数字信号处理教程习题分析与解答

（第四版）

程佩青　李振松　编著

清华大学出版社

数字信号处理教程习题分析与解答

（第四版）

程佩青 李振松 编著

清华大学出版社

内 容 简 介

本书是《数字信号处理教程(第四版)》及《数字信号处理教程(第四版)简明版》(程佩青编著,清华大学出版社出版)的 212 道习题的题解,题解较为全面细致,在每道题的题解前面都有简要的分析。

本书可供高等院校通信工程、电子信息工程、信息工程以及其他相关专业的“数字信号处理”课程的教师、学生作为教学用参考书,也可作为相关专业的科技工作者的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理教程习题分析与解答/程佩青,李振松编著.—4 版.—北京:清华大学出版社,2014
ISBN 978-7-302-37642-2

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①程…　②李…　Ⅲ.①数字信号处理—高等学校—题解　Ⅳ.①TN911.72-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 186451 号

责任编辑:文　怡
封面设计:张海云
责任校对:白　蕾
责任印制:宋　林

出版发行:清华大学出版社
　　网　　址:http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
　　地　　址:北京清华大学学研大厦 A 座　　邮　　编:100084
　　社 总 机:010-62770175　　邮　　购:010-62786544
　　投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
　　课 件 下 载:http://www.tup.com.cn,010-62775954
印 装 者:北京国马印刷厂
经　　销:全国新华书店
开　　本:185mm×260mm　　印　张:20.5　　字　　数:499 千字
版　　次:2002 年 7 月第 1 版　　2014 年 9 月第 4 版　　印　　次:2014 年 9 月第1 次印刷
印　　数:1～3000
定　　价:39.00 元

产品编号:046947-01

第四版前言

本书是《数字信号处理教程(第四版)》及《数字信号处理教程(第四版)简明版》(程佩青编著,清华大学出版社出版)的全部212道习题的解析,每道习题解答前都有简要的分析或提示。

配合主教材(教程),本题解可作为高等院校通信工程专业、信息工程专业、电子信息工程专业及其他相关专业中“数字信号处理”课程的教学参考书,也可作为相关专业的科技工作者的参考资料。

本题解对深入理解“数字信号处理”课程的基础理论、基本概念,掌握和运用数字信号处理的基本分析、设计方法,提高解决实际问题的能力都有助益。同时,它能提供对学习效果的核对和检查。但是,我们还是希望读者在做习题时,自己能独立思考、独立求解,不要一味依赖这本题解,而是把它作为对你的解答的一种提示和核对工具,这是本书的初衷。

本题解中的习题题号与第四版教程中的习题题号一致,而在习题题号后括号内的习题号则是第四版教程的简明版中的习题题号。简明版第6章的题解分别放在本题解的第6章与第7章中,简明版第7、8、9三章的题解分别放在本题解的第8、9、10三章题解中。

本题解只提供一种解法,相信读者一定会有更好的解法。题解中肯定会有不妥或错误之处,欢迎广大读者批评指正。

作　者

2014年5月

目　　录

第 1 章　离散时间信号与系统

1.1(1.1)[*]　直接计算下面两个序列的卷积和 $y(n)=x(n)*h(n)$：

$$h(n)=\begin{cases}\alpha^n, & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0, & \text{其他 } n\end{cases}$$

$$x(n)=\begin{cases}\beta^{n-n_0}, & n\geqslant n_0\\ 0, & n<n_0\end{cases}$$

请用公式表示。

分析

① 卷积和的求和式中 m 是哑变量(n 看作参量)，结果 $y(n)$中 n 是变量。

$$\begin{aligned}y(n)&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)\\&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)x(n-m)\end{aligned}$$

② 分为四步：翻褶($-m$)，移位(n)，相乘，相加。求得一个 n 的 $y(n)$值。同理可求出所有 n 的 $y(n)$值。

③ 因为在 n 的不同时间段上求和范围不同，所以要分段求解。

解

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

(1) 当 $n<n_0$ 时，$y(n)=0$。

(2) 当 $n_0\leqslant n\leqslant n_0+N-1$ 时，两序列部分重叠，因而

$$\begin{aligned}y(n)&=\sum_{m=n_0}^{n}x(m)h(n-m)\\&=\sum_{m=n_0}^{n}\beta^{m-n_0}\alpha^{n-m}=\frac{\alpha^n}{\beta^{n_0}}\sum_{m=n_0}^{n}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m\\&=\alpha^n\beta^{-n_0}\frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n_0}-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}}{1-\frac{\beta}{\alpha}}\\&=\frac{\alpha^{n+1-n_0}-\beta^{n+1-n_0}}{\alpha-\beta},\ \alpha\neq\beta\\y(n)&=\alpha^{n-n_0}(n+1-n_0),\ \alpha=\beta\end{aligned}$$

---

[*] 括号中题号为简明版教程对应的题号，全书均按此处理，说明详见前言。

(3) 当 $n\geqslant n_0+N-1$ 时，两序列全重叠，因而

$$y(n)=\sum_{m=n-N+1}^{n} x(m)h(n-m)$$

$$=\sum_{m=n-N+1}^{n} \beta^{m-n_0}\alpha^{n-m}=\frac{\alpha^n}{\beta^{n_0}}\sum_{m=n-N+1}^{n}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m$$

$$=\alpha^n\beta^{-n_0}\frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-N+1}-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}}{1-\frac{\beta}{\alpha}}$$

$$=\beta^{n+1-N-n_0}\frac{\alpha^N-\beta^N}{\alpha-\beta},\ \alpha\neq\beta$$

$$y(n)=N\alpha^{n-n_0},\ \alpha=\beta$$

1.2(1.2) 已知线性移不变系统的输入为 $x(n)$，系统的单位抽样响应为 $h(n)$，试求系统的输出 $y(n)$，并画图。

(1) $x(n)=\delta(n)$，　　$h(n)=R_5(n)$

(2) $x(n)=R_3(n)$，　　$h(n)=R_4(n)$

(3) $x(n)=\delta(n-2)$，　　$h(n)=0.5^nR_3(n)$

(4) $x(n)=2^nu(-n-1)$，　　$h(n)=0.5^nu(n)$

(5) $x(n)=\delta(n)-\delta(n-3)$，　$h(n)=0.8u(n-1)$

分析

① 如果是因果序列，$y(n)$可表示成 $y(n)=\{y(0),y(1),y(2),\cdots\}$。例如，小题(2)的结果可表示为 $y(n)=\{1,2,3,3,2,1\}$。

② $\delta(n)*x(n)=x(n)$，$\delta(n-m)*x(n)=x(n-m)$。

③ 卷积和求解时，对 n 要分段处理。

解

(1) $y(n)=x(n)*h(n)=R_5(n)$

(2) $y(n)=x(n)*h(n)=\{1,2,3,3,2,1\}$

(3) $y(n)=\delta(n-2)*0.5^nR_3(n)=0.5^{n-2}R_3(n-2)$

(4) $x(n)=2^nu(-n-1)$，　$h(n)=0.5^nu(n)$

得

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{-1}0.5^{n-m}2^m=\frac{1}{3}\cdot 2^{-n},\quad n\geqslant 0$$

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{n}0.5^{n-m}2^m=\frac{4}{3}\cdot 2^n,\quad n\leqslant -1$$

(5) $y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{n}[\delta(m)-\delta(m-3)]\cdot 0.8u(n-m-1)$

$=0.8u(n-1)-0.8u(n-4)$

$=0.8R_3(n-1)$

作图如图 P1.2 所示。

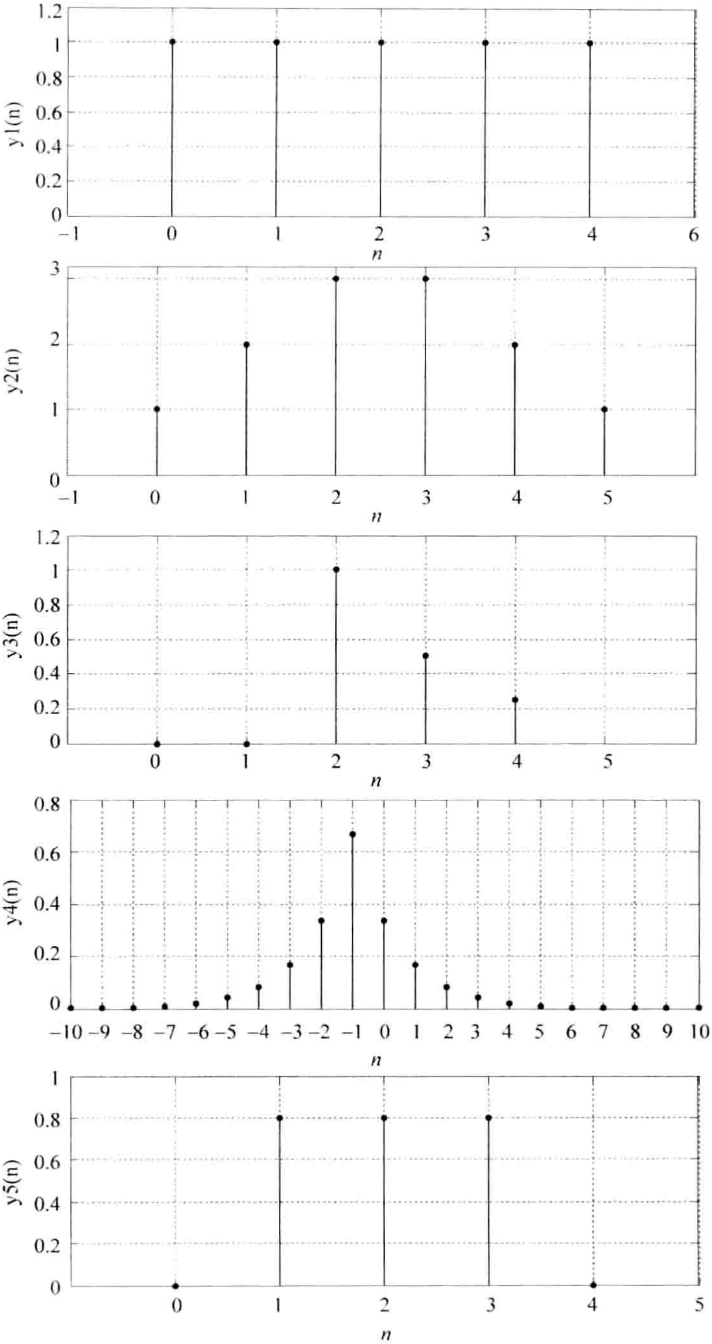

图 P1.2

1.3(1.3) 已知 $h(n)=a^{-n}u(-n-1)$，$0<a<1$，通过直接计算卷积和的办法，试确定单位抽样响应为 $h(n)$ 的线性移不变系统的阶跃响应。

分析

① 卷积和的求和式中 m 是哑变量(n 看作参量)，结果 $y(n)$ 中 n 是变量。

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)x(n-m)$$

② 分为四步：翻褶($-m$)，移位(n)，相乘，相加。求得一个 n 的 $y(n)$ 值。同理可求出所有 n 的 $y(n)$ 值。

③ 因为在 n 的不同时间段上求和范围不同，所以要分段求解。

解

由题意和卷积公式

$$x(n)=u(n)$$
$$h(n)=a^{-n}u(-n-1),\quad 0<a<1$$
$$y(n)=x(n)*h(n)$$

得

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{n}a^{-m}=\frac{a^{-n}}{1-a},\quad n\leqslant -1$$
$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{-1}a^{-m}=\frac{a}{1-a},\quad n>-1$$

1.4(1.4) 判断下列每个序列是否是周期性的，若是周期性的，试确定其周期。

(1) $x(n)=A\cos\left(\frac{3\pi}{7}n-\frac{\pi}{8}\right)$ (2) $x(n)=A\sin\left(\frac{13}{3}\pi n\right)$

(3) $x(n)=e^{j\left(\frac{n}{6}-\pi\right)}$ (4) $x(n)=e^{j8\pi n/\sqrt{3}}$

(5) $x(n)=\sin(\pi n/7)/(\pi n)$ (6) $x(n)=\sin(24n-\pi)$

(7) $x(n)=\sin(3\pi n)+\cos(15n)$ (8) $x(n)=e^{j3\pi n/4}+e^{j5\pi n/7}$

(9) $x(n)=e^{j4\pi n/7}$

分析

$x(n)=A\cos(\omega_0 n+\psi)$ 或 $x(n)=A\sin(\omega_0 n+\psi)$ 的周期性判断方法如下：

① 当 $2\pi/\omega_0$ 为整数时，例 $\frac{2\pi}{\omega_0}=N$，则 $x(n)$ 的周期为 N；

② 当 $2\pi/\omega_0$ 为有理数时，例 $\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{N}{M}$($N$、$M$ 为互素的整数)，则 $x(n)$ 的周期为 N；

③ 当 $2\pi/\omega_0$ 为无理数时，$x(n)$ 为非周期序列。

解

(1) 由 $x(n)=A\cos\left(\frac{3\pi}{7}n-\frac{\pi}{8}\right)$

可得 $$2\pi/\omega_0=2\pi/\frac{3\pi}{7}=\frac{14}{3}$$

所以 $x(n)$ 是周期的，周期为 14。

(2) 由 $x(n)=A\sin\left(\frac{13}{3}\pi n\right)$

可得
$$2\pi/\omega_0=2\pi/\frac{13}{3}\pi=\frac{6}{13}$$
所以 $x(n)$是周期的,周期为 6。

(3) 由 $x(n)=e^{j\left(\frac{6}{n}-\pi\right)}=\cos\left(\frac{n}{6}-\pi\right)+j\sin\left(\frac{n}{6}-\pi\right)=-\cos\frac{n}{6}-j\sin\frac{n}{6}$

可得 $2\pi/\omega_0=12\pi$ 是无理数,所以 $x(n)$是非周期的。

(4) 由 $x(n)=e^{j8\pi n/\sqrt{3}}=\cos(8\pi n/\sqrt{3})+j\cdot\sin(8\pi n/\sqrt{3})$

可得 $2\pi/\omega_0=\sqrt{3}/4$ 是无理数,所以 $x(n)$是非周期的。

(5) 由 $x(n)=\sin(\pi n/7)/\pi n=7\mathrm{Sa}(\pi n/7)$

因为 $\mathrm{Sa}(t)$为非周期函数,所以 $x(n)$是非周期的。

(6) 由 $x(n)=\sin(24n-\pi)=-\sin(24n)$

可得 $2\pi/\omega_0=\pi/12$,是无理数,所以 $x(n)$是非周期的。

(7) 由 $x(n)=\sin(3\pi n)+\cos(15n)$,其中 $2\pi/\omega_1=2/3$,$2\pi/\omega_2=2\pi/15$

可知对 $x(n)$来说,$\cos(15n)$是非周期的,所以 $x(n)$是非周期的。

(8) 由 $x(n)=e^{j3\pi n/4}+e^{j5\pi n/7}=[\cos(3\pi n/4)+\cos(5\pi n/7)]+j[\sin(3\pi n/4)+\sin(5\pi n/7)]$

可得 $2\pi/\omega_1=8/3$,$2\pi/\omega_2=14/5$,均为有理数。所以 $x(n)$是周期的。周期是 8 和 14 的最小公倍数 56。

(9) 由 $x(n)=e^{j4\pi n/7}=\cos(4\pi n/7)+j\sin(4\pi n/7)$

可得 $2\pi/\omega_0=7/2$,所以 $x(n)$是周期的,周期是 7。

1.5(1.5) 设系统差分方程为
$$y(n)=ay(n-1)+x(n)$$
其中 $x(n)$为输入,$y(n)$为输出。当边界条件选为

(1) $y(0)=0$　　　　(2) $y(-1)=0$

时,试判断系统是否是线性的?是否是移不变的?

分析

已知边界条件,而且没有限定序列类型(如因果序列、反因果序列等),则递推求解必须向两个方向进行($n\geqslant 0$ 及 $n<0$)。

解

(1) $y_1(0)=0$

(a) 设 $x_1(n)=\delta(n)$,$y_1(n)=ay_1(n-1)+x_1(n)$

① 向 $n>0$ 处递推,则
$$y_1(1)=ay_1(0)+x_1(1)=0$$
$$y_1(2)=ay_1(1)+x_1(2)=0$$
$$\vdots$$
$$y_1(n)=ay_1(n-1)+x_1(n)=0$$

得

$$y_1(n)=0,\quad n\geqslant 0$$

② 向 $n<0$ 处递推，将 $y_1(n)$ 加以变换，即把

$$y_1(n+1)=ay_1(n)+x_1(n+1)$$

变换成

$$y_1(n)=\frac{1}{a}[y_1(n+1)-x_1(n+1)]$$

因而

$$y_1(-1)=\frac{1}{a}[y_1(0)-x_1(0)]=-a^{-1}$$

$$y_1(-2)=\frac{1}{a}[y_1(-1)-x_1(-1)]=-a^{-2}$$

$$y_1(-3)=\frac{1}{a}[y_1(-2)-x_1(-2)]=-a^{-3}$$

$$\vdots$$

$$y_1(n)=\frac{1}{a}[y_1(n+1)-x_1(n+1)]=-a^n$$

综上①、②可知

$$y_1(n)=-a^nu(-n-1)$$

(b) 设 $x_2(n)=\delta(n-1)$，$y_2(n)=ay_2(n-1)+x_2(n)$

① 向 $n>0$ 处递推，即

$$y_2(1)=ay_2(0)+x_2(1)=1$$

$$y_2(n)=ay_2(n-1)+x_2(n)=a^{n-1}$$

得

$$y_2(n)=a^{n-1},\quad n\geqslant 1$$

② 向 $n<0$ 处递推，将 $y_2(n)$ 加以变换，即

$$y_2(n)=\frac{1}{a}[y_2(n+1)-x_2(n+1)]$$

则

$$y_2(-1)=\frac{1}{a}[y_2(0)-x_2(0)]=0$$

$$y_2(-2)=\frac{1}{a}[y_2(-1)-x_2(-1)]=0$$

$$\vdots$$

$$y_2(n)=\frac{1}{a}[y_2(n+1)-x_2(n+1)]=0$$

综上①、②可得

$$y_2(n)=a^{n-1}u(n-1)$$

由(a)、(b)结果可知，$x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 是移一位的关系，但 $y_1(n)$ 与 $y_2(n)$ 不是移一位的关系，所以在 $y(0)=0$ 条件下，系统不是移不变系统。

(c) 设 $x_3(n)=\delta(n)+\delta(n-1)$，$y_3(n)=ay_3(n-1)+x_3(n)$

① 向 $n>0$ 处递推，则

$$y_3(1)=ay_3(0)+x_3(1)=1$$
$$y_3(2)=ay_3(1)+x_3(2)=a$$
$$y_3(3)=ay_3(2)+x_3(3)=a^2$$
$$\vdots$$
$$y_3(n)=ay_3(n-1)+x_3(n)=a^{n-1}$$

得

$$y_3(n)=a^{n-1},\quad n\geqslant 1$$

② 向 $n<0$ 处递推，将 $y_3(n)$ 加以变换，即

$$y_3(n)=\frac{1}{a}[y_3(n+1)-x_3(n+1)]$$

则

$$y_3(-1)=\frac{1}{a}[y_3(0)-x_3(0)]=-a^{-1}$$
$$y_3(-2)=\frac{1}{a}[y_3(-1)-x_3(-1)]=-a^{-2}$$
$$\vdots$$

可得

$$y_3(n)=\frac{1}{a}[y_3(n+1)-x_3(n+1)]=-a^n,\quad n\leqslant -1$$

综上①、②可得

$$y_3(n)=a^{n-1}u(n-1)-a^nu(-n-1)=y_1(n)+y_2(n)$$

所以，该系统在 $y(0)=0$ 条件下是线性系统。

(2) $y_1(-1)=0$

(a) 令 $x_1(n)=\delta(n)$，$y_1(n)=ay_1(n-1)+x_1(n)$

则

$$y_1(0)=ay_1(-1)+x_1(0)=1$$
$$y_1(1)=ay_1(0)+x_1(1)=a$$
$$\vdots$$

可以推出

$$y_1(n)=ay_1(n-1)+x_1(n)=a^n$$

同样可求得

$$y_1(-1)=y_1(-2)=\cdots=0\text{，即 } y_1(n)\big|_{n\leqslant -1}=0\text{。}$$

所以

$$y_1(n)=a^nu(n)$$

(b) 令 $x_2(n)=\delta(n-1)$，$y_2(n)=ay_2(n-1)+x_2(n)$

则

$$y_2(0)=ay_2(-1)+x_2(0)=0$$
$$y_2(1)=ay_2(0)+x_2(1)=1$$
$$\vdots$$

可以推出

$$y_2(n) = ay_2(n-1) + x_2(n) = a^{n-1}$$

同样可求得

$$y_2(-1) = y_2(-2) = \cdots = 0, \text{即 } y_2(n)\big|_{n\leqslant -1} = 0$$

所以

$$y_2(n) = a^{n-1}u(n-1)$$

因为 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 为移一位关系，而且 $y_1(n)$ 与 $y_2(n)$ 也是移一位关系，所以在 $y(-1)=0$ 的条件下，系统是移不变系统。

(c) 令　$x_3(n)=x_1(n)+x_2(n)=\delta(n)+\delta(n-1)$，$y_3(n)=ay_3(n-1)+x_3(n)$

$n<0$ 时

$$y_3(-2) = \cdots = y_3(n)\big|_{n\leqslant -1} = 0$$

$n\geqslant 0$ 时

$$y_3(0) = ay_3(-1) + x_3(0) = 1$$
$$y_3(1) = ay_3(0) + x_3(1) = a + 1$$
$$y_3(2) = ay_3(1) + x_3(2) = a^2 + a$$
$$\vdots$$

得

$$y_3(n) = ay_3(n-1) + x_3(n) = a^n + a^{n-1}$$

综上，可得

$$y_3(n) = a^n u(n) + a^{n-1}u(n-1) = y_1(n) + y_2(n)$$

所以系统是线性系统。

1.6(1.6)　试判断

(1) $y(n) = \sum\limits_{m=-\infty}^{n} x(m)$　　　　(2) $y(n) = [x(n)]^2$

(3) $y(n) = x(n)\sin\left(\dfrac{2\pi}{9}n + \dfrac{\pi}{7}\right)$　　　　(4) $y(n)=x(-n)$

(5) $y(n)=x(n^2)$

是否是线性系统？是否是移不变系统？

分析

利用定义来证明。

① 线性：满足可加性和比例性，即

$$T[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1T[x_1(n)] + a_2T[x_2(n)]$$

② 移不变性：输入与输出的移位应相同，即

$$T[x(n-m)] = y(n-m)$$

解

(1) 根据 $y(n) = \sum\limits_{m=-\infty}^{n} x(m)$，可得

$$y_1(n) = T[x_1(n)] = \sum_{m=-\infty}^{n} x_1(m),\quad y_2(n) = T[x_2(n)] = \sum_{m=-\infty}^{n} x_2(m)$$

$$ay_1(n)+by_2(n)=\sum_{m=-\infty}^{n}[ax_1(m)+bx_2(m)]$$

而
$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=\sum_{m=-\infty}^{n}[ax_1(m)+bx_2(m)]$$

即
$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=ay_1(n)+by_2(n)$$

所以系统是线性系统。

又因为

$$T[x(n-k)]=\sum_{m=-\infty}^{n}x(m-k)=\sum_{m=-\infty}^{n-k}x(m)$$

而
$$y(n-k)=\sum_{m=-\infty}^{n-k}x(m)=T[x(n-k)]$$

所以系统是移不变的。

(2) 根据 $y(n)=[x(n)]^2$,可得

$$y_1(n)=T[x_1(n)]=[x_1(n)]^2,\quad y_2(n)=T[x_2(n)]=[x_2(n)]^2$$

$$ay_1(n)+by_2(n)=a[x_1(n)]^2+b[x_1(n)]^2$$

而
$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=[ax_1(n)+bx_2(n)]^2$$
$$=[ax_1(n)]^2+[bx_2(n)]^2+2abx_1(n)x_2(n)$$

即
$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]\neq ay_1(n)+by_2(n)$$

所以系统不是线性系统。

又因为

$$T[x(n-m)]=[x(n-m)]^2,\ y(n-m)=[x(n-m)]^2$$

即
$$T[x(n-m)]=y(n-m)$$

所以系统是移不变的。

(3) 根据 $y(n)=x(n)\sin\left(\frac{2\pi}{9}n+\frac{\pi}{7}\right)$,可得

$$y_1(n)=x_1(n)\sin\left(\frac{2\pi}{9}n+\frac{\pi}{7}\right),\quad y_2(n)=x_2(n)\sin\left(\frac{2\pi}{9}n+\frac{\pi}{7}\right)$$

$$ay_1(n)+by_2(n)=ax_1(n)\sin\left(\frac{2\pi}{9}n+\frac{\pi}{7}\right)+bx_2(n)\sin\left(\frac{2\pi}{9}n+\frac{\pi}{7}\right)$$

而
$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=[ax_1(n)+bx_2(n)]\sin\left(\frac{2\pi}{9}n+\frac{\pi}{7}\right)$$

即
$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=ay_1(n)+by_2(n)$$

所以系统是线性系统。

又因为

$$T[x(n-m)]=x(n-m)\sin\left(\frac{2\pi}{9}n+\frac{\pi}{7}\right)$$

$$y(n-m)=x(n-m)\sin\left[\frac{2\pi}{9}(n-m)+\frac{\pi}{7}\right]$$

即
$$T[x(n-m)]\neq y(n-m)$$

所以系统不是移不变的。

(4) 根据 $y(n)=x(-n)$,可得

$$y_1(n)=T[x_1(n)]=x_1(-n),\quad y_2(n)=T[x_2(n)]=x_2(-n)$$

$$ay_1(n)+by_2(n)=ax_1(-n)+bx_2(-n)$$

而 $T[ax_1(n)+bx_2(n)]=ax_1(-n)+bx_2(-n)$

即 $T[ax_1(n)+bx_2(n)]=ay_1(n)+by_2(n)$

所以系统是线性系统。

又因为

$$T[x(n-m)]=x[-n-m]=x(-n-m)$$

$$y(n-m)=x[-(n-m)]=x(m-n)$$

即
$$T[x(n-m)]\neq y(n-m)$$

所以系统不是移不变的。

(5) 根据 $y(n)=x(n^2)$,可得

$$y_1(n)=x_1(n^2),\quad y_2(n)=x_2(n^2)$$

$$ay_1(n)+by_2(n)=ax_1(n^2)+bx_2(n^2)$$

而

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=ax_1(n^2)+bx_2(n^2)$$

即
$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=ay_1(n)+by_2(n)$$

所以系统是线性系统。

又因为

$$T[x(n-m)]=x(n^2-m)$$

$$y(n-m)=x[(n-m)^2]$$

即
$$T[x(n-m)]\neq y(n-m)$$

所以系统不是移不变的。

1.7(1.7) 试判断以下每一系统是否是(1)线性,(2)移不变,(3)因果,(4)稳定的?

(1) $T[x(n)]=g(n)x(n)$ (2) $T[x(n)]=\sum_{k=n_0}^{n}x(k)$

(3) $T[x(n)]=x(n-n_0)$ (4) $T[x(n)]=e^{x(n)}$

(5) $T[x(n)]=nx(n)$ (6) $T[x(n)]=x(n^3)$

(7) $T[x(n)]=x(n+2)+ax(n)$

(8) $T[x(n)]=x(2n)$ (9) $T[x(n)]=\sum_{k=n-n_0}^{n+n_0}x(k)$

(10) $T[x(n)]=\frac{1}{n}u(n)$

分析

对 $y(n)=T[x(n)]=g(n)x(n)$,若输入移位为 m,则 $x(n)$ 移位变成 $x(n-m)$,而 $g(n)$ 并不移位,但若 $y(n)$ 移位 m,则 $x(n)$ 和 $g(n)$ 均要移位 m。

解

(1) 由 $y(n)=T[x(n)]=g(n)x(n)$，得

$$\begin{aligned}T[ax_1(n)+bx_2(n)] &= g(n)[ax_1(n)+bx_2(n)]\\ &= g(n)\times ax_1(n)+g(n)\times bx_2(n)\\ &= aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]\end{aligned}$$

所以系统是线性系统。

又因为

$$T[x(n-m)]=g(n)x(n-m),\quad y(n-m)=g(n-m)x(n-m)$$

即

$$T[x(n-m)]\neq y(n-m)$$

所以系统不是移不变的。

由于

$$y(n_0)=T[x(n)]|_{n=n_0}=g(n_0)x(n_0)$$

只取决于 $x(n)|_{n\leqslant n_0}$，所以系统是因果的。

若 $g(n)$ 有界，则 $y(n)=g(n)x(n)$ 有界，系统是稳定的。

否则，$y(n)=g(n)\cdot x(n)$ 是无界的，此时系统是不稳定的。

(2) 由 $y(n)=T[x(n)]=\sum_{k=n_0}^{n}x(k)$，得

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=\sum_{k=n_0}^{n}[ax_1(k)+bx_2(k)]$$

$$=\sum_{k=n_0}^{n}ax_1(k)+\sum_{k=n_0}^{n}bx_2(k)=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$$

所以系统是线性系统。

又因为

$$T[x(n-m)]=\sum_{k=n_0}^{n}x(k-m)=\sum_{k=n_0-m}^{n-m}x(k),\quad y(n-m)=\sum_{k=n_0}^{n-m}x(k)$$

即

$$T[x(n-m)]\neq y(n-m)$$

所以系统不是移不变的。

由于 $y(n_1)=T[x(n)]|_{n=n_1}=\sum_{k=n_0}^{n_1}x(k)$ 只取决于 $x(n)|_{n\leqslant n_1}$，所以系统是因果的。

设 $|x(n)|\leqslant M<\infty$，则有

$$\sum_{k=n_0}x(n)\leqslant\sum_{k=n_0}^{n}|x(n)|\leqslant(n-n_0+1)M\xrightarrow{n\to\infty}\infty$$

所以 $y(\infty)\to\infty$，不满足稳定系统条件，系统是不稳定的。

(3) 由 $y(n)=T[x(n)]=x(n-n_0)$，得

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=ax_1(n-n_0)+bx_2(n-n_0)=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$$

所以系统是线性系统。

又因为

$$T[x(n-m)]=x(n-n_0-m),\quad y(n-m)=x(n-m-n_0)$$

即

$$T[x(n-m)]=y(n-m)$$

所以系统是移不变的。

由于系统为 LSI 系统，且系统单位抽样响应为

$$h(n) = T[\delta(n)] = \delta(n-n_0)$$

当 $n_0<0$ 时，$h(n_0)=1\neq 0$，则系统不是因果的。

当 $n_0\geqslant 0$ 时，$h(n_0)=1$，$h(n)|_{n<0}=0$ 则系统是因果的。

由于 $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = 1 < \infty$$

所以系统是稳定的。

(4) 由 $y(n)=T[x(n)]=e^{x(n)}$，得

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)] = e^{ax_1(n)+bx_2(n)} = e^{ax_1(n)} \times e^{bx_2(n)} = T[ax_1(n)] \times T[bx_2(n)]$$

所以系统不是线性系统。

又因为

$$T[x(n-m)] = e^{x(n-m)}, \quad y(n-m) = e^{x(n-m)}$$

即

$$T[x(n-m)] = y(n-m)$$

所以系统是移不变的。

由于 $y(n_0)=T[x(n)]|_{n=n_0}=e^{x(n_0)}$

只取决于 $x(n)|_{n\leqslant n_0}$，所以系统是因果的。

设 $|x(n)|<M$，即 $-M<x(n)<M$

可知 $$e^{-M}<e^{x(n)}<e^{M}<\infty$$

所以 $y(n)$ 有界，系统是稳定的。

(5) 由 $y(n)=T[x(n)]=nx(n)$，得

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)] = n[ax_1(n)+bx_2(n)] = aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$$

所以系统是线性系统。

又因为

$$T[x(n-m)] = nx(n-m), \quad y(n-m) = (n-m)x(n-m)$$

即 $$T[x(n-m)]\neq y(n-m)$$

所以系统不是移不变的。

由于 $y(n_0)=n_0x(n_0)$，只取决于 $x(n)|_{n\leqslant n_0}$，所以系统是因果的。

设 $|x(n)|<A$，即 $|y(n)|=A|n|\xrightarrow{n\to\infty}\infty$，无界

所以系统不是稳定的。

(6) 由 $y(n)=T[x(n)]=x(n^3)$，得

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)] = ax_1(n^3)+bx_2(n^3) = aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$$

所以系统是线性系统。

又因为

$$T[x(n-m)] = x(n^3-m), \quad y(n-m) = x[(n-m)^3]$$

即 $$T[x(n-m)]\neq y[n-m]$$

所以系统不是移不变的。

由于 $y(n_0)=x(n_0^3)$