, 必须寻找一种新的时频分析方法, 能将时域和频域结合起来描述信号的时频联合特征, 以构成信号的时频谱, 这就是所谓的“时频分析法”。

为了研究信号在局部范围内的频率特性, Gabor 于 1946 年在 FT 的基础上引入了一个时间局部化“窗函数” $g(t-\tau)$, 其中参数 τ 用于平移窗, 以便覆盖整个时域。Gabor 变换定义为:

$$S(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \quad (1-5)$$

上式表明, 对信号的 Gabor 变换就是用平移了的窗函数去乘信号, 再做 FT。因此, Gabor 变换也称为“窗口傅里叶变换”或“短时傅里叶变换”。

Gabor 变换的主要优点是当信号的大部分能量处于 $t=\tau$ 附近的时间间隔 $[t_0, t_0 + \sigma_t]$ 和频率间隔 $[\omega_0, \omega_0 + \sigma_\omega]$ 时, 窗口傅里叶变换将局限在区域 $[t_0, t_0 + \sigma_t] \times [\omega_0, \omega_0 + \sigma_\omega]$ 内。 $S(\omega, \tau)$ 反映了信号 $f(t)$ 在 $t=\tau$ 附近的频谱特征, 实现了信号 $f(t)$ 的时频局部化分析, 这是它比 FT 优越之处。但是, Gabor 变换窗口的形状和大小与频率无关, 保持不变。这不符合实际问题中变换窗口大小应随频率而变, 频率越高窗口应越小的要求。

而小波变换继承和发展了 Gabor 变换局部化的思想, 同时又克服了窗

口大小不随频率变化等缺点,是比较理想的对信号进行局部频谱分析的数学工具。

由于小波变换对不同的频率成分在时域上的取样步长是可调节的,即在高频时取样步长小,而在低频时取样步长大。正是在这一意义上,小波变换被誉为“数学显微镜”,它能将信号或图像分解成交织在一起的多种尺度成分,并对大小不同的尺度成分采用相应粗细不同的时域或空域取样步长,从而不断聚焦到研究对象的任意微小细节。

1.2 小波变换

小波变换(Wavelet Transform, WT)是20世纪80年代发展起来的应用数学分支。虽然在此之前已有一些学者做过一些零散的工作,但是理论上构成较系统的框架则主要是法国数学家 Meyer、地质物理学家 Morlet 和理论物理学家 Grossman 的贡献。而将这一理论引入工程应用,特别是信号处理领域,则主要归功于 Daubechies 和 Mallat 两位学者。

一直以来,FT 是信号处理的主要手段,但它只能获得信号的整个频谱,难以得到信号的局部特性,因而不能充分刻画时变、非平稳信号的特征。在 FT 基础上发展起来的小波变换,通过引入可变的尺度因子和平移因子,在信号分析时具有可调的时频窗口,巧妙地解决了时频局部化矛盾,弥补了 FT 的不足,为信号处理提供了一种多分辨率下的动态分析和综合手段。信号处理是小波变换理论最成功的应用领域,其他领域的应用大都来源于此。基于小波变换的信号分解与重构,等效于设计一个完全重构滤波器组,若滤波器组满足正则性条件,则通过设计完全重构滤波器组,既可计算离散小波变换,又能导出连续小波基。近十多年来,小波变换已成为统计信号和图像处理新的有力工具。小波变换已成功应用于自然信号处理的诸多领域,如信号估计、检测、分类、压缩、合成以及预测和滤波等。

小波变换的特有性质使它在信号处理,特别是在图像处理中表现出以下优点:

① 小波变换的重建能力,保证了信号在分解过程中没有任何信息损失、没有任何冗余信息,即小波变换作为一组表示信号分解的基函数是唯一的。

② 小波变换把图像分解成平滑图像和细节图像之和,它们分别代表

了图像的不同结构,因此,原始图像的结构信息和细节信息很容易提取。

③ 小波变换有快速算法——Mallat 算法,它在小波变换中的作用相当于快速 FT 在 Fourier 变换中的作用,这为小波变换的应用提供了必要的手段。

④ 二维小波分解为图像的分析提供了方向性选择,这种方向性选择非常适合于人眼的视觉系统特性。换句话说,小波变换的方向选择性恰好与人眼视觉系统的方向性相吻合。

1.2.1 连续小波变换

设 $f(t)$ 是平方可积函数,即 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$, $\psi(t)$ 是被称为基本小波或母小波 (Mother Wavelet) 的函数。则定义

$$WT_f(a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi^* \left(\frac{t-\tau}{a} \right) dt = \langle f(t), \psi_{a\tau}(t) \rangle \quad (1-6)$$

称为 $f(t)$ 的连续小波变换。式中, $a > 0$, 是尺度因子; τ 反映位移, 其值可正可负; 上标 * 表示取共轭; 符号 $\langle x, y \rangle$ 代表内积, 其含义是

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int x(t) y^*(t) dt \quad (1-7)$$

$\psi_{a\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left(\frac{t-\tau}{a} \right)$ 是母小波的位移与尺度伸缩。其中, 母小波 $\psi(t)$ 的傅里叶变换 $\tilde{\psi}(\omega)$ 要满足如下容许性条件 (完全重构条件或恒等分辨率条件):

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{\psi}(\omega)|}{\omega} d\omega < \infty \quad (1-8)$$

连续小波变换的重构公式为:

$$f(t) = C_\psi^{-1} \int_0^{+\infty} \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} WT_f(a, \tau) \psi_{a\tau}(t) d\tau \quad (1-9)$$

对小波变换公式 (1-6), 有下面几点说明:

① 尺度因子 a 的作用是将母小波 $\psi(t)$ 做伸缩, a 越大, $\psi(t/a)$ 越宽, τ 反映位移。如图 1.1 所示。对于一个持续时间有限的小波, 不同尺度下小波的持续时间随 a 加大而增宽, 幅度则与 $\sqrt{a}$ 成反比, 但波形不变。图 1.2 表示了小波分析的时间区间随 a 变化而变化的情况。

② 母小波 $\psi(t)$ 可能是复数信号, 也可能是解析信号。

③ $\psi_{a\tau}(t)$ 前加因子 $1/\sqrt{a}$ 的目的是使用不同 a 值的 $\psi_{a\tau}(t)$ 的能量保持相等。

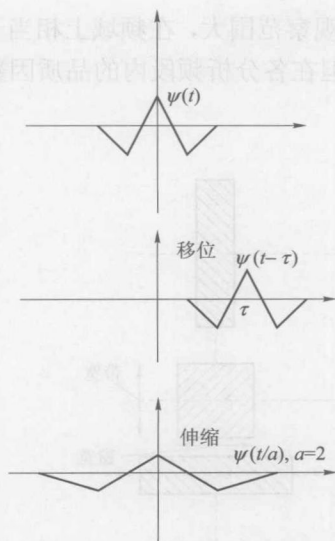


图 1.1 小波的伸缩与平移图

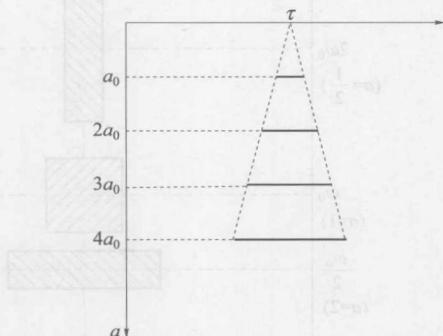


图 1.2 不同 a 值下小波分析时间区间的变化

式 (1-6) 的频域表示为:

$$WT_f(a, \tau) = \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int F(\omega) \tilde{\psi}^*(a\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (1-10)$$

由上式可知, 小波变换在频域上的特点如下:

① 若 $\psi(\omega)$ 是幅频特性比较集中的带通函数, 则小波变换便具有表征待分析信号 $F(\omega)$ 频域上局部性质的能力。

② 采用不同的尺度因子时, $\tilde{\psi}(a\omega)$ 的中心频率和带宽都不一样, 但品质因数 Q (中心频率/带宽) 不变, 称为小波变换的恒 Q 性。图 1.3 给出了不同 a 值下小波频率范围的变换, 由图 1.3 可以看出, a 值越大, 小波分析频率越低。

总之, 从频域上看, 对函数 $f(t) \in L^2(R)$ 用不同的尺度 a 做小波变换相当于用一组带通滤波器对信号进行处理。将图 1.2 与图 1.3 结合, 小波变换在时-频平面上的基本分析单元具有图 1.4 所示的特点。当 a 较小时, 时间轴上的观察范围小, 在频域上相当于用较高频率做分辨率较高的分析, 即用高频

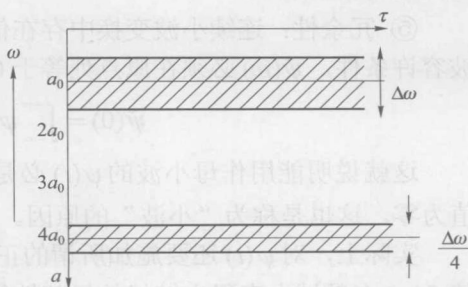


图 1.3 不同 a 下分析小波频率范围的变化

小波做细节观察；当 a 较大时，时间轴上的观察范围大，在频域上相当于用低频小波做概貌观察。分析频率有高有低，但在各分析频段内的品质因数 Q 却保持不变。

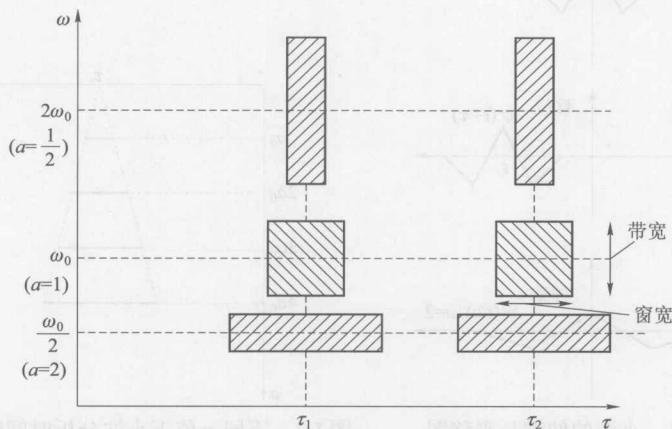


图 1.4 小波变换的基本分析单元

连续小波变换有以下重要性质：

- ① 线性叠加性：一个多分量的小波变换等于各分量的小波变换之和。
- ② 平移不变性：若 $f(t)$ 的小波变换为 $WT_f(a, \tau)$ ，则 $f(t-t_0)$ 的小波变换为 $WT_f(a, \tau-t_0)$ 。
- ③ 尺度转换性：若 $f(t)$ 的小波变换为 $WT_f(a, \tau)$ ，则 $f(t/\lambda)$ 的小波变换为：

$$\sqrt{\lambda} WT_f\left(\frac{a}{\lambda}, \frac{\tau}{\lambda}\right), \quad \lambda > 0 \quad (1-11)$$

- ④ 自相似性：对应不同尺度参数 a 和不同平移参数 τ 的连续小波变换之间是自相似的。

- ⑤ 冗余性：连续小波变换中存在信息变换的冗余性。为了完全满足小波容许条件， $\tilde{\psi}(\omega)$ 必须在原点处等于 0，即：

$$\tilde{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (1-12)$$

这就说明能用作母小波的 $\psi(t)$ 必是正负交替的振荡波形，使得其平均值为零，这也是称为“小波”的原因。

实际上，对 $\psi(t)$ 还要施加所谓的正则性条件 (Regularity Condition)，使 $\tilde{\psi}(\omega)$ 在频域上表现出较好的局部性能，而且要求 $\psi(t)$ 具有 n 阶消失矩，且 n 值越大越好，即：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^p \psi(t) dt = 0, \quad p = 1 \sim n \quad (1-13)$$

小波理论的基本出发点是将信号分解成不同尺度（或分辨率）下的分量组合。这种分解的优点是使得信号在不同尺度下的分量可以分离，以便进行单独的研究。信号的全局特征可以在较粗的尺度下观察，而信号的局部特征或奇异点可以在较细的尺度下进行分析。

规范正交小波基可以在连续时间域构造，也可以从离散时间域的滤波器出发构造。Daubechies^[1]首先发现，在一定的正则性条件下，离散滤波器或 QMF (Quadrature Mirror Filterbanks) 通过迭代运算后将收敛于连续的小波函数。这是一个非常实用的小波分解策略，通过这个策略就可以采用通过 FIR (Finite Impulse Response) 滤波器来实现它。文献[1]同时揭示了使用 FIR 滤波器实现正交规范小波基与理想重建的子带编码策略之间的等价性。此后，Cohen、Daubechies 和 Feauveau 等人^[2]给出了构造有限支撑域的双正交小波的系统方法。

Mallat 和 Meryer 等^[3, 4]合作并提出的多分辨率分析 (Multi-resolution Analysis, MRA) 框架，并给出了小波构造的一般方法，更加快了小波理论的发展。

1.2.2 离散小波变换

在实际的应用中，尤其是为了便于计算机实现，必须对连续小波离散化。离散化都是针对连续的尺度参数 a 和连续平移参数 τ ，而不是针对时间变量 t ，即离散小波变换实际上是离散 a 、 τ 栅格下的小波变换。

通常，连续小波变换中的尺度参数 a 和平移参数 τ 的离散化公式为^[3]：

$$a = a_0^j, \quad \tau = k\tau_0 a_0^j, \quad a_0 \neq 1, \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (1-14)$$

对应的离散小波函数 $\psi_{j,k}(t)$ 为：

$$\psi_{j,k}(t) = a_0^{-\frac{j}{2}} \psi(a_0^{-j}t - k\tau_0) \quad (1-15)$$

因此，对于任意函数 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ 的离散小波变换为：

$$C_{j,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{j,k}^*(t) dt = \langle f, \psi_{j,k} \rangle \quad (1-16)$$

上式称为离散小波变换 (DWT)。其重构公式 (逆变换) 为：

$$f(t) = c \sum_j \sum_k C_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (1-17)$$

式中，系数 c 是一个与信号无关的常数。

实际中采用的是动态采样网格, 最常用的是二进制动态采样网格, 即 $a_0 = 2$, $\tau_0 = 1$ 。每个网格点对应的尺度为 2^j , 而平移为 $k2^j$ 。 $a-\tau$ 平面的采样点如图 1.5 所示。

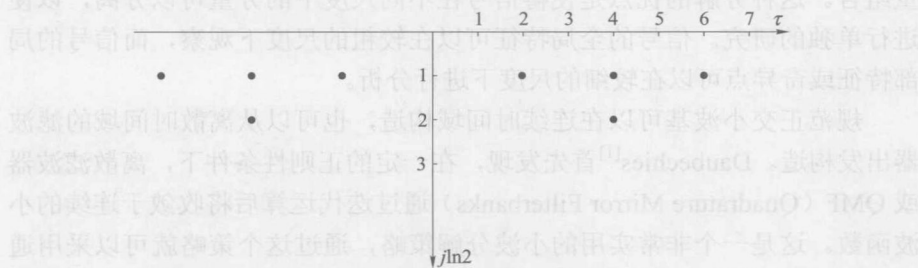


图 1.5 $a-\tau$ 平面的二进制散栅格

由此得到的小波

$$\psi_{j,k} = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}t - k) \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (1-18)$$

称为二进小波, 该小波广泛地应用在语音与图像处理领域。二进小波对信号的分解, 恰似人类的视觉和听觉特性, 同时也使得快速算法得以实现。

1.2.3 二维信号的小波多分辨率分析

本书研究的对象是图像, 这里主要讨论二维信号的小波变换。构造二维小波一般有两种方法: 一种是张量积方法, 是一维小波变换的推广, 即对二维图像的每一维进行一维小波变换; 另一种方法是多小波方法, 是一种各向异性的二维小波变换。本书采用的小波变换是张量积小波变换。在图像处理中, 图像是一个能量有限的二维函数, 可方便地将一维信号的多分辨率模型推广到二维图像信号的情况。这里只考虑 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨率分析。

给定 $L^2(\mathbb{R})$ 的多分辨率分析 $(V_j^{(1)})_{j \in \mathbb{Z}}$, 一个嵌套的二维子空间系列 $(V_j^{(2)})_{j \in \mathbb{Z}}$ 构成 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 的多分辨率逼近, 其中

$$V_j^{(2)} = V_j^{(1)} \otimes V_j^{(1)} \quad (1-19)$$

表示两个一维向量空间的张量积。并且二维尺度函数为:

$$\Phi(t, s) = \phi(t)\phi(s) \quad (1-20)$$

式中, $\phi(t)$ 是相应的一维多分辨率分析 $(V_j^{(1)})_{j \in \mathbb{Z}}$ 的尺度函数。函数族

$$\Phi_{j,k,l}(t, s) = \phi_{j,k}(t)\phi_{j,l}(s) \quad j, k, l \in \mathbb{Z} \quad (1-21)$$

是 $V_j^{(2)}$ 的规范正交基。