新三导丛书
XIN SANDAO CONGSHU

大学物理

导教·导学·导考

赵省贵◎主编

- 自主学习（典型例题解析）
- 课程过关（自测模拟题库）
- 教师备课（重点难点归纳）

西北工業大學出版社

新三导丛书

大学物理
导教·导学·导考

主　编　赵省贵

副主编　郝丽梅　张永元

　　　　李　敏　王新霞

西北工业大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

大学物理导教·导学·导考/赵省贵主编．—西安：西北工业大学出版社，2014.8
（新三导丛书）
ISBN 978-7-5612-4072-4

Ⅰ.①大…　Ⅱ.①赵…　Ⅲ.①物理学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.①O4

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第182775号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路127号　邮编：710072
电　　话：(029)88493844　　88491757
网　　址：www.nwpup.com
印 刷 者：兴平市博闻印务有限公司
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张：17.75
字　　数：558千字
版　　次：2014年8月第1版　　2014年8月第1次印刷
定　　价：36.00元

前　言

本书是为配合大学物理课程的教学和学习所编写的辅导教材。为了提高学生的科学素质，适应培养21世纪高科技人才的需要，适当增加了近代物理部分的内容。全书共分为10章，每章包括5个部分：基本要求、内容提要、难点浅释、解题示例和自测题。为了便于学生练习和掌握所学知识并与教学进度相适应，本书最后还配有20套模拟试题和相应的参考答案。

本书在选材和讲解方面力求简明扼要、内容准确、选题典型、覆盖面广。通过本书的学习，对于学生了解各章的基本要求、掌握重点和理解难点将有所裨益，特别是在解题技能上将会得到较好的训练。可以说，本书是学习“大学物理”课程必不可少的一本指导书。

本书由赵省贵担任主编，郝丽梅、张永元、李敏、王新霞担任副主编。参加编写工作的有赵省贵（第1,2章，模拟试题7～11套及参考答案）、郝丽梅（第4,8章，模拟试题12～20套，附录及参考文献）、张永元（第3,6章及模拟题1～5套）、王新霞（第5,9章）、李敏（第7,10章及模拟题第6套）。赵省贵负责全书统稿工作，班丽瑛对书稿进行了全面仔细的审阅。

本书的编写过程也得到了西安科技大学物理教研室各位老师的大力支持和帮助，可以说本书也凝聚了物理教研室众多老师的劳动成果。这里对给予大力支持与帮助的个人和单位及参考文献的各位作者一并表示衷心感谢。

书中难免有疏漏和错误之处，衷心希望读者提出宝贵的意见。

编　者

2014年6月

目　录

第1章 质点力学

1.1 质点运动学

一、基本要求

(1)掌握位置矢量、位移、速度、加速度、角速度和角加速度等描述质点运动和运动变化的物理量。

(2)明确运动方程的意义,了解在已知速度(或加速度)和初始条件的情况下建立运动方程的方法。

(3)根据用直角坐标表示的运动方程,能熟练地计算质点在平面内运动的位移、速度和加速度。根据用平面极坐标表示的运动方程,能计算质点作圆周运动时的角速度、角加速度、切向加速度和法向加速度。能运用相对速度和相对加速度的概念解题。

二、内容提要

1. 基本概念

(1) 位置矢量(位矢)$\boldsymbol{r}$。从坐标原点到某时刻质点位置所引的矢量。

在直角坐标系中,

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

(2) 位移 $\Delta\boldsymbol{r}$。自运动始点指向终点的有向直线线段,用 $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ 表示。它描述质点在 Δt 时间内位置的变化。

(3) 速度 $\boldsymbol{v}$。描述质点运动快慢的物理量,其中,

平均速度 $\quad \overline{\boldsymbol{v}} = \dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$, 瞬时速度 $\quad \boldsymbol{v} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$

在平面直角坐标系中,

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j}$$

(4) 加速度 $\boldsymbol{a}$。描述质点速度变化快慢的物理量,其中,

平均加速度 $\quad \overline{\boldsymbol{a}} = \dfrac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$, 瞬时加速度 $\quad \boldsymbol{a} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$

在平面运动情况下,

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j}$$

在自然坐标系中,

$$\boldsymbol{a} = a_n\boldsymbol{n} + a_\tau\boldsymbol{\tau} = \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}$$

式中,$\boldsymbol{n}$ 为法线方向的单位矢量;$\boldsymbol{\tau}$ 为切线方向的单位矢量;a_τ 为切向加速度;a_n 为法向加速度;ρ 为质点所在位置的曲率半径。

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}, \quad \tan\theta = \frac{a_n}{a_\tau}$$

θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与切线方向的夹角。

2. 运动方程

质点的位置坐标随时间变化的关系，即位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 与时间 t 的函数关系式，称为质点的运动方程。在平面运动的情况下，

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$$

匀速直线运动的方程为

$$x=x_0+vt$$

匀变速直线运动的方程为

$$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

从质点的运动方程，可以求得任一时刻质点的位移、速度和加速度。反之，若已知 $\boldsymbol{a}(t)$ 或 $\boldsymbol{v}(t)$ 以及初始条件，通过积分可以求得质点的运动方程。

3. 运动叠加原理

一个运动可以看成由几个同时进行的各自独立的运动叠加而成，称为运动的叠加原理。像抛体运动($\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{g}$) 可以看成水平方向匀速直线运动和竖直方向匀变速直线运动的叠加。

4. 相对运动

在两个参照系(“静”系 K 和“动”系 K') 中观测同一质点 A 的运动。

相对速度为

$$\boldsymbol{v}_{AK}=\boldsymbol{v}_{AK'}+\boldsymbol{v}_{K'K}$$

相对加速度为

$$\boldsymbol{a}_{AK}=\boldsymbol{a}_{AK'}+\boldsymbol{a}_{K'K}$$

三、难点浅释

1. Δs，$|\Delta\boldsymbol{r}|$ 与 Δr 三者的区别

从运动学的观点看，$|\Delta\boldsymbol{r}|$ 是位移的模，也就是位移的大小，即图 1-1 中 P_1 和 P_2 两点之间的直线距离，可以表示为

$$|\Delta\boldsymbol{r}|=|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|$$

而 Δr 是质点位矢的径向增量，它可以表示为

$$\Delta r=|\boldsymbol{r}_2|-|\boldsymbol{r}_1|$$

Δr 代表图 1-1 中 QP_2 之间的距离，它反映出从质点 P_1 到 P_2 的空间位矢沿径向的变化量。

就位移本身的大小而言，$|\Delta\boldsymbol{r}|\neq\Delta r$，路程 Δs 是质点在时间 Δt 内运动所经历的实际长度。位移和路程是两个不同的概念，即使在直线运动中也不能混用。它们的量值在一般情况下不相等，只在 $\Delta t\to 0$，质点始终沿同一方向作直线运动时，才有 $|\Delta\boldsymbol{r}|=\Delta s$。

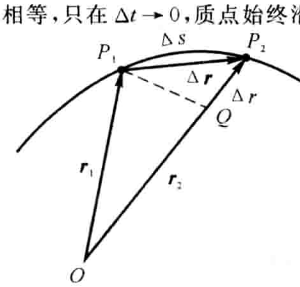

图 1-1

2. 速度与速率的区别

速度与速率有严格的区别。速度定义为 $\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$，即单位时间内的位移，它反映质点空间位置变化的快慢和方向，是个矢量。速率定义为 $v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，即单位时间内的路程，它反映质点沿轨道移动的快慢，是个标量。一般来说，位移的大小并不等于相应的曲线路程，故平均速度 $|\overline{\boldsymbol{v}}|=\left|\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}\right|$ 的大小与平均速

率 $\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 通常并不相等。例如质点绕圆转一周，平均速度为零，位矢变化的平均速率却不为零。对于微小位移来说，其大小 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$ 与相应的曲线运动路程 $\mathrm{d}s$ 趋于相等，即 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}s$，所以瞬时速度的大小总是等于瞬时速率，但从概念上讲，速度与速率的关系并非矢量与它的模的关系。

3. $\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|$ 与 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ 的区别

速度定义为位矢的时间变化率，即 $\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$，它的大小 $\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|$ 等于瞬时速率。但是常常有学生误认为 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ 就是速度的大小，亦即速率，这显然是错误的。速率定义为路程的时间变化率，即 $v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$。$\mathrm{d}s=|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|\neq \mathrm{d}r$，所以质点运动的瞬时速率

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|\neq\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

4. 运动方程，轨道方程和路程公式的比较

质点的位置坐标随时间变化的函数关系叫做质点的运动方程。在不同坐标系中，同一质点的位置用不同的坐标来描述。显然，同一质点的同一运动在不同坐标系中将具有不同形式的运动方程。在直角坐标系中，运动方程的矢量式为

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$$

其分量式为

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$$

质点运动时所经历的空间轨迹称为质点的运动轨道，轨道曲线的数学方程叫做轨道方程。在直角坐标系中，轨道方程为

$$f(x,y,z)=0$$

物体运动时所通过的实际路径的长度叫做路程。曲线路程要由速率对时间的积分来求出。这是因为速率就是路程对于时间的变化率，即 $v(t)=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$。由此得路程微元为 $\mathrm{d}s=v(t)\mathrm{d}t$，故质点在 t_1 到 t_2 时间内所经历的路程为

$$s=\int\mathrm{d}s=\int_{t_1}^{t_2}v(t)\mathrm{d}t$$

综上所述，运动方程不是位移公式，也不是路程公式。运动方程在力学中占据很重要的地位。知道了运动方程，就能确定质点在任一时刻的位置，通过求导可得出质点在任一时刻的速度、加速度。从运动方程中消去参数 t，就可得到运动的轨道方程。由此可见，知道了运动方程，也就掌握了运动的全貌。故探讨运动方程是力学中的中心课题。

四、解题示例

例 1-1　有一物体作直线运动，其运动方程为 $x=6t^2-2t^3$ (SI)，试求：(1) 第 2s 内的平均速度；(2) 第 3s 末的速度；(3) 第 1s 末的加速度；(4) 这物体作什么类型的运动？

解　因为

$$x=6t^2-2t^3 \qquad ①$$

所以

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=12t-6t^2 \qquad ②$$

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=12-12t \qquad ③$$

(1) 利用式 ①，得

$$v_2 = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{(6t^2 - 2t^3)\mid_{t=2} - (6t^2 - 2t^3)\mid_{t=1}}{2-1} = 4\ \mathrm{m/s}$$

方向沿 x 轴正向。

(2) 将 $t = 3\mathrm{s}$ 代入式 ②,得

$$v_3 = (12t - 6t^2)\mid_{t=3} = -18\ \mathrm{m/s}$$

速度为负值表示物体此时的运动方向与 x 轴正向相反。

(3) 将 $t = 1$ s 代入式 ③,得

$$a_1 = (12 - 12t)\mid_{t=1} = 0$$

(4) 从式 ① ~ 式 ③ 知,物体的速度与加速度都是时间 t 的函数,所以这个运动是一般的变速直线运动。

从此例可以看出运动方程的重要性,有了它,可求出质点在任何时刻的位移、速度和加速度,这是运动学的第一类问题。

例 1-2 已知一质点运动方程为 $r = 2t\boldsymbol{i} + (2 - t^2)\boldsymbol{j}$。求:

(1) 当 $t = 1$ s 到 $t = 2$ s 时,质点的位移;

(2) 当 $t = 2$ s 时,质点的速度和加速度。

解 (1)$t = 1$ s 时,质点的位矢为 $\boldsymbol{r}_1 = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$;当 $t = 2$ s 时,质点的位矢为 $\boldsymbol{r}_2 = 4\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$,位移为 $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = (4-2)\boldsymbol{i} + (-2-1)\boldsymbol{j} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$。

(2) 质点的速度和加速度分别为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = 2\boldsymbol{i} - 2t\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -2\boldsymbol{j}$$

当 $t = 2\mathrm{s}$ 时,有 $\boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{a}_2 = -2\boldsymbol{j}$。

例 1-3 如图 1-2 所示,长为 l 的细棒,在竖直平面内沿墙角下滑,上端 A 下滑速度为匀速 v。当下端 B 离墙角距离为 $x(x < l)$ 时,B 端水平速度和加速度是多大?

解 建立如图所示的坐标系:

设 A 端距离地高度为 y,有

$$x^2 + y^2 = l^2$$

方程两边对 t 求导,有

$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$$

所以,B 端的速度为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{y}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{y}{x}v$$

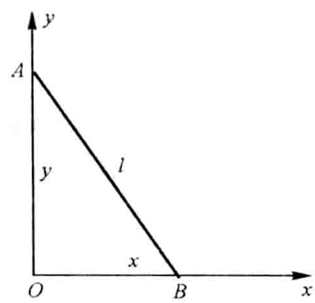

图 1-2

B 端的加速度为

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{x\mathrm{d}y/\mathrm{d}t - y\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}{x^2}v = \frac{\sqrt{l^2 - x^2}}{x}v = -\frac{l^2}{x^3}v^2$$

例 1-4 一质点作半径为 0.1 m 的圆周运动,已知运动学方程为 $\theta = 2 + 4t^3(\mathrm{rad})$。求:

(1) 当 $t = 2$ s 时,质点运动的 a_n 和 a_τ 以及 a 的大小?

(2) 当 θ 为多少时,质点的加速度与半径成 45° 角?

解 (1) 由运动学方程可得

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 12t^2, \alpha = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = 24t$$

所以

$$a_n = r\omega^2 = 230.4\ \mathrm{m/s^2}$$

$$a_\tau = r\alpha = 4.8\ \mathrm{m/s^2}$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = 230.5\ \mathrm{m/s^2}$$

(2) 设在 t' 时刻,质点的加速度与半径成 45° 角,则 $a_\tau = a_n$,即

$$r\omega^2 = r\alpha, \quad (12t'^2)^2 = 24t'$$

$$144t'^4 = 24t', \quad t' = 0.55\ \text{s}$$

把 $t' = 0.55$ s 代入运动学方程可以得到 $\theta = 2 + 4t^3 = 2.67$ rad。

例 1-5 一质点沿半径为 R 的圆作圆周运动,设当质点运动到 P 点时开始计时,其路程从 P 点开始用圆弧 $\overset{\frown}{PQ}$ 表示,令 $\overset{\frown}{PQ} = s$,它随时间的变化规律为 $s = v_0 t - \frac{1}{2}bt^2$,$v_0$,$b$ 都是正的常量,如图 1-3 所示。求:

(1) t 时刻质点的加速度;

(2) t 为何值时加速度的大小等于 b?

(3) 加速度大小达到 b 时,质点已沿圆周运行了几圈?

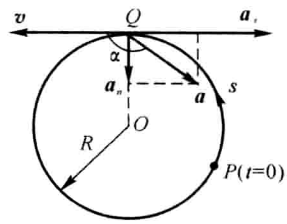

图 1-3

解 (1) 先求出质点的速率

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_0 t - \frac{1}{2}bt^2\right) = v_0 - bt \qquad ①$$

可见,v 随时间 t 变化,即质点作匀变速圆周运动,欲求质点的加速度,需先求切向加速度和法向加速度。

法向加速度为

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(v_0 - bt)^2}{R} \qquad ②$$

a_n 随 t 变化,切向加速度为

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(v_0 - bt) = -b \qquad ③$$

负号表示 a_τ 的方向与该处速度 v 方向相反。

质点在 t 时刻加速度的大小为

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \frac{1}{R}\sqrt{R^2b^2 + (v_0 + bt)^4} \qquad ④$$

加速度与速度间的夹角为

$$\alpha = \arctan\left[\frac{(v_0 - bt)^2}{-Rb}\right]$$

(2) 按照题意及式 ④ 有

$$\frac{1}{R}\sqrt{R^2b^2 + (v_0 - bt)^4} = b$$

由此解出,当 $t = \frac{v_0}{b}$ 时,加速度的大小等于 b。

(3) 从式 ① 可知,当 $t = \frac{v_0}{b}$ 时,$v = 0$。因此,从 $t = 0$ 到 $t = \frac{v_0}{b}$ 这段时间内,v 恒为正值,质点已转过的圈数

$$n = \frac{s}{2\pi R} = \frac{1}{2\pi R}\left[v_0\left(\frac{v_0}{b}\right) - \frac{1}{2}b\left(\frac{v_0}{b}\right)^2\right] = \frac{v_0^2}{4\pi Rb}$$

讨论:当 $t = \frac{v_0}{b}$ 时,$v = 0$,$a_n = 0$,这意味着什么?又当 $t > \frac{v_0}{b}$ 时,v 将如何变化?由此说明质点沿圆周按规律 $s = v_0 t - \frac{1}{2}bt^2$ 运动的全过程。

例 1-6 一个正在行驶的快艇在发动机关闭后,有一个与它速度方向相反的加速度,其大小与它的速度平方成正比,即 $\frac{dv}{dt} = -kv^2$,式中 k 为常数。试证明快艇在关闭发动机后又行驶 x 距离时的速度为 $v = v_0 e^{-kx}$,其中 v_0 是发动机关闭时的速度。

证明 已知$\dfrac{dv}{dt}=-kv^2$，分离变量再积分得

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v^2}=\int_0^t -k\,dt$$

所以

$$\frac{1}{v}=\frac{1}{v_0}+kt \qquad ①$$

从式①知t时刻的速度为$\dfrac{dx}{dt}=v=\dfrac{v_0}{1+kv_0t}$，$dx=\dfrac{v_0\,dt}{1+kv_0t}$，令$t=0$，$x=0$，两边积分得

$$x=\int_0^t\frac{v_0}{1+kv_0t}dt=\frac{1}{k}\ln(1+kv_0t) \qquad ②$$

联立式①和式②消去t，得

$$x=\frac{1}{k}\ln\frac{v_0}{v}$$

所以$v=v_0e^{-kx}$，得证。

已知速度或加速度，经过积分，利用起始条件，便可得到运动方程，这是运动学的第二类问题。

例1-7 已知质点的加速度$\boldsymbol{a}=16\boldsymbol{j}$，$t=0$时$\boldsymbol{v}(0)=6\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{r}(0)=8\boldsymbol{k}$求：

(1) 质点的速度$\boldsymbol{v}$。

(2) 质点的运动方程。

解 (1) 因为$\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{a}=16\boldsymbol{j}$，所以$d\boldsymbol{v}=16dt\boldsymbol{j}$。

两边积分得到

$$\int_{\boldsymbol{v}(0)}^{\boldsymbol{v}(t)}d\boldsymbol{v}=\int_0^t 16dt\boldsymbol{j}$$

代入初始条件

$$\boldsymbol{v}(t)-\boldsymbol{v}(0)=16t\boldsymbol{j}$$

得到质点的速度为

$$\boldsymbol{v}(t)=6\boldsymbol{i}+16t\boldsymbol{j}$$

(2) 因为$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{v}(t)$，所以$d\boldsymbol{r}=(6\boldsymbol{i}+16t\boldsymbol{j})dt$。

两边积分得到

$$\int_{\boldsymbol{r}(0)}^{\boldsymbol{r}(t)}d\boldsymbol{r}=\int_0^t(6\boldsymbol{i}+16t\boldsymbol{j})dt$$

代入初始条件

$$\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}(0)=6t\boldsymbol{i}+8t^2\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{r}(0)=8\boldsymbol{k}$$

得到质点的运动方程为

$$\boldsymbol{r}(t)=6t\boldsymbol{i}+8t^2\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$$

例1-8 河水自西向东流，速度为10 km/h。船在水中行，相对河水的航向为北偏西30°，相对水的航速为20 km/h。此时风向为正西，风速为10 km/h。求在船上看到地面上烟囱冒出烟的飘向。

解 烟的飘向是指混在烟尘的空气相对船的速度方向，即$\boldsymbol{v}_{气船}$，按照相对速度脚标法$\boldsymbol{v}_{气船}=\boldsymbol{v}_{气地}$(即风速)$+\boldsymbol{v}_{地水}$(即水速的负值)$+\boldsymbol{v}_{水船}$(船速的负值)。

以向东为x轴正方向，向北为y轴正方向，取坐标系如图1-4所示，代入题给数值(以km/h为单位)，有

$\boldsymbol{v}_{气地}=-10\boldsymbol{i}$，$\quad\boldsymbol{v}_{地水}=-10\boldsymbol{i}$

$\boldsymbol{v}_{水船}=-(-20\sin30°\boldsymbol{i}+20\cos30°\boldsymbol{j})$

$\boldsymbol{v}_{气船}=-10\boldsymbol{i}-10\boldsymbol{i}-(-20\sin30°\boldsymbol{i}+20\cos30°\boldsymbol{j})=-10\boldsymbol{i}-10\sqrt{3}\boldsymbol{j}$

$|\boldsymbol{v}_{气船}|=\sqrt{(-10)^2+(-10\sqrt{3})^2}=19.9$ km/h

$\alpha=\arctan\dfrac{-10}{-10\sqrt{3}}=\arctan\dfrac{\sqrt{3}}{3}=30°$

即烟对船的速度大小为 19.9 km/h，飘向为南偏西 30°。

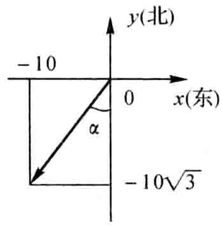

图　1-4

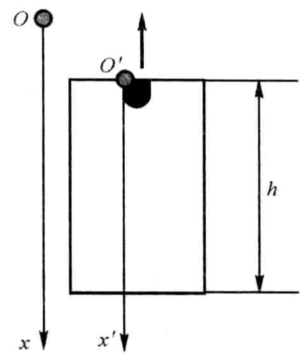

图　1-5

例 1-9　升降机以加速度 1.22 m/s² 上升，有一螺母自升降机的天花板松落，天花板与升降机的底板相距 2.74 m。求螺母自天花板落到底板所需的时间。

解　取螺母刚松落为计时零点。动点为螺母，取两个坐标系如图 1-5 所示。

三种加速度如下：绝对速度为 $\boldsymbol{a}_a = g\boldsymbol{i}$，牵连加速度为 $a_e = -a\boldsymbol{i}$，求相对加速度 $\boldsymbol{a}_r = ?$

由三种加速度的关系：$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r$，　$\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{a}_a - \boldsymbol{a}_e$

在 x 方向有

$$a_{rx} = a_{ax} - a_{ex} = g + a$$

因为

$$h = \frac{1}{2}a_r t^2$$

所以

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g+a}} = \sqrt{\frac{2\times 2.74}{9.80+1.22}} = 0.7\ \text{s}$$

1.2　质点动力学

一、基本要求

(1) 掌握牛顿第二定律及其适用条件。能用微积分方法求解一维变力作用下的简单质点动力学问题。

(2) 掌握功的概念，能计算直线运动情况下变力的功。理解保守力做功的特点及势能的概念，会计算重力、弹性力和万有引力势能。

(3) 掌握质点的动能定理和动量定理，能用它们分析、解决质点在平面内运动时的简单力学问题。

(4) 掌握机械能守恒定律、动量守恒定律及其适用条件。掌握运用守恒定律分析问题的思路和方法，能分析简单系统在平面内运动的力学问题。

二、内容提要

1. 力的瞬时作用

物体受到外力作用的瞬间产生加速度，改变其速度。

牛顿运动定律的数学表达式为

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = m\boldsymbol{a} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}$$

在直角坐标系中，有

$$\sum_i F_{ix} = ma_x, \quad \sum_i F_{iy} = ma_y$$

在自然坐标系中，有

$$\begin{cases} \sum_i F_{in} = ma_n = m\dfrac{v^2}{\rho} \\ \sum_i F_{i\tau} = ma_\tau = m\dfrac{dv}{dt} \end{cases}$$

2. 力的空间积累作用

做功改变物体的动能。

(1) 功。恒力的功 $A = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}$。功是标量，有正、负，单位是 J(焦[耳])。

变力的功 $A = \int dA = \int_b^a \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$，$dA$ 是元功，$d\boldsymbol{s}$ 是位移元。

(2) 动能定理。研究对象受到的外力与内力所做的功之和等于研究对象动能的增量，即

$$\sum_i (A_{i外力} + A_{i内力}) = E_k - E_{k0}$$

如果研究对象是质点，则没有内力做功问题。该定理描述了力的空间积累作用的效果，把功和能两个重要物理量联系起来。

(3) 功能原理。系统中外力和非保守内力做功之和，等于系统机械能的增量，即

$$\sum_i (A_{i外力} + A_{i非保守内力}) = E - E_0$$

1) 保守力做功的特点。保守力做功与路径无关，只与始末两个状态有关。

$$\oint_l \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = 0$$

2) 势能。物体间因保守力作用而具有的与位置(或形状变化)有关的能量。势能为系统所共有，其值取决于零势能点的选取。

重力势能为　$E_p = mgh$　(以 $h = 0$ 处为零势能点)；

弹性势能为　$E_p = \dfrac{1}{2}kx^2$　(k 为倔强系数，以弹簧原长处为零势能点)；

引力势能为　$E_p = -G\dfrac{m_1 m_2}{r}$　(G 为引力常数，以 m_1, m_2 相距 $r \to \infty$ 处为零势能点)；

势能定理为 $A_{保守内力} = E_{p0} - E_p = -\Delta E_p$。

3) 动能和势能的总和称为机械能，即 $E = E_k + E_p$。

(4) 机械能守恒定律。若只有保守内力对系统做功，则系统的机械能保持不变，即

$$E = E_k + E_p = 恒量$$

3. 力的时间积累作用

力的时间积累作用产生冲量，改变物体的动量。

(1) 冲量。恒力的冲量 $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{F}\Delta t$。冲量是矢量，方向为 $\boldsymbol{F}$ 的方向，单位是 N·s(牛[顿]·秒)。

变力的冲量为

$$\boldsymbol{I} = \int_0^t \boldsymbol{F} dt$$

(2) 动量定理。研究对象所受合外力的冲量等于该对象动量的增量，即 $\boldsymbol{I} = m\boldsymbol{v}_t - m\boldsymbol{v}_0$。该定理描述了力的时间积累作用的效果。冲量的方向是物体末动量和初动量的矢量差的方向，利用动量定理可求出平均作用力

$$\boldsymbol{F} = \frac{\Delta(m\boldsymbol{v})}{\Delta t}$$

(3) 动量守恒定律。若系统所受合外力 $\sum_i \boldsymbol{F}_{i外} = \boldsymbol{0}$，则系统的动量保持不变，即 $\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i = 恒矢量$。

三、难点浅释

1. 正确运用牛顿第二定律解题

牛顿第二定律反映了力的瞬时作用规律。运用这一定律求解质点动力学问题时须注意以下问题：

(1) 应明确 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{F}_{合}$ 之间是因果关系、瞬时关系和矢量关系。

(2) 求解动力学问题的主要步骤。

恒力作用下的连续体的约束运动：选取研究对象、分析运动趋势、画出隔离体示意图、建立适当的坐标系并列出运动方程、找出物体间的关联方程、正确求解方程组。

变力作用下的单质点运动：分析力函数、选取坐标系、列运动方程、用积分法求解。

(3) 动力学问题既可用牛顿运动定律求解，也可用功与能的关系求解，但涉及的物理量不同，前者多涉及加速度、位移，解题时可视具体情况选择最佳解法。

2. 受力分析中应该注意的问题

力是物体间的相互作用。力的形式有多种多样，但力学中经常遇到的只有以下几种类型：万有引力、重力、弹力和摩擦力。前两者是场力，后两者是接触力。在分析物体受力情况时，请注意以下几个问题：

(1) 遗漏某些作用力。分析力时可能产生的错误之一是遗漏某些作用力。为了防止这种错误，应当注意掌握力的特性。在动力学中，除了重力等非接触力外，其余力都是接触力，所以在分析某一物体的受力情况时，应先标出重力等非接触力，其次，只须注意该物体与哪些物体相接触。只有在它与其他物体相接触的地方才有可能受到其他物体的作用力，这样就能有效地防止遗漏某些作用力。

(2) 误列入一些多余的力。如上所述，接触力是物体之间相互接触才可能产生的作用力，然而并非相互接触的物体之间就一定有接触力存在。在分析接触力时，要注意到弹性形变是产生弹性力的先决条件，有相对运动或具有相对运动的趋势是产生摩擦力的先决条件。为了防止误列入类似上述情况的多余力，通常采用以下办法加以简单判断。这种判断方法是为了研究某一物体的力学作用，常常不妨先设想它不存在，考察在此情况下有些什么不同。

除此而外，通常还可能误列入一些其他的多余力，例如，将 ma 作为一个力，并将它与其他力放在一起同等对待。又如，在有的问题中，质点具有初速度，就认为"质点具有向前的冲击力"，还有人将力和它所起的作用混为一谈，且一并计入。如圆周运动中，考虑了所有力之后，还要加上一个向心力。物体在斜面上运动，计入了重力，还要加上什么下滑力…… 诸如此类，都是凭空计入的多余力。只要认真地考虑一下力的概念，就不致犯这一类错误。力既然是物体间的相互作用，那么，在谈到力时，只要追问一下它是哪一物体施于这个质点的，找不到施力物体，这类凭空引入的多余力就会暴露出来。

(3) 被动力与物体的运动状态有关。力具有相互作用性。作用力与反作用力总是同时存在，同时消失的，它们之间无先后之别，而有主动与被动之分。万有引力、重力、弹簧的弹性力、静电力等力具有其"独立自主"的方向和大小，这类力称之为主动力，主动力与物体的运动状态无关。摩擦力、张力和正压力等力的大小和方向则取决于物体所受到的主动力及物体的运动状态。这类随外加主动力及物体的运动状态而被动调节其大小和方向的力称为被动力。在力学中被动力往往是作为未知力出现的，在确定被动力的大小时，特别要注意它与物体运动状态之间的关系。例如，悬线上的张力与悬挂质点的运动状态密切相关，单摆与圆锥摆两种情况下悬线上张力的表达式是不相同的。物体对支撑物的正压力也与支撑物的运动状态有关，它并不恒等于重力或重力的一个分量。

3. 功和能

功是一个标量，只有大小，没有方向，但有正负。计算功时，要搞清是哪个力做功及正、负功的意义。功的正、负由力与位移的矢量正向夹角的余弦来判断。由于质点位移的大小与参考系选择有关，因此，功的大小也与参考系选择有关。在一定条件下，一个力可以做正功，也可以做负功或不做功。

计算功的方法有：

(1) 已知力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ 的表达式时,用积分求 $A=\int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$。

(2) 已知合力作用前后动能增量时,用动能定理求合力的功。

(3) 已知二状态的机械能增量时,用功能原理求出状态 1 到状态 2 的过程中外力的功 $A_{外}$ 或非保守内力的功 $A_{非守保内力}$。

能量也是一个标量,只有大小没有方向。能量是与系统的状态相应的物理量,是状态量,且是状态的单值函数。

(1) 动能的大小是相对的,它是因为物体运动而具有的能量。由于速度的大小与参考系有关,因而动能的数值也随参考系的选择而变。动能是物体机械运动转化为一定量的其他形式运动的能力和量度,它的变化与功相联系。

(2) 势能是属于系统的。重力势能 $E_p=mgh$(h 是物体至零势面的竖直距离,可正可负)是以物体和地球为系统;弹性势能 $E_p=\frac{1}{2}kx^2$(x 是弹簧的形变量),属于弹簧各质元构成的系统。势能的量值只具有相对意义,势能差才具有绝对意义。零势能的状态选取不同,系统势能的量值也不同。参考位置(零点)一经选定,势能的量值便完全确定。一般势能零点可任意选择,但要有利于解决具体问题。

(3) 功和能的关系。功和能是两个不同的概念,能量是与系统的状态相对应的物理量,是状态量;而功则决定于系统状态改变的过程,做功的过程就是系统状态改变的过程,功是过程量。总之,能量是系统状态的单值函数,是做功的本领,能量的变化和转化经由做功实现。功也是能量交换或变化的一种量度。

4. 弹性势能零点的选取

重力势能的零点可以任意选取,重力势能有正有负。弹性势能的零点能否任意选取?弹性势能是否可能出现负值?从大家所熟悉的弹性势能的表达式 $E_p=\frac{1}{2}kx^2$ 来看,弹性势能只能为正值。但是,应该清楚,弹性势能的这种表达式,并非普遍关系。只有把弹簧原长处作为坐标原点和弹性势能零点时,弹性势能的表达式才是 $E_p=\frac{1}{2}kx^2$。如果把坐标轴上任意一点 x_0 处作为弹性势能零点(坐标原点仍在弹簧原长处),系统在 x 点的弹性势能(见图1-6)的表达式将与上式不同,这时系统的弹性势能为

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2-\frac{1}{2}kx_0^2$$

当 $-x_0<x<x_0$ 时, $E_p<0$

当 $\left.\begin{matrix}x>x_0\\x<-x_0\end{matrix}\right\}$ 时, $E_p>0$

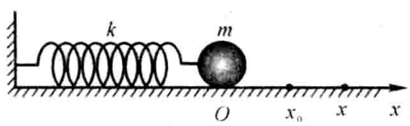

图 1-6

显然,$E_p=\frac{1}{2}kx^2-\frac{1}{2}kx_0^2$ 是弹性势能较为普遍的表达式。当 $x_0=0$ 时,弹性势能即为 $E_p=\frac{1}{2}kx^2$。应该注意的是,一般情况下,取弹簧原长处作为弹性势能零点,处理问题较为方便。但是,也有些问题,取任意点作为弹性势能的零点,便于分析推理,使问题简化。例如处理力学谐振系统的振动势能问题时,势能零点取在平衡位置,但平衡位置并不一定都在弹簧原长处。这时普遍的弹性势能公式就很有用。

5. 一对作用力与反作用力的功

内力不能改变系统的总动量,但却能改变系统的总动能。在质点组的动能定理($A_{外}+A_{内}=\Delta E_k$)及机械能守恒条件($A_{外}+A_{非守保内力}=0$)中,都涉及内力的功。由于内力总是成对出现的,所以研究一对作用力与反作用力的功是必要的。

如图 1-7 所示,质点 1 和 2 相对于某一固定点 O 的位矢分别为 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$,两质点之间的相互作用力分别为 $\boldsymbol{f}_1$ 和 $\boldsymbol{f}_2$。假设在某一段时间内,两质点分别发生了位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2$,则在这段时间内,这一对作用力和反作用力所做功之和为

$$\mathrm{d}A=\boldsymbol{f}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{f}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2$$

而

$$f_1 = -f_2$$

所以

$$dA = -f_2 \cdot dr_1 + f_2 \cdot dr_2 = f_2 \cdot (dr_2 - dr_1)$$

$$dA = f_2 \cdot d(r_2 - r_1)$$

而 $r_2 - r_1 = r_{21}$ 即为质点2相对于质点1的位置矢径，所以

$$dA = f_2 \cdot dr_{21}$$

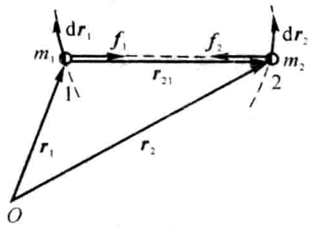

图 1-7

式中 dr_{21} 为质点2相对于质点1的元位移。由此可以得到如下几个有用的结论：

(1) 当相互作用的两质点之间没有相对位移时，一对作用力和反作用力所做功之和为零。

(2) 两质点间的相互作用力与它们之间的相对位移垂直时，这一对力所做功之和为零。

(3) 一般情况下，一对内力所做的功并不等于零。

两质点间一对作用力与反作用力所做功之和等于其中一个质点所受之力沿着该质点相对于另一质点所移动的路径所做的功。

计算一对内力的功，可以假定一个质点静止不动，而以它所在位置为坐标原点，再计算另一质点在此坐标系中运动时所受之力所做的功，这样用一个力计算出来的功，就等于相应的一对力所做功之和。

6. 守恒条件分析

我们知道，如果物体的受力情况已知，并且给出了初始条件，利用牛顿定律原则上就可以求出质点的运动规律，但在应用上述方法时，有时会在教学上碰到很大的困难。守恒定律和几个运动定理常能为我们提供简捷的途径。但应该清楚，利用牛顿定律的方法是解决质点动力学问题的基本方法，而应用守恒定律的方法只是处理质点动力学问题的辅助方法。因为应用守恒定律处理问题是有条件的，并非所有质点动力学问题都能用守恒定律来求解，下面就两个守恒定律的应用条件分别作一讨论。

(1) 动量守恒条件分析。动量守恒定律的应用条件是系统不受外力作用或所受外力的矢量和为零。在实际问题中，严格符合上述条件的情况是很难遇到的。实际上往往是当外力远远小于内力时，就可将外力略去不计而应用动量守恒定律(如碰撞、爆炸等问题)。如果合外力并不为零，但它在某个方向上的分量为零，则系统在该方向上动量守恒。动量守恒定律对于内力没有任何要求，不论内力存在与否、大小如何，只要合外力为零，系统的动量就守恒。在内力作用下，系统内一个物体动量的增加量一定等于另一个物体动量的减少量，系统的总动量不变，即内力只能使系统内各物体间的动量进行传递，但并不改变系统的总动量。

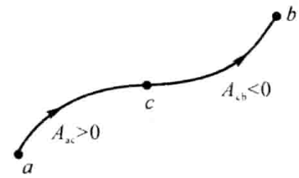

图 1-8

(2) 机械能守恒条件分析。机械能守恒的条件是外力和非保守内力都不做功或所做的总功为零。但它并不一定要求外力和非保守内力为零。例如单摆，以小球为系统，它受有外力 T，但 T 不做功，小球的机械能守恒。对于机械能守恒条件的理解，还有个问题应予注意，即当外力和非保守内力所做的总功为零时，系统的机械能守恒，对于这一点，要有一个正确的理解，否则就会发生错误。例如，一物体沿曲线路径从 a 运动到 b(见图1-8)，假设在 ac 这一段路程上外力对系统做正功(即 $A_{ac} > 0$)，在 cb 这一段路程上外力对系统做负功(即 $A_{cb} < 0$)，且 A_{ac} 与 A_{cb} 在量值上是相等的。这样从 a 到 b 点的过程中，外力所做的总功为零，但系统的机械能是不守恒的。在从 a 到 c 的过程中，外力做正功，系统的机械能在逐渐增大；在从 c 到 b 的过程中，外力做负功，系统的机械能在逐渐减小。显然，整个过程中，系统的机械能是逐点变化的。但前段和后段做功的总和为零，所以 a 点与 b 点的机械能相等。可见，当外力和非保守内力在某一段路程上做正功，而在另一段路程上做负功，即使在整个过程中，这些正负功之和为零，也不能保证系统的机械能守恒，充其量只能使始末两位置上的机械能相等。那么，机械能守恒条件(外力和非保守内力所做的总功力零)究竟如何理解呢？它的确切含义是什么？对此，正确的理解是外力和非保守内力显然都在做功，但它们中的一部分力在做正功，同时另一部分力在做负功，且正、负功彼此抵消为零。特别要注意正、负功是同时抵消的。这也就是说，在任意一段微