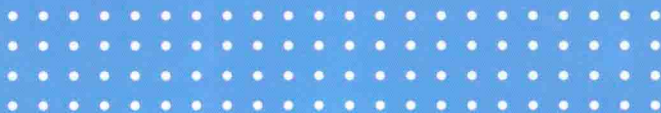
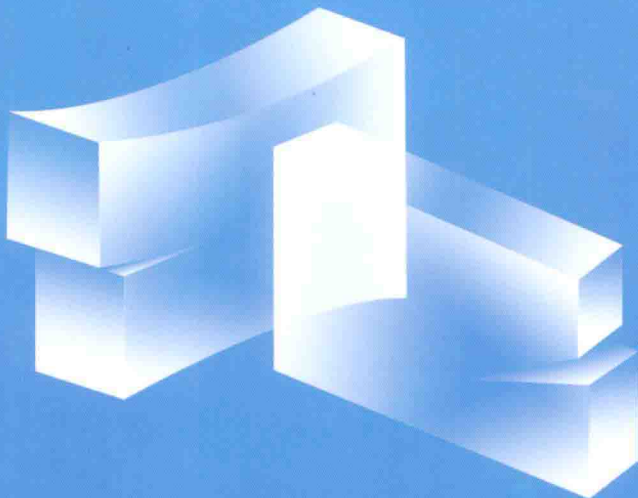


工程断裂力学 简明教程

An Introduction to Engineering Fracture Mechanics



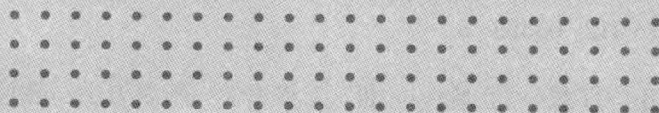
■ 臧启山 姚 戈 编著



中国科学技术大学出版社

工程断裂力学简明教程

An Introduction to Engineering Fracture Mechanics



臧启山 姚 戈 编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书简要介绍了工程断裂力学的基础和应用知识,重点包含断裂力学这门学科中相对成熟的线弹性断裂力学、弹塑性断裂力学、断裂韧度参数的测试和断裂力学在疲劳设计中的应用这四方面的内容。考虑到学习的连贯性,本书还加入了“与断裂力学有关的工程力学基础”作为第1章,以帮助读者更好地阅读和理解。

本书可以作为非力学专业的学习或选修教材,也可以作为高等院校有关专业的教学参考和有关工程设计人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

工程断裂力学简明教程/臧启山,姚戈编著. —合肥:中国科学技术大学出版社, 2014.5

ISBN 978-7-312-03328-5

I. 工… II. ①臧… ②姚… III. 工程力学—断裂力学—教材 IV. TB12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 065409 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号,230026
<http://press.ustc.edu.cn>
印刷 合肥市宏基印刷有限公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 710 mm×960 mm 1/16
印张 11
字数 209 千
版次 2014 年 5 月第 1 版
印次 2014 年 5 月第 1 次印刷
定价 23.00 元

前 言

人们对于断裂现象并不陌生,断裂是一个古老而普遍存在的问题。原始人使用棍棒和石器,但不久就会产生断裂和破坏,当时人类唯一的解决办法就是更换工具。

随着社会的发展,知识的不断积累,科学与工艺的不断进步,人类越来越聪明。我们不仅可以盖起高楼大厦,修建各种桥梁、道路,并且可以制造出各种机械、设备,地上跑的、水中游的、天上飞的,无所不能。但有一个问题始终没有很好解决,那就是这些建筑、设备、工具会不时发生断裂破坏。这不但会带来重大经济损失,还严重危及人的生命安全。

多少世纪以来,人们积累了大量有关断裂的表象和经验,但对断裂的认识却长时间停留在现象上。解决构件断裂的一般方法就是更换或寻找更强的材料来代替。15世纪以后,随着手工业和工商业的发展,人们对于断裂的认识越来越深刻。待到连续性强度理论的出现,特别是材料力学、弹塑性力学理论的建立,科学家相继提出了许多强度模型和理论。依照强度设计方法,有些断裂问题得到了初步解决。

18世纪以后,随着制造业的发展,新材料(如高强度钢)、新工艺(如焊接)也得到了迅速发展,然而断裂问题仍然时有发生,并且人们发现不同材料在断裂时对环境、缺陷(缺口及裂纹)以及对交变载荷的敏感性不同。这些问题用原有的强度设计理论无法解决。因此,人们逐渐认识到断裂的复杂性。断裂的发生牵涉诸多因素,包括:设计问题——理论不完善;使用问题——使用不正确;材料问题——材料不完整。

不断发生的断裂事故除了说明断裂问题的复杂性外,也说明了原有的强度理论还满足不了实际问题的需要。因为缘于断裂件的非连续性和奇异

性,基于连续性强度理论的固体力学,包括材料力学、弹性力学、塑性力学在分析断裂问题时,特别是对断裂源处的分析都遇到了困难。

19~20 世纪期间,在现代工业发展和战争需求的推动下,人们对断裂现象的认识进一步深化,对材料强度、缺陷、位错、应力集中等理论的研究不断深入。1913 年,Inglis 把缺陷看成材料内部的小孔,理论计算了无限大板中心孔(圆及椭圆)受力的应力分布,具体计算了类似椭圆缺陷对材料强度的影响;1920 年,Griffith 在 Inglis 的基础上,用能量法分析了脆性材料的破坏理论,成为断裂力学最早的奠基者;20 世纪 60 年代,Irwin 则在前人的基础上,成功地分析了裂纹尖端的应力场和位移场,提出了应力强度因子的概念。此后,世界各国的许多科学家相继在断裂和断裂理论方面做出了贡献。

我国在 20 世纪 60 年代初就开始了断裂力学的研究工作。虽然因“文化大革命”干扰延误了工作,但我国科技工作者(如陈麓、范天佑和龙期威等)在断裂理论和实验方面仍然做出了相当突出的工作。

正是在 Inglis、Griffith 和 Irwin 等一大批学者的努力下,断裂力学终于在 20 世纪 60 年代应运而生,成为一门新的学科,并继续发展和接受实践的检验。

断裂力学是由材料强度研究发展起来的固体力学的一个分支。它与其他连续介质力学学科的不同之处在于其研究对象是含有裂纹或缺陷的固体。虽然它仍然从材料的应力与强度分析出发,研究含有缺陷材料的断裂强度及裂纹的扩展规律,但断裂力学应用新的概念和分析方法,集中研究裂纹附近的材料行为。由于含裂纹或缺陷物体的普遍存在,尤其是工程断裂失效问题的普遍存在,故其分析方法在工程技术及许多科学领域中均获得了广泛的应用,目前成为固体力学中一个十分活跃的领域。

同时,正是断裂力学产生的背景,决定了这门学科本身与工程应用的紧密联系,在 20 世纪 60~90 年代,世界各地形成了研究、学习断裂力学的高潮。线弹性断裂力学和弹塑性断裂力学很快被广泛引入航空航天、机械制造、石油化工、冶金材料和地学等各个工程领域,并为工程理论设计、结构材料选材、断裂失效分析、结构寿命估算乃至地震预测开辟了新的方法。

作为一门新的学科,工程断裂力学已经走过半个多世纪,这 50 多年来,

断裂力学无论是在基础理论还是在工程应用方面都得到长足的发展。1989年 Irwin 在会见中国学者时曾说：“线弹性断裂力学已基本成熟，关键是在应用中积累完善，弹塑性断裂力学及动态断裂力学还有很长的路要走。”同年，在世界断裂大会(ICF)上，大会主席 Leibowite 指出：“尽管多年来断裂力学在解决重大问题上取得了很大进展，但必须了解断裂力学远非一门成熟的学科。”如今，又过了 20 余年，非线性断裂力学、动态断裂力学和微观断裂力学在理论上有了新的进步，特别是随着计算机的广泛应用，计算断裂力学突飞猛进，延伸到断裂研究的各个领域。但在工程应用方面，线弹性断裂力学和弹塑性断裂力学目前还是最成熟、应用最广泛的研究领域，这也是本书的最主要部分。

阅读本书需要读者具有一定的材料力学或弹性力学的知识。为了兼顾力学基础不同的读者，本书第 1 章介绍了“与断裂力学有关的工程力学基础”，编入这些内容对于保证教材的系统性和知识的连贯性十分必要。除了第 1 章外，本书将线弹性断裂力学、弹塑性断裂力学、断裂韧度参数的测试和断裂力学在疲劳设计中的应用分别作为单独章节论述。有一定断裂力学基础和工程应用需求的读者，可以直接阅读相关章节的内容。

本书可以作为非力学专业的学习或选修教材，也可以作为高等院校有关专业的教学参考书和有关工程设计人员的参考书。本书编写时所用的主要参考书已列入参考文献[13~18]，在此感谢所有参考文献的作者。

由于写作仓促，书中难免有疏漏的地方，希望能得到广大读者的批评与指正。作者感谢所有在本书编著过程中给予帮助的人。

作 者

2013 年 5 月

目 录

前 言	(i)
第 1 章 与断裂力学有关的工程力学基础	(1)
1.1 一点的应力与应变	(1)
1.2 平衡微分方程	(9)
1.3 平面应力与平面应变	(13)
1.4 相容方程和应力函数	(15)
1.5 应力函数的复变函数表示	(20)
1.6 应变能密度	(27)
1.7 材料的变形模型	(29)
1.8 材料的屈服条件	(32)
第 2 章 线弹性断裂力学(LEFM)	(34)
2.1 裂纹尖端的引力场和位移场	(34)
2.2 Westergaard 方法	(42)
2.3 Griffith 理论——脆性材料断裂理论	(51)
2.4 能量原理	(57)
2.5 应力强度因子的计算	(63)
2.6 裂纹尖端的塑性区	(86)
2.7 K 主导区	(91)
习题	(92)
第 3 章 弹塑性断裂力学(EPFM)简要	(95)
3.1 Dugdale 方法(D-M 模型)	(95)

3.2	裂纹尖端张开位移 CTOD 的定义及准则	(96)
3.3	CTOD 与 K_I 的一致性(小范围屈服)	(98)
3.4	CTOD 准则的应用	(99)
3.5	J 积分的定义及守恒性	(102)
3.6	线弹性条件下 J 与 K 的关系	(106)
3.7	弹塑性条件下 J 与 CTOD 的关系	(112)
3.8	J 积分的计算	(113)
3.9	J 积分与裂纹尖端应力应变场	(114)
3.10	J 主导区	(116)
	习题	(117)
第 4 章	断裂韧度参数的测试	(119)
4.1	平面应变断裂韧度 K_{IC} 的测试	(120)
4.2	断裂韧度参数 δ (CTOD)和 J 积分特征值测试的一般要求	(131)
4.3	断裂韧度 δ_0 值的实验测试	(138)
4.4	断裂韧度 J_0 值的实验测试	(140)
4.5	$\delta - \Delta a$ 和 $J - \Delta a$ 阻力曲线和稳定裂纹扩展下的启裂韧度 $\delta_{0.2BL}$ 、 $J_{0.2BL}$ 和 δ_i 、 J_i 的测试	(142)
	习题	(151)
第 5 章	断裂力学在疲劳裂纹扩展中的应用	(152)
5.1	疲劳裂纹在交变载荷下的形成与扩展	(152)
5.2	疲劳设计方法	(156)
5.3	断裂力学在疲劳设计中的应用	(157)
	习题	(162)
附 录	(164)
参考文献	(165)

第 1 章 与断裂力学有关的力学基础

1.1 一点的应力与应变

1.1.1 一点的应力

1. 应力的定义

物体受到外力的作用会发生变形,物体内部则产生抵抗变形的力。物体内在一个微面上受的力 dF 与该微面面积 dA 的比(即单位面积上的力)定义为该微面上应力:

$$\sigma_A = \frac{dF}{dA}$$

图 1.1 给出了应力定义的示意图。

由于 dF 是一个矢量,所以 σ_A 也是一个矢量, dF 可以分解为垂直于 dA 和平行于 dA 的分力,因此 σ_A 也可以分解为垂直于该面的应力——称为正应力 σ 和平行于该面的应力——称为剪应力 τ 。

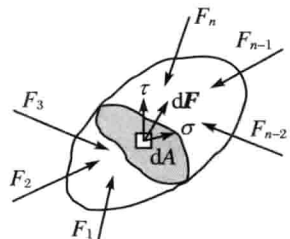


图 1.1 应力定义的示意图

2. 一点的应力

应力是定义在一个面上的,过一点有无数多个面,这些面上都有应力,每个面上的应力大小和方向都可以不同,但不是互相独立的。通常物体内部的一点用一个微小的正六面体来表示,只要知道这六个面上的应力,其他各面上的应力就可以确定了。六面体的各面面积趋近于零就代表一个点了。

在 (x, y, z) 坐标系下,六面体各个面上的应力可用图 1.2(a) 表示,其应力分量为

$$\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z$$

或在 (x_1, x_2, x_3) 坐标系下用图 1.2(b)表示,其应力分量为

$$\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}$$

其中下角标的第一个数字代表平面的法线方向,第二个数字表示应力的方向。

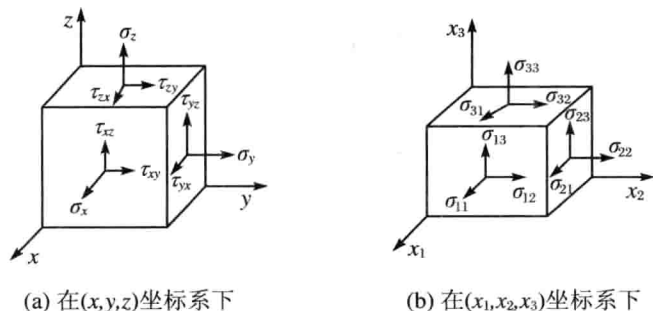


图 1.2 一点的六面体在不同坐标系下的表示

简言之,一点的应力可以用上述应力分量表示,它是一个张量,通常简略表示为 (σ_{ij}) 或写为矩阵形式:

$$(\sigma_{ij}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

物体内过一点的其他各面上的应力都可以通过力的平衡关系用这 9 个量来表示。这 9 个量表示了一点的应力状态。张量是一组表示某种性质的量的组合,它不是一个数值。

因此,说一点的应力有多大是不准确的,只能说某个面上的应力有多大(或一点某个方向上应力多大,这里的方向是指平面的法线方向,与平面对应),而各个面上的应力可以分解为正应力和剪应力。

实际上,过一点可以做无数多个平面,但相对于这个正六面体的任意一个斜面上的应力,对各向同性材料,在三维坐标系里都可以用 (σ_{ij}) 中 9 个独立分量表示出来。

$$(\sigma_{ij}) \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3)$$

可以证明图 1.2 中两个指向(或背离)同一棱角的剪应力互等,即剪应力 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ 或写作 $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ (当 $i \neq j$)。

从而 (σ_{ij}) 是一个二阶对称张量,只包含 6 个独立分量。

应力是内力,正应力受拉为正,受压为负。剪应力以对单元体产生顺时针力矩者为正。

3. 二维应力状态

一般情况下,物体的应力状态是三维的。如果与某一维有关的所有应力全为0(如 $\sigma_z=0, \tau_{xz}=\tau_{yz}=0$),或者与某一维有关的剪应变为0、而正应变为一定值($\sigma_z=C, \tau_{xz}=\tau_{yz}=0$),则应力状态可简化为 $x-y$ 平面内的二维问题。二维问题的应力状态可以用图1.3表示。

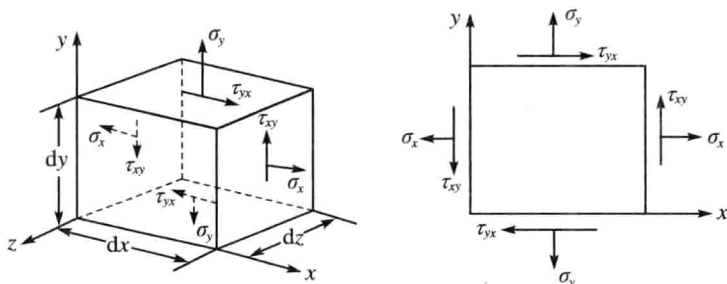


图 1.3 一点的二维应力状态

二维问题简化为求解 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 三个应力分量。

1.1.2 斜截面上的应力

前面讲过,在进行应力分析时,物体内的一点可以用一个微小正六面体来表示。就是说,只要知道了某一点的应力状态(即应力张量),就可以得到该点任何方向上应力的大小和方向。

假设在空间直角坐标系中,过该点的任意一个平面(如图1.4中的 ABC 斜截面),其方向由方向余弦(即平面法线 \mathbf{n} 与三个坐标轴夹角的余弦) n_1, n_2, n_3 来确定。这个斜截面上的应力 \mathbf{T} 在三个坐标轴上的投影为 T_1, T_2, T_3 , \mathbf{T} 还可以分解为垂直于该斜截面(ABC)上的正应力 σ_n 和平行于该平面的剪应力 τ 。

截面 ABC 与原正六面体的坐标平面形成一个四面体。设截面 ABC 的面积为1,则原正六面体上的坐标平面被截后 $\triangle AOB, \triangle BOC, \triangle COA$ 的面积分别为 n_1, n_2, n_3 ;由力在三个坐标轴 x_1, x_2, x_3 方向上的平衡条件, $\mathbf{T} = T_1 \mathbf{e}_1 + T_2 \mathbf{e}_2 + T_3 \mathbf{e}_3$; $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 是坐标轴 x_1, x_2, x_3 的基矢。由四面体在 x_1, x_2, x_3 的平衡条件,得到

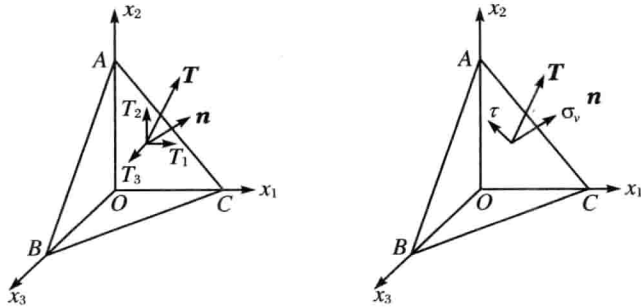


图 1.4 过一点斜截面上的应力

$$\begin{cases} T_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 \\ T_2 = \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3 \\ T_3 = \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3 \end{cases}$$

可简写为

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3)$$

这里的简写使用了 Einstein 求和约定, 即若在一个乘积表达式中, 某角标重复出现两次, 则表示要在该角标的取值范围内遍历求和。

例如:

$$a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (i = 1, 2, 3)$$

$y_i = a_{ij} x_j$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 表示一个线性方程组, 即

$$\begin{cases} y_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \\ y_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \\ \dots \\ y_m = a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \end{cases}$$

斜截面上的正应力与剪应力的大小为

$$\mathbf{T} = \sigma_v + \boldsymbol{\tau}$$

$$\sigma_v = \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = T_1 n_1 + T_2 n_2 + T_3 n_3 = T_i n_i$$

$$\tau = |\mathbf{T} - \sigma_v \mathbf{v}| = (|\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}| - |\sigma_v \cdot \sigma_v|)^{1/2}$$

对于二维问题, 其斜截面上的应力容易参照图 1.5 分析:

与 x 方向成 α 角的斜截面上的应力为

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{cases}$$

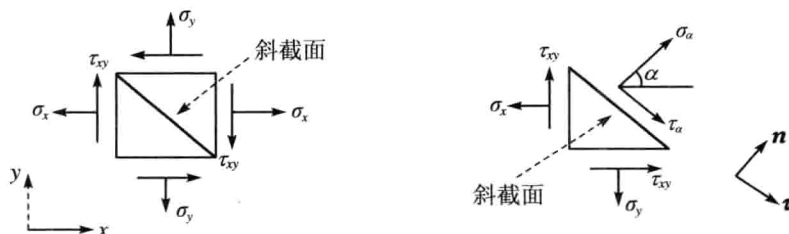


图 1.5 二维平面问题斜截面上的应力

上面第一式中的 $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ 移到左边, 与第二式平方相加后, 得到

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

上式在 $\sigma_\alpha - \tau_\alpha$ 坐标系中是一个关于 σ_α 和 τ_α 的圆的方程, 称为应力圆。其意义为: 在二维应力状态下, 如果知道了某点的应力状态 (σ_x, σ_y 和 τ_{xy}), 则该点任何方向上的正应力和剪应力都落在上述应力圆上, 从而可以利用应力圆容易地求出该点任意斜截面上的正应力和剪应力。

1.1.3 主应力和主平面

若某一截面上只有正应力而没有剪应力, 我们就把这个平面叫做主应力面。在主应力面上, $\tau = 0, \sigma_v = \sigma = T$ 为主应力。从而, 斜截面上的外力 T (见图 1.4) 在三个坐标轴上的分量为主应力在坐标轴上的投影。即

$$T_1 = \sigma \cdot n_1, \quad T_2 = \sigma \cdot n_2, \quad T_3 = \sigma \cdot n_3$$

即

$$T_i = \sigma \cdot n_i$$

代入方程

$$T_i = \sigma_{ij} \cdot n_j$$

有

$$\sigma \cdot n_i = \sigma_{ij} \cdot n_j$$

或

$$(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0$$

这里, δ_{ij} 为 Kronecker δ 函数

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\sigma_{11} - \sigma) n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 = 0 \\ \sigma_{21} n_1 + (\sigma_{22} - \sigma) n_2 + \sigma_{23} n_3 = 0 \\ \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + (\sigma_{33} - \sigma) n_3 = 0 \end{cases}$$

这是一个关于 n_1, n_2, n_3 的线性齐次方程组, 其有非零解的充分必要条件是: 系数行列式的值等于零, 即

$$\begin{vmatrix} (\sigma_{11} - \sigma) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & (\sigma_{22} - \sigma) & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & (\sigma_{33} - \sigma) \end{vmatrix} = 0$$

从而得到方程:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

在一般情况下, 由此方程可解出三个实数根, 即三个主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$; 主应力所在的面称为主平面。 n_1, n_2, n_3 分别是对应主平面法线的方向余弦。而且可以证明, 一般情况下三个主平面是互相垂直的, 三个主应力也是互相垂直的。这里 I_1, I_2, I_3 称为应力不变量。

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 = \frac{1}{2} [(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) + 2(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) - I_1^2] \\ I_3 = \det(\sigma_{ij}) \end{cases}$$

物体内的应力状态是由物体的性质、形状、受力状态和约束决定的, 与坐标系的选取无关, 但应力张量的数值依赖于坐标系的选取。如果坐标系发生变化(如旋转角度或用极坐标), 则应力张量就会发生变化。但是, I_1, I_2, I_3 与坐标系的选取无关, 或者说当坐标系发生变化的时候, 某一点的 I_1, I_2, I_3 的数值不变。这就是它们被称为应力不变量的原因。应力不变量也可写成

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{33} & \sigma_{31} \\ \sigma_{13} & \sigma_{11} \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$$

如果选择主应力方向为坐标轴 x_1, x_2, x_3 , 这时正六面体六个面上的剪应力都为 0, 则应力张量不变量可简化为

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \\ I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{cases}$$

若一点的三个主应力中 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, 则 σ_1 一定是过该点所有截面中正应力最大的, 而 σ_3 是所有截面中正应力最小的。受力物体中任意一点都有三个相互垂直的主应力和三个主应力面(图 1.6)。

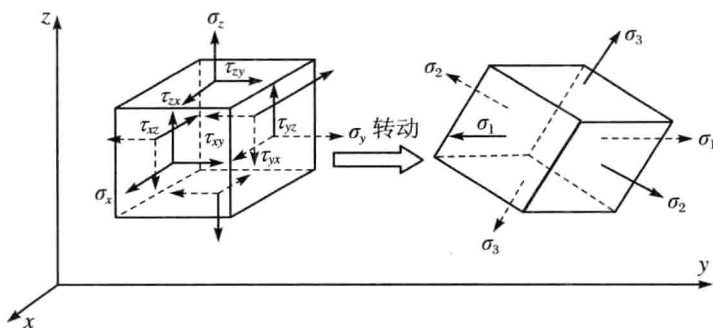


图 1.6 一点的三个主应力和主应力面示意图

可以证明, 物体中某一点的最大剪应力等于该点最大主应力和最小主应力差的一半, 即

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$$

1.1.4 一点的应变

物体发生形变, 就会产生应变。一点的应变包括两个方面: 其一是指过一点任意方向微小线段的单位长度的变化(伸长为正, 收缩为负); 其二是指过该点成直角的任何两线段角度的变化(减少为正, 增加为负)。前者叫做线应变, 后者叫做剪应变。

因为过一点可引无数条直线, 也可引出无数个直角, 对不同方向的直线和直

角,其长度或角度的变化也不同。一点的应变状态需要应变张量来进行描述。在三维直角坐标系 (x_1, x_2, x_3) 中,应变张量由9个独立分量组成,可写成

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

可以证明剪应变互等,即

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad (i \neq j)$$

从而上述 (ε_{ij}) 也是可用6个分量表示的二阶对称张量。

应变本质上是由物体发生形变而使线段上点产生位移。位移与应变可通过几何关系联系起来。

设一点的位移分量为 (u_1, u_2, u_3) 或 (U, V, W) ,则该点位移和应变的关系为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

$u_{i,j}$ 表示 u_i 对 x_j 的偏导数,这里就不推导了。

若在二维的情况下,

$$u_1 = U, \quad u_2 = V, \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_x, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_y, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{xy}$$

则

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)$$

应变与位移的关系是分析物体内部应力状态的重要关系式。

小结 物体受力后的应力张量与应变张量

应力张量

$$(\boldsymbol{\sigma}_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

应变张量

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$$

1.2 平衡微分方程

1.2.1 微单元的平衡微分方程

如果我们要考虑受力物体内部的应力从一点到另一点的变化,就必须建立微小单元体的平衡微分方程。图 1.7 给出了用一微小平行六面体表示的一点的应力分量和增量。

考虑上述微单元包括应力增量的静力平衡条件(包括力的平衡与力矩的平衡),就可以建立起该点的平衡微分方程。

1. 三个坐标轴方向力的平衡

如果我们将代表一点的微小六面体上面的各个应力和增量全部表示出来,然后在 x, y, z 方向上列出平衡方程,我们就可以得出一点的平衡微分方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \end{cases}$$

(1.1)

上面的偏微分方程组可简记为 $\sigma_{ij,j} = 0 (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3)$, 其中 $\sigma_{ij,j}$ 代表 σ_{ij} 对 x_j 的偏微分。

如果考虑分布于物体内的体力(典型的体力包括重力和惯性力),则以上三式还应分别加上体力分量 B_1, B_2, B_3 , 即可写成

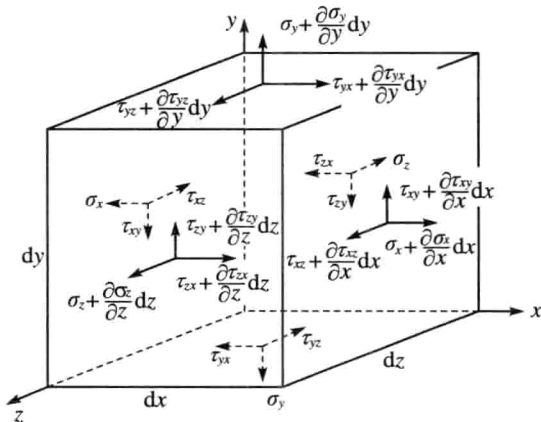


图 1.7 一点的应力分量与增量