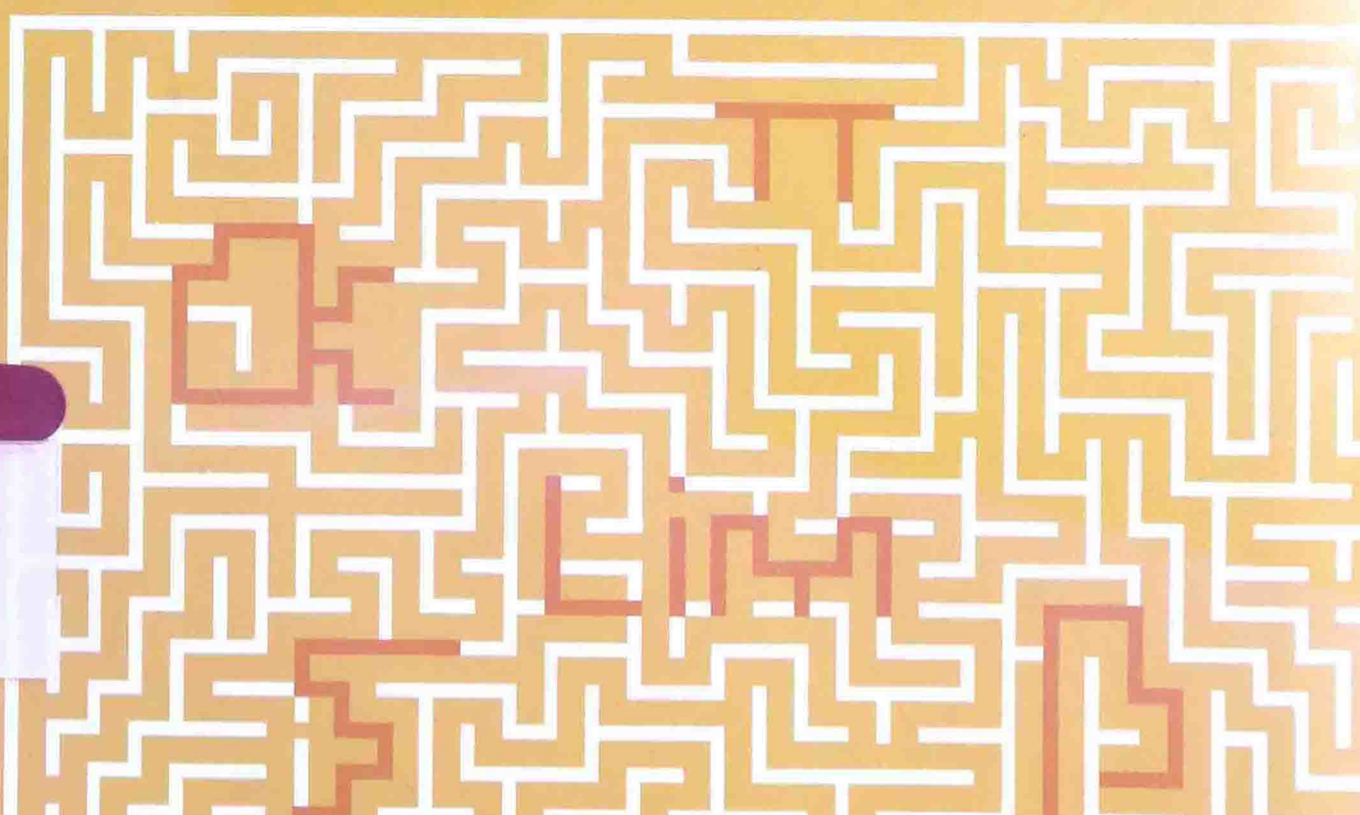
高等数学

(上册)

易正俊　张敏　罗广萍　主编



清华大学出版社

高等数学

(上册)

易正俊　张敏　罗广萍　主编

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是专为经济管理类本科生学习高等数学及其经济应用而编写的教材. 全书共6章，主要内容有：函数、极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分和定积分的应用. 每节配有A，B两组习题，每章配有总习题. 书后附有部分习题参考答案或提示.

本书讲解简明扼要，图文并茂，覆盖面广，保证学生进一步深造所必需的理论基础知识，同时加强案例教学，注重学生应用能力的提升. 本书也可以作为非数学专业本科高等数学的教材.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册/易正俊等主编. --北京：清华大学出版社，2014
ISBN 978-7-302-37419-0

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①易…　Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第170247号

责任编辑：刘　颖　赵从棉
封面设计：傅瑞学
责任校对：王淑云
责任印制：刘海龙

出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
　　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京国马印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　张**：16.25　　**字　　数**：394千字
版　　次：2014年9月第1版　　**印　　次**：2014年9月第1次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：29.00元

产品编号：060626-01

前言

编者从事高等数学课程教学多年，采用的教材主要偏重理论，淡化了背景知识和应用案例；期末对学生进行检测主要是偏重于学生的运算能力，概念的理解型题目和应用性较强的题目涉及很少. 这两个方面的原因导致教师几乎不讲培养学生应用能力的典型案例，学生学习这门课程也只是应付测试，很难把所学的高等数学知识用于解决实际问题，极大地影响了学生的理论创新和应用创新能力的培养，因为创新思维来源于数学思想和方法. 要提升学生的培养质量，需要完善教材的内容体系和对学生的检测标准.

高等数学是经济管理类专业学生的一门重要公共基础课程，在经济管理领域有广泛的应用. 全国教学指导委员会根据经济管理领域学生对高等数学这门课程的要求，提出了经济管理类高等数学课程教学改革设想和指导意见，倡导收集数学在经济管理中的应用案例，引入教学和教材. 提倡从解决经济管理领域中的实际问题入手，在建立数学模型解决这些实际问题的过程中引入数学的概念、思想和方法. 在教学实践中注意改革创新，逐步形成适应现代社会经济管理实际的数学教学内容体系. 旨在服务于经管专业学生创新发展的需求，提升职业能力，注重解决实际问题，提高在实践中发现问题、分析问题和解决问题的能力.

教材具有以下几个方面的特色：

(1) 充分强调高等数学基础理论的重要地位，所有的基本概念和基本理论尽可能从研究的背景引入，选取的是学生熟悉的背景知识，采用几何图形等方法加强学生对基本理论和基本方法的理解，淡化比较复杂的理论推导，增强教材的可读性和可接受性. 培养学生熟练地用准确、简明、规范的数学语言表达自己的数学思想的素质.

(2) 加强案例教学，突出专业需求导向，案例的选取参考了国内外优秀教材，博采众家之长，体现案例的实用性和趣味性，激发学生学习的积极性. 培养学生主动抓住数学问题的背景和本质，善于对现实经济领域中的现象和过程进行合理的简化和量化，建立数学模型的素质.

(3) 重视反例在学生理解和掌握基本概念和基本理论中的重要作用，对读者易误解的概念和理论进行必要的注释.

(4) 习题的设置依据培养学生不同层次和不同要求分为 A，B 两组，A 组主要是训练学生的基础知识，B 组是能力提升，训练学生的创新思维.

教材的编写是由易正俊教授组织具有丰富教学经验的一线教师张敏、罗广萍、邓林、颜军、彭智军、刘朝林等讨论、编写. 本书共分 6 章，第 1 章和第 3 章由张敏编写，第 2 章由罗广萍编写，第 4 章由易正俊和刘朝林编写，第 5 章由邓林编写，第 6 章由颜军和彭智军编写. 重庆大学数学与统计学院穆春来教授审阅了全书.

由于编者学识有限，书中不妥之处，真诚地欢迎读者批评指正，以期不断完善.

编 者

2014 年 7 月

目录

第 3 章　中值定理与导数的应用　96

第 4 章 不定积分 144

第 5 章 定积分 174

第 1 章

函数、极限与连续

函数是微积分学研究的基本对象，极限方法是微积分学研究问题的主要方法，本章主要介绍初等函数、函数极限与连续的基本概念及有关的性质与运算法则.

1.1　函数

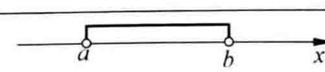
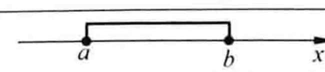
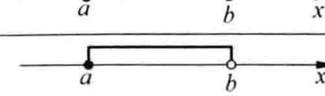
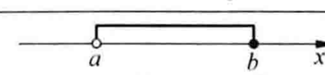
函数是研究变量和变量之间的相互依赖关系，从一个或者几个变量的值去推知另一变量的值. 函数是数学最基本的概念，也是微积分研究的基本对象. 在研究函数时我们经常遇到区间和邻域，在这里先介绍这两个概念作为研究函数的预备知识.

1.1.1　区间与邻域

1. 区间

区间包括有限区间和无限区间，有限区间是指区间的两个端点为有限的实数，它包括开区间、闭区间和半开半闭区间，半开半闭区间包括左闭右开区间和右闭左开区间，这些内容在中学已经学过，在这里把它们列成表 1.1.

表 1.1　有限区间

区间名称	表示方法	图形
开区间	$(a,b)=\{x\mid a<x<b, x\in \mathbf{R}\}$，	
闭区间	$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b, x\in \mathbf{R}\}$	
左闭右开区间	$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b, x\in \mathbf{R}\}$	
左开右闭区间	$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b, x\in \mathbf{R}\}$	

在实际应用中仅有限区间是不够的，还需要引入无限区间，引入无限区间需要引入无穷大∞这个符号，∞包括正无穷大$+\infty$和负无穷大$-\infty$，$+\infty$和$-\infty$仅是两个符号，不代表任何实数，不能参与数的运算，数轴上的点不能取到无穷大，在有限区间中的一个端点或两个端点趋于无穷大时就得到无穷区间.

若是右端点趋于$+\infty$时得到的无穷区间为：

$(a,+\infty)=\{x\mid a<x<+\infty\}$，其图形如图 1.1 所示.

$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x<+\infty\}$，其图形如图 1.2 所示.

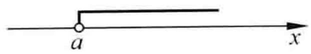


图 1.1

图 1.2

若有限区间的左端点趋于$-\infty$得到的无穷区间为

$(-\infty,b)=\{x|-\infty<x<b\}$，其图形如图 1.3 所示.

$(-\infty,b]=\{x|-\infty<x\leqslant b\}$，其图形如图 1.4 所示.

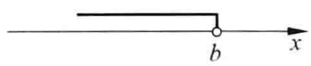


图 1.3

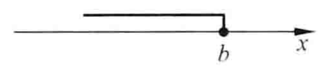


图 1.4

若有限区间的两个端点都趋于无穷大时得到的无穷区间为：

$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$，即整个实数轴构成的点集.

2. 邻域

满足不等式$|x-x_0|<\delta$的x值的集合称为以x_0为中心、δ为半径的**邻域**. 记为$U(x_0,\delta)$，即$U(x_0,\delta)=\{x||x-x_0|<\delta\}$，也可以表示为

$$U(x_0,\delta)=\{x\mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\},$$

其图形如图 1.5 所示.

满足$0<|x-x_0|<\delta$的x值组成的集合称为以x_0为中心、δ为半径的**去心邻域**. 记为$\mathring{U}(x_0,\delta)$，即$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$，也可以表示为

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\mid x_0-\delta<x<x_0\}\cup\{x\mid x_0<x<x_0+\delta\},$$

其图形如图 1.6 所示.

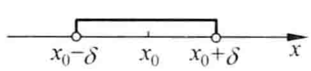


图 1.5

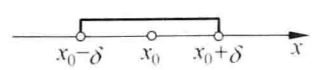


图 1.6

1.1.2 函数的概念

在观察自然现象、经济活动或技术问题过程中，常会遇到各种不同的变量，它们之间往往相互依赖、相互制约. 相互联系的变量之间的这种关系，在数学上称为函数关系，如正方形的面积是其边长的函数；运动着物体的位置是时间的函数；长方形的面积是其长和宽的函数；理想气体的压力是密度和温度的函数；粮食亩产量是施肥量、光照浓度、二氧化碳等多个因素的函数. 只与一个因素有关的函数称为一元函数，与多个因素有关的函数称为多元函数. 在高等数学上册只讨论一元函数，下面给出一元函数的定义.

1. 函数的定义

定义 1.1 设有两个变量x和y，如果变量x在一定范围D内取值时，按照某一确定的对应规则，变量y都有确定的值与之对应，则称y是x的函数，记为

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

称 x 为自变量，y 为因变量. 集合 D 称为函数的定义域，$f(x)$的所有可能取值组成的集合称为 f 的值域，即$\{f(x) \mid x \in D\}$.

两个函数相同是指函数的定义域和对应规则相同，函数与函数中的变量用什么字母来表示无关，但在研究同一个问题时同一个函数要用同一个函数符号表示，不同的函数需要用不同的函数符号表示.

2. 函数的表示法

函数的表示方法有表格法、图像法和解析法等，下面分别举例说明函数常见的五种表示法.

(1) **表格法**：把自变量的取值和相应的因变量的取值列在一张表格中. 如某商场记录了某一年 12 个月的电视机月销售量(单位：台)，列成表 1.2.

表 1.2

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
月销售量 s	81	84	45	49	9	5	6	17	94	161	144	123

表 1.2 表示了该商场电视机的销售量 s 与月份 t 之间的函数关系，当 t 在 1,2,…,12 中任取一个数值时，从表中就可确定一个月销售量 s 与之对应.

(2) **图像法**：把自变量的取值和相应的因变量的取值作为平面直角坐标系中一个点的坐标，这些点构成的几何图形就是用图像法表示的函数关系，如某气象站用自动记录仪记下一昼夜气温的变化情况. 图 1.7 是温度记录仪在坐标纸上画出的温度变化曲线图，横坐标表示时间 t，纵坐标表示温度 T，它形象地表示了温度 T 随时间 t 变化的函数关系：对于某一确定 $t(0 \leqslant t \leqslant 24)$，就有一个确定的 T 值与之对应.

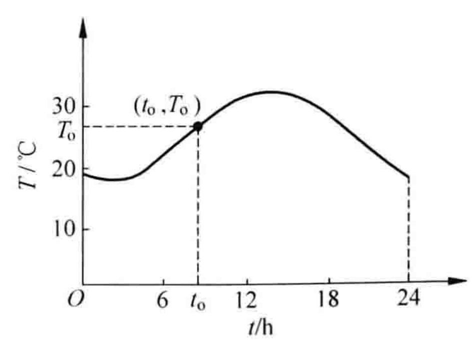


图 1.7

(3) **解析法**：函数的对应关系借助于数学表达式来表达，如 $y=2x+1$，$y=\arcsin x$，$y=\sqrt{\ln(x-1)}$等.

(4) **隐函数表示法**：一般我们遇到函数的形式为 $y=f(x)$，其特点是：等号的左端是因变量的符号，右端是含有自变量的表达式，当自变量取定义域内的任意一值，由这个式子能确定对应的函数值，用这种式子表达的函数称为显函数；有些函数的对应关系是由含 x,y 的方程 $F(x,y)=0$ 所确定的，如 $x^2+y^2=1$，$x^3+y^3-3xy=0$ 等，函数关系隐含在方程中. 一般地，如果存在一个定义在某区间上的函数 $y=f(x)$，使得 $F[x,f(x)]\equiv 0$，则称函数 $y=f(x)$为由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数.

有时能从 $F(x,y)=0$ 中解出一个变量，这样隐函数就变为显函数，如从方程 $x^2-y=1$ 解出 $y=x^2-1$. 但不是任何一个隐函数都可以化为显函数，如把方程 $e^y-xy=e^x$ 所确定的隐函数化为显函数是不可能的.

(5) **参数方程表示法**：函数的对应关系由参数方程所确定，给定一个参数值就能确定

相应的(x,y).一般形式如下：

$$\begin{cases} x=\phi(t), \\ y=\varphi(t), \end{cases} \quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

如圆 $x^2+y^2=1$ 可表示为：$\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t, \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$；

椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 可表示为：$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

3. 分段函数

分段函数是在不同的范围内需要用不同的解析式来表达的函数.如下面的函数都是分段函数.

(1) Dirichlet 函数：

$$D(x)=\begin{cases} 1, & x\text{ 为有理数}, \\ 0, & x\text{ 为无理数}. \end{cases}$$

(2) 符号函数：函数的取值只与自变量的符号有关.

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0. \end{cases}$$

(3) 取整函数：$[x]$表示不大于 x 的最大整数.

$$f(x)=[x]=\begin{cases} \cdots \\ -1, & -1\leqslant x<0, \\ 0, & 0\leqslant x<1, \\ \cdots \\ k, & k\leqslant x<k+1 \quad k\in\mathbf{Z}, \\ \cdots \end{cases}$$

4. 函数定义域的求法

函数定义域的确定一般分为两种情况：对于反映实际问题的函数关系，定义域由实际问题所确定；对于纯数学上的函数关系，其定义域为使得函数表达式有意义的自变量取值的集合.

例 1.1 求函数 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$的定义域.

解 要使得函数解析表达式有意义，必有：$-1\leqslant\dfrac{x-1}{5}\leqslant 1$，$25-x^2>0$ 同时成立.即 $-4\leqslant x\leqslant 6$，$-5<x<5$ 同时成立.所以函数的定义域为：$-4\leqslant x<5$.

例 1.2 已知函数 $f(x)$的定义域为$[0,1]$，求 $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$的定义域.

解 要使得函数解析表达式有意义，必使 $0\leqslant x+a\leqslant 1$，$0\leqslant x-a\leqslant 1$ 同时成立.即：

$-a\leqslant x\leqslant 1-a, a\leqslant x\leqslant 1+a$ 同时成立. 因此有

(1) 当 $0<a\leqslant 1-a$，即 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，函数的定义域为 $a\leqslant x\leqslant 1-a$.

(2) 当 $a>1-a$，即 $a>\frac{1}{2}$ 时，函数的定义域为空集.

1.1.3 函数的特性

1. 单调性

设有函数

$$y=f(x),\quad x\in I,$$

若对任意 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上是单调递增的函数；若对任意 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上是单调递减的函数. 我们把单调递增的函数和单调递减的函数统称为单调函数，I 称为单调区间.

例如函数 $y=x^3$，$y=\arctan x$ 等在定义域中都是单调增加的.

有许多函数在整个定义域中并不呈现单调性，但在其定义域中的某个子区间上却是单调的，如 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上是单调增加的，$y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上是单调减少的.

2. 有界性

设有函数

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

若存在 $M>0$，使得对任意的 $x\in D$ 时，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 上有界. 如 $|\sin x|\leqslant 1, \forall x\in(-\infty,+\infty)$；$|\arctan x|<\frac{\pi}{2}, \forall x\in(-\infty,+\infty)$，“$\forall$”表示“任意”. 所以 $y=\sin x$ 与 $y=\arctan x$ 在其定义域内都是有界函数.

若存在两个常数 A 和 B，使得

$$A\leqslant f(x)\leqslant B,\quad x\in D,$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上既有上界又有下界，其中 A 为 $f(x)$ 的下界，B 为 $f(x)$ 的上界.

注：(1) 函数一旦有界，函数的界值 M 不唯一，如 $|\sin x|\leqslant 1, M=1$；$|\sin x|\leqslant 2, M=2$.

(2) 不是每个函数都有界，有些函数有界，有些函数是没有界的.

如函数 $y=x^2$ 在其定义域内有下界无上界；而 $y=1-x^2$ 在其定义域内有上界而无下界；$y=x^3$ 在其定义域内既无上界也无下界.

定理 1.1 函数在 D 上有界的充要条件是函数在 D 上既有上界又有下界.

证 充分性：若 $f(x)$ 在 D 上既有上界又有下界，则存在常数 A 和 B，使得

$$A\leqslant f(x)\leqslant B,\quad x\in D.$$

取 $M=\max\{|A|,|B|\}$（“max”表示“取最大”；类似的“min”表示“取最小”），则有 $|f(x)|\leqslant M, \forall x\in D$.

必要性：$f(x)$ 在 D 上有界，则 $\exists M>0$（“$\exists$”表示“存在”），使得 $|f(x)|\leqslant M, \forall x\in D$，取 $A=-M, B=M$，则得不等式：

$$A \leqslant f(x) \leqslant B, \quad x \in D.$$

3. 奇偶性

设 $f(x)$定义在关于原点对称的一个区间 I 上,若 $f(-x)=-f(x)$, $\forall x\in I$,则称 $f(x)$ 为奇函数;若 $f(-x)=f(x)$, $\forall x\in I$,则称 $f(x)$为偶函数.

例 1.3 判断函数 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$的奇偶性.

解 因为

$$f(-x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x),$$

所以 $f(x)$为奇函数.

例 1.4 设 $f(x)$定义在一个关于原点对称的区间上,证明可以把 $f(x)$可以表示成一个奇函数与一个偶函数的和.

证 因为 $f(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$,显然$\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$是偶函数,$\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$是奇函数,所以 $f(x)$可以表成一个奇函数与一个偶函数的和.

奇函数的图形关于原点对称,偶函数的图形关于 y 轴对称;两个奇函数的和为奇函数,两个偶函数的和为偶函数;两个偶函数的乘积、两个奇函数的乘积均为偶函数,一个奇函数与一个偶函数的乘积为奇函数.

4. 周期性

对函数 $f(x)$, $x\in D$,如果存在常数 T 使得

$$f(x+T)=f(x), \quad \forall x \in D,$$

则称 $f(x)$是以 T 为周期的周期函数,通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

如 $y=\sin x$, $y=\cos x$ 是周期函数,$2n\pi(n=1,2,3,\cdots)$都是它的周期,2π 是它的最小正周期,$y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数. 并非每一个函数都有最小正周期,如 Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

是一个周期函数,任何正有理数都是它的周期,因不存在最小的正有理数,所以它无最小正周期.

1.1.4 反函数与复合函数

1. 反函数

在自由落体运动中,路程 s 与时间 t 的函数关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2 \tag{1.1}$$

在上式中 s 是因变量,t 是自变量. 从上式中将 t 解出：

$$t=\sqrt{\frac{2s}{g}} \tag{1.2}$$

此时 s 成了自变量,t 成为因变量,则式(1.1)和式(1.2)的两个函数称为互为反函数.

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$的值域为 R_f. 若 $\forall y\in R_f$,都可以从 $y=f(x)$确定唯一的 x 值与之对应,则得到一个定义在 R_f 上以 y 为自变量、x 为因变量的函数 $x=f^{-1}(y)$,称为函数 $y=f(x)$的反函数. 通常记为：$y=f^{-1}(x)$.

函数 $y=f(x)$和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形在同一坐标系中关于 $y=x$ 对称(见图 1.8). 不是任意一个函数都有反函数,具有反函数的函数一定是一对一的.

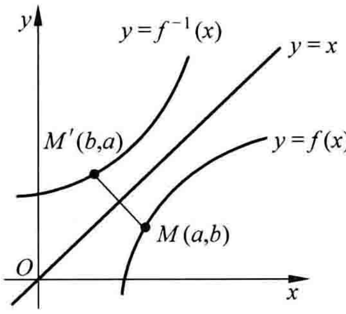


图 1.8

定理 1.2(反函数存在定理) 如果函数 $y=f(x)$在其定义区域 D 上是单调增加(减少)的,则它的反函数

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in R_f(R_f\text{ 为 }y=f(x)\text{ 的值域})$$

存在,并且其反函数也是单调增加(减少)的.

2. 复合函数

设 $y=f(u)=\sqrt{u}$,$u=2x^2+3$. 将后一函数代入前一函数得 $y=\sqrt{2x^2+3}$,这种将一个函数代入另一个函数的运算就称为函数的“复合”运算. 但不是任意两个函数都可以进行复合运算,如 $f(u)=\arcsin u$,$u=x^2+2$ 就不能构成复合函数,因为函数 $u=x^2+2$ 的值域与函数 $f(u)=\arcsin u$ 的定义域的交集是一个空集.

一般地,复合函数有下面的定义：

定义 1.3 设函数 $y=f(u)$,$u=\varphi(x)$,如果 $u=\varphi(x)$的值域与 $y=f(u)$的定义域的交集非空,则称 $y=f(\varphi(x))$是由 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数. $y=f(u)$称为外函数,$u=\varphi(x)$称为内函数,u 称为中间变量.

例 1.5 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

解 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$,$|f(x)|\leqslant 1$,所以 $f[f(x)]=1$

例 1.6 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $g[f(x)]$.

解 $g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0\\ f(x)+2, & f(x)>0\end{cases}=\begin{cases}2+x, & x\geqslant 0,\\ 2+x^2, & x<0.\end{cases}$

1.1.5 初等函数

下面几类函数是基本初等函数.