高职高专“十二五”规划教材

应用型本科适用

高等数学 上册

GAODENG SHUXUE

主编 陆宜清 主审 杨松华

- 加强基础，突出应用
- 教、学、做一体化
- 与数学软件密切配合

上海科学技术出版社

高职高专“十二五”规划教材

应用型本科适用

高等数学 上册

GAODENG SHUXUE

主编 陆宜清 主审 杨松华

上海科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册 / 陆宜清主编. —上海:上海科学技术出版社,2011.7
高职高专“十二五”规划教材
ISBN 978-7-5478-0755-2

Ⅰ.① 高… Ⅱ.①陆… Ⅲ.①高等数学-高等职业教育-教材 Ⅳ.①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 055335 号

上海世纪出版股份有限公司
上 海 科 学 技 术 出 版 社 出版、发行
(上海钦州南路 71 号　邮政编码 200235)
新华书店上海发行所经销
常熟市兴达印刷有限公司印刷
开本 787×1092　1/16　印张:15.25
字数:330 千字
2011 年 7 月第 1 版　2011 年 7 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5478-0755-2/O·5
定价:29.50 元

内容提要

Synopsis

本书是根据教育部新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》,借鉴“教、学、做一体化”的教学模式和编者多年的教学经验而编写的。

全书共十一章,分为上、下两册。本书为上册,主要内容有函数极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程六章,书末还附有初等数学常用公式、基本初等函数的图像与性质、高等数学常用公式、数学软件MATLAB常用系统函数、习题答案与提示。

本书可以作为高等专科教育、高等职业教育、成人教育以及其他学时较少的工科类和经济类专业的高等数学课程教材,也可作为教师及技术人员参考用书。

作者名单

Authors

主　编　陆宜清

副主编　王国强　林大志　张　慧

参　编　张松锋　王　琳　陈晓玉　刘玉军

徐香勤　张思胜　薛春明

主　审　杨松华

序

Foreword

微积分的发现是人类智慧最伟大的成就之一,微积分蕴藏着丰富的理性思维和处理连续变量的方法。以微积分为主体内容的高等数学课程是大学中最重要的基础课程之一。它不仅为后续课程和今后的工作提供必备的数学工具,而且对学生科学素养的形成和分析解决问题能力的提高产生重要的影响。如何精选和合理处理教学内容,如何通过数学知识来提高学生的数学素养,如何加强数学应用能力的训练都是近年来本门课程教学改革的重要内容。由于我国地域辽阔,学校类型很多,编写适合自己情况而又有特色的教材是一件有意义的工作。

以陆宜清教授为首的一些资深教师,在认真学习兄弟院校高等数学课程教学改革的经验、分析研究大量国内外教材的基础上,编写了高职高专"十二五"规划教材《高等数学》。该教材讲义已应用了多年,经反复修改,现由上海科学技术出版社出版,这是一件值得庆贺的大好事情。

本书定位在"加强基础,突出应用"的平台上,在基本维护系统性与连贯性的原则上,对内容体系做了适当调整,以适宜高职高专院校的使用。本书突出的特点是在加强应用能力的培养上下了功夫,增加了不少实用的数学方法和颇为有趣的应用实例和习题。尤其是专门在最后一章"数学建模初步"中设计了若干与微积分、微分方程有关的数学模型,再次体现"以应用为目的"的编写原则和"教、学、做一体化"的教学模式。其次,本书教学内容与数学软件密切配合,在每章之后均附有"演示与实验",恰当使用会使课程增色。另外,与传统教材相比,不少地方的面貌有了较大的变化。每章开始有"学习目标",结束有"本章小结"及"阅读材料"。对于数学概念和理论,尽量从实际问题引入并从几何与数值方面进行分析。对于定理的推导尽可能简捷,对于计算着重于方法和规律的介绍。

本书立足于学校的特点、专业的需要,合理地组织安排教学内容,力求恰当地处理传授知识与素质教育的关系。

本书是一本有特色的很好的高等数学教材。

国家级名师
郑州大学数学系教授 李梦如

前言

Preface

微积分是近代数学最伟大的成就。由于它在各个领域的广泛应用,以微积分为主要内容的高等数学成为大学中最重要的基础课程之一。它不仅为后续课程和科技工作提供了必备的数学工具,而且对学生科学素质的形成和分析解决问题能力的培养产生了重要而深远的影响。但是多年来在高等数学教学中,存在着偏重向学生传授微积分的概念、理论、运算规则和技巧,忽略微积分的数学思想、方法及其与实际紧密联系的现象,不够注重该课程在学生的素质与能力的培养方面的积极作用。

为满足21世纪我国高职高专教育大力发展的需要,我们根据教育部《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》,在高职高专院校数学教师多年教学改革实践的基础上,研究、剖析、对比国内外一批教材和资料,组织上海工程技术大学高等职业技术学院、河北师范大学职业技术学院、石家庄信息工程职业学院、周口职业技术学院、郑州牧业工程高等专科学校的具有高职高专教学经验的老师,经过反复研讨,集体编写了《高等数学》教材。本书是上述高职高专院校的参编者集思广益和通力合作的成果。教材以"联系实际,注重应用,淡化理论,提高素质"为特色,充分体现了"以应用为目的,以必需够用为度"的编写原则,在内容编排上,紧密衔接初等数学,从特殊到一般,从具体到抽象,注意概念、定理用几何意义、物理意义和实际背景诠释,深入浅出,论证简明,易于教,便于学。归纳起来,本书有以下特点:

1. 从实际问题出发,引入数学概念和理论,让学生体会到微积分来源于实际,又能指导实际。在教材中我们尽量从不同方面给出实际例子并加入简单的数学模型,让学生初步体会到微积分与现实世界中的客观现象有密切联系。

2. 在习题中也适当加大应用问题的比例,以便学生能尝试利用所学微积分知识来分析和解决一些简单的实际问题,提高学生应用数学知识解决实际问题的能力。

3. 在第十一章"数学建模初步"中设计了若干与微积分、微分方程有关的数学模型,提高学生应用计算机解决实际问题的兴趣和扩充解决实际问题的手段,再次体现"以应用为目的"的编写原则和"教、学、做一体化"的教学模式。

4. 合理调整和安排教材中的概念与理论、方法与技巧和应用与实践这三部分内容,

加强从几何和数值方面对数学概念的分析,从多方面培养学生的理性思维;增加用表格和图形表示的函数及其运算的介绍,注意克服偏重分析运算和运算技巧的倾向;加强实践环节,重视应用能力的培养。

5. 随着计算机技术的发展,数学教学从传统的自然科学传授走进了与计算机技术相结合的教学过程。本书引入MATLAB数学软件,以发挥辅助教学的作用。在每一章后均附有“演示与实验”,一方面通过数学软件的直观演示加深学生对一些重要概念和定理的理解,另一方面让学生学习使用数学软件进行各种运算、绘制图形,培养学生的动手能力,使学生有机会尝试利用数学知识和计算机解决实际问题。

6. 为了培养学生的自主学习能力,每章开始有“学习目标”;为了帮助学生及时复习巩固每章的知识,对每章内容进行“本章小结”,并配有习题。学习目标是本章的学习基本要求;小结是梳理本章的知识,突出重点与难点,搞清知识间的关系;习题可供学生进行综合训练。同时结合每章的数学知识,安排了相应的MATLAB数学实验、有关的数学家的“阅读材料”等。

7. 本书注意“简易性”,尽量做到通俗易懂,由浅入深,富于启发,便于自学。

总之,本书力求恰当地处理归纳与演绎、数学的发现与知识的传授、加强理论分析与实际应用能力的培养之间的关系,以提高学生的综合分析能力和创新能力。

本书内容覆盖面比较广,教师可根据不同专业特点进行取舍。课内教学需80～100学时,建议可在课外再安排10～20学时上机实验。

本书分为上、下两册。上册内容为一元函数微积分和常微分方程,下册内容为向量与空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数和数学建模初步。书末附有初等数学常用公式、基本初等函数的图像与性质、高等数学常用公式、数学软件MATLAB常用系统函数、习题答案与提示。

本书由陆宜清教授任主编,负责全书的统稿和定稿;王国强、刘玉军、林大志、张慧、徐香勤、薛春明、张思胜任副主编。参加本书编写的还有张松锋、王琳、陈晓玉等同志。在全书框架结构安排、统稿等方面,本书主审、郑州大学数学系杨松华副教授提出了许多宝贵的建议。

本书的组织编写和出版过程中,得到了有关学校的领导和相关专家的大力支持和帮助,以及上海科学技术出版社的热心帮助和指导,尤其是首届国家级名师郑州大学数学系李梦如教授在百忙之中为本书作序,他们为本书的出版付出了辛勤的劳动,在此一并表示诚挚的谢意!

限于编者的水平,书中难免存在缺点和不足之处,敬请读者提出宝贵意见并批评指正。

编 者

目 录

Contents

第一章　函数、极限与连续

学习目标

1. 理解函数的概念及特性，掌握函数的两要素，会求函数的定义域.
2. 了解函数的三种表示法及分段函数，熟练掌握基本初等函数的图像与性质.
3. 了解反函数、复合函数的概念，会求函数的反函数，掌握复合函数的复合和分解.
4. 理解初等函数的概念，能区分基本初等函数和初等函数.
5. 对简单的实际问题，会建立相应的函数关系.
6. 理解函数极限的概念，掌握函数极限的性质与运算法则.
7. 了解两个重要极限，会用两个重要极限求极限.
8. 了解函数左、右极限的概念及其与函数极限的关系.
9. 了解无穷小、无穷大的概念及无穷小与无穷大的关系，掌握无穷小的比较.
10. 理解函数连续和间断的概念，会判断间断点的类型.
11. 了解初等函数的连续性，掌握闭区间上连续函数的性质(最值定理、介值定理).
12. 掌握数学软件MATLAB的基本知识，会用MATLAB进行函数运算，求函数的极限.

初等数学的研究对象主要是常量，而高等数学的研究对象主要是变量. 变量之间的相互依赖关系，就是我们所说的函数关系. 函数是将实际问题数学化的基本工具；而极限是高等数学中最重要的概念之一，用以描述变量的变化趋势；极限的思想方法是高等数学中最重要的一种思想方法，极限理论贯穿于整个高等数学的全过程；连续是函数的一个重要性态.

本章将介绍函数、极限和函数连续性的基本概念、极限的运算以及它们的一些性质，这些知识是以后各章节的基础.

第一节　函数的概念与性质

一、函数的概念

1. 函数的定义

在工程技术、生产实践、自然现象以及人们的日常生活中，遇到的变量往往不止一个，并且这些变量之间存在着某种相互依赖的关系，且服从着一定的变化规律. 为了揭示这些变量

之间的联系以及它们之间所服从的规律,先来考察下面几个例子(以两个变量为例).

例 1 空调普快列车的票价和里程之间的关系,见表 1-1(截取其中的一部分).

表 1-1 空调普快列车票价表

里程	…	81～90	91～100	101～110	111～120	121～130	131～140	141～150	…
票价	…	12	13	14	16	17	18	20	…

从上表可以看出里程和票价之间存在着确定的对应关系. 每给出一个里程,通过上表都可以找到唯一的一个票价与其对应,这一表格反映了空调普快列车票价与里程之间的关系.

例 2 某气象观测站的气温自动记录仪,记录了气温 T 与时间 t 之间在某一昼夜的变化曲线,如图 1-1 所示.

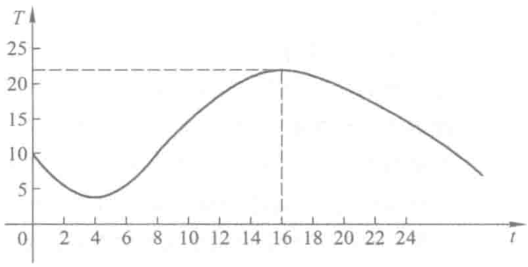

图 1-1

由图可知,对于一昼夜内的每一时刻 t,都有唯一确定的温度 T 与之对应,这个图像反映了一昼夜中温度与时刻变化之间的关系.

以上两个例子虽然涉及的问题各不相同,但它们都表达了两个变量之间的一种对应关系,当一个变量在它的变化范围内任取一个确定的数值时,另一个变量按照一定法则就有一个确定的数值与之对应. 把这种变量之间确定的依赖关系抽象出来,就是函数的概念.

定义 1 设 x 和 y 是某一变化过程中的两个变量,D 是一个给定的数集. 如果对于 D 中的每一个 x,按照某种对应法则 f,都有唯一确定的数值 y 与之对应,则称 **y 是 x 的函数**,记作 $y = f(x)$. x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,数集 D 称为**函数的定义域**.

当 x 在 D 中取某一定值 x_0 时,与其对应的 y 的值,称为**函数在点 x_0 的函数值**,记作 $y\mid_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$. 当 x 取遍 D 中的所有值时,与之对应的所有函数值的全体组成的集合称为**函数的值域**. 即 $M = \{y \mid y = f(x),\ x \in D\}$.

根据函数的定义,例 1 中列车票价是里程的函数,例 2 中气温是时间的函数.

对于函数的概念,应注意以下几点:

(1) 函数的概念中包含五个要素,即自变量、因变量、定义域、值域和对应法则,但是确定函数的关键要素是定义域和对应法则. 因此,对于两个函数来说,当且仅当它们的定义域和对应法则都相同时,这两个函数才是同一个函数,与自变量及因变量用什么字母表示没有关系.

(2) 关于函数定义域的确定可分为两种情况,对于实际问题,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的,如例 1、例 2;未标明实际意义的函数,其定义域是使函数表达式有意义的自变量的取值范围,例如,函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的定义域是$[-1, 1]$.

(3) 这里给出的函数定义只有一个自变量,因此称为**一元函数**,并且对于自变量 x 在定义域内的每一个值,因变量 y 总有唯一确定的值与其对应,这样的函数称为**单值函数**. 以后,在没有特别说明的情况下,本书讨论的函数均为一元单值函数.

(4) 函数的表示方法常用的有三种,即解析法、表格法(例 1)和图像法(例 2).

例 3　求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-3x-4}$;　　(2) $y=\sqrt{2-x}+\log_2(x-1)$.

解　(1) 要使函数表达式有意义,分母不能为零. 令 $x^2-3x-4=0$,得 $x_1=-1$, $x_2=4$,所以函数的定义域为

$$D=(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ 4)\cup(4,\ +\infty).$$

(2) 要使函数表达式有意义,x 必须满足 $\begin{cases}2-x\geqslant 0\\ x-1>0\end{cases}$,解之,得 $1<x\leqslant 2$,所以函数的定义域为 $D=(1,\ 2]$.

例 4　下列各对函数是否相同? 为什么?

(1) $f(x)=\ln x^2$, $g(x)=2\ln x$;

(2) $f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$, $g(x)=\sin x$;

(3) $f(x)=\sqrt{(x-1)^2}$, $g(x)=|x-1|$.

解　(1) 不相同. 因为函数的定义域不同,前者的定义域是 $x\neq 0$,而后者的定义域是 $x>0$.

(2) 不相同. 因为函数的对应法则不同, $\sqrt{1-\cos^2 x}=|\sin x|=\pm\sin x$.

(3) 相同. 因为函数的定义域和对应法则均相同.

例 5　一汽车租赁公司出租某种汽车的收费标准为每天的基本租金 180 元,每千米收费 12 元. 写出租用这种汽车一天的租车费(元)与行车路程(km)之间的函数关系;若某人一天交了 600 元租车费,问他行驶了多少千米?

解　设一天的租车费用为 y 元,行程为 x km,则 $y=180+12x$.

令 $y=600$,解得 $x=35$. 即若某人一天交了 600 元租车费,他行驶了 35 km.

例 6　生物学中在稳定的理想状态下,细菌的繁殖按指数模型增长: $Q(t)=a\mathrm{e}^{kt}$,其中 $Q(t)$表示 t min 后细菌数量. 假设在一定的培养条件下,开始时有 1 000 个细菌,20 min 后已增加到 3 000 个,试问 1 h 后将有多少个细菌?

解　因为 $Q(0)=1\,000$,所以 $a=1\,000$, $Q(t)=1\,000\mathrm{e}^{kt}$.
又 $t=20$ 时,$Q=3\,000$,有 $3\,000=1\,000\mathrm{e}^{k\cdot 20}$, $\mathrm{e}^{20k}=3$.
$t=60$ 时,$Q(60)=1\,000\mathrm{e}^{k\cdot 60}=1\,000(\mathrm{e}^{20k})^3=1\,000\times 3^3=27\,000$.
因此,在 1 h 后将有 27 000 个细菌.

例 7　当自然资源和环境条件对种群增长起阻滞作用时,Logistic 曲线是描述种群增长的相当准确的模型. 设一农场的某种昆虫从现在开始 t 周后的数量为

$$P(t)=\frac{20}{2+3\mathrm{e}^{-0.06t}}\ 万个,$$

试问:现在昆虫数量是多少? 50 周后,昆虫的数量又是多少?

解 现在昆虫的数量为 $P(0)=\frac{20}{2+3}=4$ 万个；

50 周后，昆虫的数量是 $P(50)=\frac{20}{2+3e^{-0.06\times 50}}\approx 9.31$ 万个.

2. 反函数

在函数关系中，自变量与因变量的划分往往是相对的，从不同的角度看同一过程，自变量和因变量可能会互相转换.

例 8 自由落体运动规律 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 中，t 是自变量，s 是因变量，由此可以算出经过时间 t 自由落体所下落的路程 s. 若已知落体下落的路程 s，求它所经过的时间 t，显然有 $t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$，这时 s 是自变量，t 是 s 的函数. 这里称函数 $t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$ 为函数 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 的反函数. 两个函数反映了同一过程中两个变量之间的对应关系，称它们是互为反函数.

定义 2 已知函数 $y=f(x)$，定义域为 D，值域为 M；若对于每一个 $y\in M$，通过 $y=f(x)$ 总有唯一的一个 $x\in D$ 与之对应，则称由此所确定的函数 $x=f^{-1}(y)$ 为 $y=f(x)$ 的**反函数**. 同时把 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

习惯上，用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此常常将 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 写成 $y=f^{-1}(x)$. $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数，例如 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 与 $y=x^3-1$ 互为反函数.

注 (1) 并不是所有的函数都有反函数，只有严格单调的函数才存在反函数.

例如，$y=x^2$ 在定义域内不存在反函数，因为对于任意 $y\in[0,+\infty)$，与之对应的有两个 x 的值. 但如果限定自变量的变化范围为 $x\in[0,+\infty)$，则存在反函数 $y=\sqrt{x}$.

又如，正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加，于是，定义正弦函数的反函数为 $y=\arcsin x$.

(2) 根据反函数的定义，直接函数的定义域是反函数的值域，直接函数的值域是反函数的定义域.

(3) 直接函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 9 求下列函数的反函数：

(1) $y=1+\ln x$；　　(2) $y=\frac{x+1}{x-1}$.

解 (1) 因为 $x=e^{y-1}$，所以其反函数为 $y=e^{x-1}$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

(2) 因为 $x=\frac{y+1}{y-1}$，所以其反函数为 $y=\frac{x+1}{x-1}$, $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

3. 分段函数

例 10 当个人的月收入超出一定金额时，应向国家缴纳个人所得税，收入越高，征收的个人所得税的比例也越高. 自 2008 年 3 月 1 日起个人收入超过 2 000 元的部分为应纳税所得额(表 1 - 2 仅保留了原表中的前三级税率).

表 1-2　个人所得税税率表(工资、薪金所得适用)

级数	全月应纳税所得额	税率(%)
1	不超过 500 元的部分	5
2	超过 500～2 000 元的部分	10
3	超过 2 000～5 000 元的部分	15

个人所得税一般在工资中直接扣除，若某单位所有员工的月收入都不超过 5 600 元，则月收入 x 与纳税金额 y 之间的函数关系为

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 2\,000,\\ 0.05(x-2\,000), & 2\,000<x\leqslant 2\,500,\\ 0.1(x-2\,500)+25, & 2\,500<x\leqslant 4\,000,\\ 0.15(x-4\,000)+175, & 4\,000<x\leqslant 5\,600.\end{cases}$$

该函数的定义域为$[0,\ 5\,600]$，若某人的月收入为 3 000 元，则利用公式 $y=0.1(x-2\,500)+25$ 可求得其缴纳所得税额为 $y|_{x=3\,000}=0.1\times 500+25=75$ 元.

在函数的定义域内任给 x 一个确定的值，通过上述关系可以找到唯一确定的 y 值与之对应，因此 y 是 x 的函数.

从例 10 中看到，有时一个函数要用几个式子表示. 这种在自变量的不同变化范围内，对应法则用不同式子来表示的函数，通常称为分段函数.

定义 3　若一个函数在自变量的不同变化范围内，对应法则不同，这样的函数称为**分段函数**.

用几个式子来表示一个(不是几个!)函数，不仅与函数定义不矛盾，而且有现实意义. 在自然科学、工程技术以及日常生活中，经常会遇到分段函数的情形.

例 11　写出如图 1-2 所示的矩形波函数 $f(x)$ 在一个周期$[-\pi,\ \pi]$上的函数表达式.

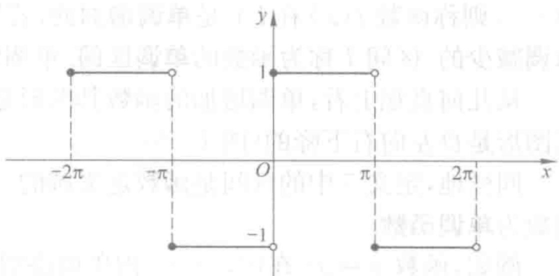

图 1-2

解　$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<\pi,\\ -1, & x=\pi.\end{cases}$

二、函数的几种特性

1. 有界性

定义 4　设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义，如果存在一个常数 $M>0$，使得对于每一个 $x\in I$，都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$在区间 I 上**有界**，否则称函数 $f(x)$在区间 I 上无界.

例如，$y=\sin x$ 在$(-\infty,\ +\infty)$ 内是有界的；$y=\dfrac{1}{x}$ 在$(0,\ 1)$ 内是无界的；$y=x^2$ 在