材料力学
典型例题及难题详解

主编　胡益平

四川大学出版社

CAILIAO LIXUE

DIANXING LITI JI NANTI XIANGJIE

材料力学
典型例题及难题详解

主编 胡益平

编委 曾祥国 魏泳涛 熊渊博 陈华燕

四川大学出版社

责任编辑:毕　潜
责任校对:唐　飞
封面设计:墨创文化
责任印制:王　炜

图书在版编目(CIP)数据

材料力学典型例题及难题详解 / 胡益平主编. —成都: 四川大学出版社, 2013.10
ISBN 978-7-5614-7216-3

Ⅰ.①材…　Ⅱ.①胡…　Ⅲ.①材料力学-高等学校-题解　Ⅳ.①TB301-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 252403 号

书名　**材料力学典型例题及难题详解**

主　　编　胡益平
出　　版　四川大学出版社
地　　址　成都市一环路南一段 24 号 (610065)
发　　行　四川大学出版社
书　　号　ISBN 978-7-5614-7216-3
印　　刷　郫县犀浦印刷厂
成品尺寸　185 mm×260 mm
印　　张　22.75
字　　数　624 千字
版　　次　2014 年 1 月第 1 版
印　　次　2014 年 1 月第 1 次印刷
定　　价　50.00 元

◆读者邮购本书,请与本社发行科联系。
电话:(028)85408408/(028)85401670/
(028)85408023　邮政编码:610065
◆本社图书如有印装质量问题,请寄回出版社调换。
◆网址:http://www.scup.cn

前　　言

本书专门对材料力学中一些典型的、比较有难度以及综合性较强的题目进行了详细的解答，读者对象是正在学习材料力学课程和打算参加大学生力学竞赛的本科生，以及预备报考研究生的高年级学生。

本书各章首先是对该章知识点的一个小结，强调了该章的重点和难点，特别是一些方法和技巧的归纳有助于学生解决理论或实际方面的难题。其次，主要章节的例题分为选择题、填空题以及计算题三类，以便学生适应各种题型的解决方法。总之，本书的目的就是提高学生解决材料力学中难度和综合性都较强的问题的能力。

本书中引用的例题有出处的均在题目后面标明了出处，但仍有相当数量的例题无法或很难查到出处，在这里对这些题目的创作者表示感谢。另外，书中也有相当数量的例题是本书编写者自创的。

需要说明的是，本书所依据的材料力学理论体系是胡益平编写的《材料力学》教材(四川大学出版社，2011 年 1 月出版)，读者可对比参阅。

由于编者的水平有限以及某些计算上的失误，本书难免存在错误和不足之处，望广大同行和读者不吝指教。作者邮箱：huyiping999@163. com。

编　者

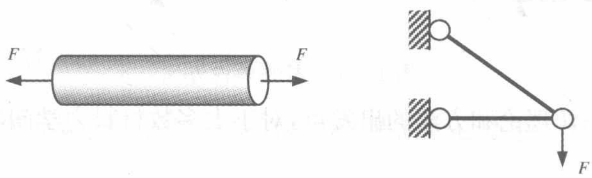
2013 年 12 月

目　　录

第1章　绪　　论

1.1　主要知识点

1. 工程构件可分为杆件、板壳以及实体等基本类型。材料力学主要研究杆件和杆件结构系统（见图1－1）在外力作用下的强度、刚度以及稳定性问题，以及在既安全又经济的条件下进行结构设计。

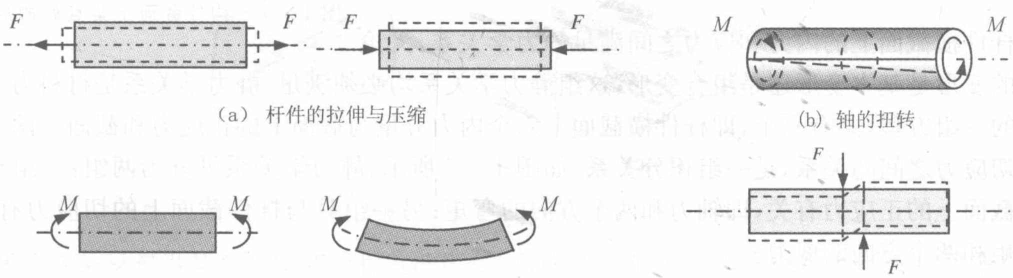


（a）杆件　　（b）杆件结构系统

图1－1　杆件与杆件结构系统

2. 材料力学研究的是理想化的材料，即满足连续、均匀和各向同性等假设，同时它只研究线弹性小变形的问题。

3. 杆件的变形分为拉伸与压缩、扭转、弯曲以及剪切等基本变形形式，如图1－2所示。由于由剪力引起的剪切变形很小且只影响局部杆件，因此不单独研究。杆件中如果存在两种或两种以上的基本变形形式，则称为组合变形，如图1－3所示。在小变形情况下，杆件各种基本变形之间不存在耦合效应。



（a）杆件的拉伸与压缩　　（b）轴的扭转

（c）梁的弯曲　　（d）杆件的剪切

图1－2　杆件的基本变形

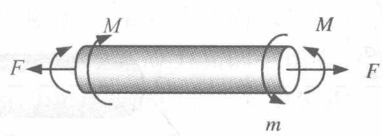


图1－3　杆件的组合变形

4. 内力概念：内力是杆件一部分对另一部分的作用力，在杆件分界面上内力是连续分布的力系，杆件的分界面在无特殊说明的情况下通常指的是杆件的横截面。杆件横截面上连续分布的内力在截面形心处合成的主矢 $\boldsymbol{R}$ 和主矩 $\boldsymbol{M}$ 的分量称为杆件横截面上的内力分量，即轴力

F_N、两个方向的剪力 F_{sy} 和 F_{sz}、扭矩 T 以及两个方向的弯矩 M_y 和 M_z，如图 1－4 所示。这些内力分量就是材料力学通常所说的内力，内力可以由截面法求得。

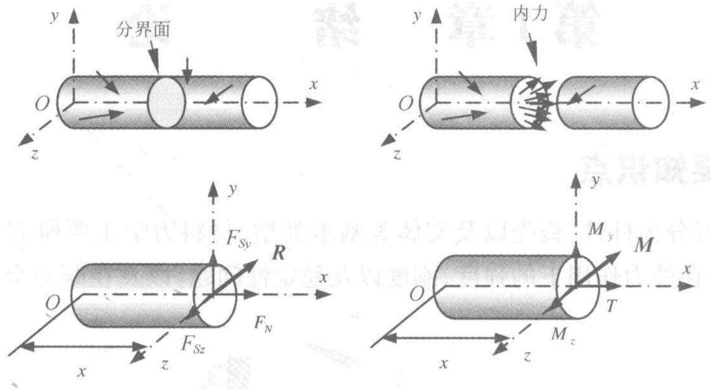


图 1－4　杆件的内力

内力是材料力学一切理论和方法的出发点，对于大多数材料力学问题，首先要求的就是其横截面上的内力。

5. 应力概念：一点处某个平面上单位面积上的内力称为该点处某平面上的全应力 p。全应力 p 在该平面法线方向的投影称为该平面上的正应力，用 σ 表示；在该平面内的投影称为该平面上的切应力，用 τ 表示，如图 1－5 所示。应力的单位是 $1\mathrm{Pa}=1\mathrm{N/m^2}$，$1\mathrm{MPa}=1\mathrm{N/mm^2}$ 或 $1\mathrm{GPa}=10^3\mathrm{MPa}$。正应力以拉应力为正，压应力为负；切应力的正负号将在第 8 章进行规定。

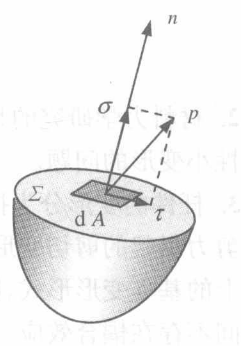


图 1－5　构件截面上某点处的应力

应力是度量材料强度和判别构件安全性的标志性物理量。

杆件横截面上的内力和应力之间满足静力学关系。无论杆件的变形是基本变形还是组合变形，这组静力学关系均必须满足。静力学关系是材料力学最基本的一组方程，共有六个，即杆件横截面上六个内力分量与截面上的正应力和截面上两个方向的切应力之间的关系，是一组积分关系，如图 1－6 所示。静力学关系可分为两组：一组只与杆件截面上的正应力有关，即轴力和两个方向的弯矩；另一组只与杆件截面上的切应力有关，即扭矩和两个方向的剪力。

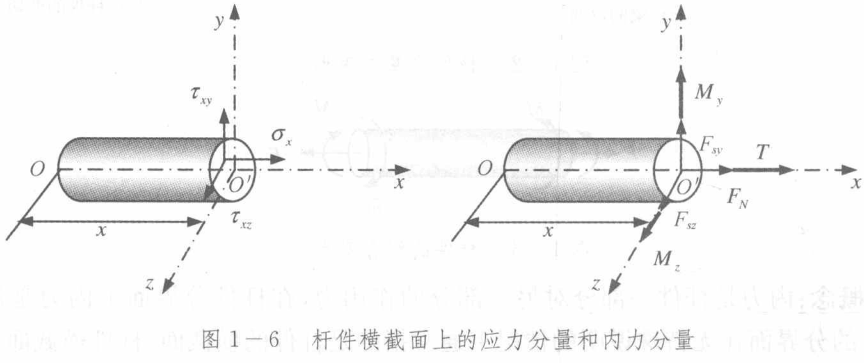


图 1－6　杆件横截面上的应力分量和内力分量

静力学关系：

$$
\begin{cases}
F_N(x)=\int_A \sigma_x(x,y,z)\mathrm{d}A \\
F_{sy}(x)=\int_A \tau_{xy}(x,y,z)\mathrm{d}A \\
F_{sz}(x)=\int_A \tau_{xz}(x,y,z)\mathrm{d}A \\
T(x)=\int_A [\tau_{xz}(x,y,z)y-\tau_{xy}(x,y,z)z]\mathrm{d}A \\
M_y(x)=\int_A \sigma_x(x,y,z)z\mathrm{d}A \\
M_z(x)=-\int_A \sigma_x(x,y,z)y\mathrm{d}A
\end{cases}
\tag{1-1}
$$

静力学关系实质上就是截面上连续分布的内力在截面形心处进行合成而得到的合内力各个分量。

6. 应变概念：一点处沿某个方向单位线段的伸长量称为该点处沿某个方向的正应变或线应变，用 ε_s 表示。一点处两个相互垂直方向的直角改变量称为这两个方向间的切应变或角应变，用 $\gamma_{\alpha\beta}$ 表示，如图1－7所示。正应变以拉应变为正，压应变为负；切应变以直角减小为正，增大为负。应变是无量纲量。

正应变：
$$\varepsilon_s=\frac{\Delta(\mathrm{d}s)}{\mathrm{d}s} \tag{1-2}$$

切应变：
$$\gamma_{\alpha\beta}=\gamma_\alpha+\gamma_\beta \tag{1-3}$$

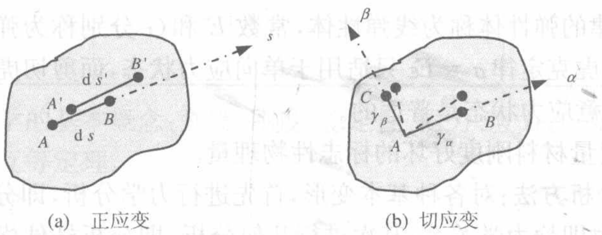


图1－7 构件的应变

线应变是材料沿某个方向变形程度的度量，角应变是某个直角间材料变形前后疏密程度的度量。应变是构件变形计算的基本几何量。

7. 单元体概念：用截面法从构件某点处截取的无限小正六面体称为该点的一个单元体，如图1－8所示。单元体的边长可视为零，单元体的面称为微分面，六个微分面可分为正向面和负向面两组，每个微分面上一般均有一个正应力和两个切应力作用，如图1－9所示。由单元体的平衡可证明单元体微分面上的切应力满足切应力互等定理：

$$\tau_{xy}=\tau_{yx},\quad \tau_{yz}=\tau_{zy},\quad \tau_{zx}=\tau_{xz} \tag{1-4}$$

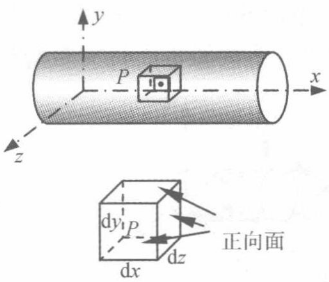


图 1－8　一点处的单元体

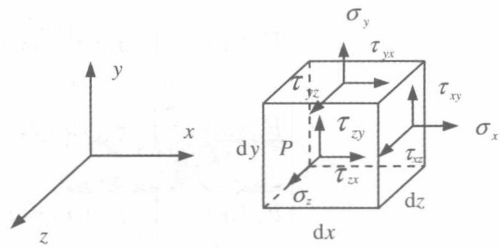
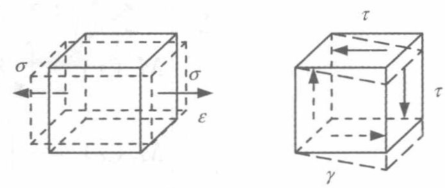


图 1－9　单元体微分面上的应力

单元体三个正向面或负向面上的应力实际上是考察点处三个相互垂直的平面上的应力。单元体微分面上只有一对正应力作用时称为单向应力状态，拉伸压缩杆件任意点均是单向应力状态；单元体微分面上只有唯一切应力作用时称为纯剪应力状态，扭转杆件任意点均为纯剪应力状态，如图 1－10 所示。单向以及纯剪应力状态统称为简单应力状态，其他情况称为复杂应力状态。



(a)单向应力状态　(b)纯剪应力状态

图 1－10　简单应力状态单元体的变形

8. 虎克定律：

在小变形条件下，单向应力状态的正应力 σ 和其相应的正应变 ε 之间满足：

$$\sigma = E\varepsilon \tag{1-5}$$

这一关系称为虎克定律；纯剪应力状态的切应力和其相应的切应变之间满足：

$$\tau = G\gamma \tag{1-6}$$

这一关系称为剪切虎克定律。虎克定律和剪切虎克定律统称为简单虎克定律，如图 1－10 所示。满足简单虎克定律的弹性体称为线弹性体，常数 E 和 G 分别称为弹性模量和剪切弹性模量。特别要注意的是，虎克定律 $\sigma = E\varepsilon$ 只适用于单向应力状态，而剪切虎克定律 $\tau = G\gamma$ 在线弹性小变形情况下对任意应力状态是普适的。

材料常数 E 是度量材料刚度好坏的标志性物理量。

9. 材料力学的分析方法：对各种基本变形，首先进行力学分析，即分析杆件横截面上内力和应力之间的关系，也即静力学关系；其次进行几何分析，即分析杆件横截面上各点之间应变的关系，也即应变规律或几何方程；最后进行物理分析，即分析杆件应力和应变之间的关系，从而由几何方程得到杆件横截面上应力的变化规律，将此代入静力学关系，即可得到杆件横截面上的应力和内力之间的显函数表达式，由变形规律还可得到杆件的变形与内力之间的表达式。因此，只要知道杆件的内力，即可计算杆件的应力和变形，从而计算杆件的强度和刚度。

10. 材料力学课程主线：分析杆件各种基本变形以及组合变形六个方面的问题，即内力、应力、强度、变形、刚度以及超静定问题。另外，材料力学课程还包括三个重要的专题，即压杆稳定、能量法以及动载荷问题，如图 1－11、表 1－1 所示。超静定问题是材料力学的一类特殊问题。

(1) 材料力学课程主线：

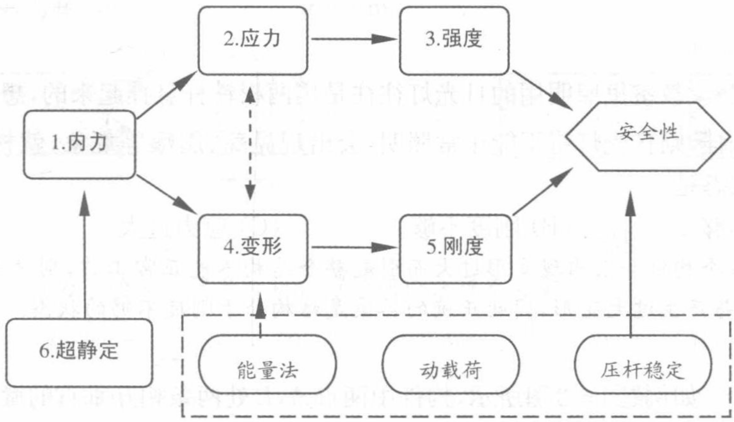


图1—11　材料力学课程的主线

(2) 材料力学课程主要内容：

表1—1　材料力学课程的主要内容

	内　力	应　力	强　度	变　形	刚　度	超静定
拉伸、压缩						
扭　转						
弯　曲						
组合变形						

重点：(1) 材料力学的基本概念：强度、刚度、稳定性、内力、应力、应变、单元体。

(2) 切应力互等定理。

(3) 虎克定律。

(4) 材料力学课程主线和主要内容。

难点：(1) 静力学关系：理论力学中平面分布力系的合成问题。

(2) 切应力互等定理。

1.2　例题详解

1.2.1　选择题

1.2.1.1　单选题

例题1—1　粉笔是由石灰做成的，很容易将其拉断，但相同形状和大小的钢杆却很难拉断，则相较而言，钢材比石灰的强度__________。

(A) 高　　(B) 低　　(C) 相同　　(D) 不能比较

解：材料强度的好坏需要将材料做成标准试件在拉力机上进行破坏实验才能确定。显然，题目

中粉笔和钢杆形状大小相同，因此越容易破坏的材料其强度越低。所以正确的答案是钢材比石灰的强度高。

故选：(A)

例题1－2 教室里照明用的日光灯往往是用两根铁杆悬挂起来的，想象如果将其改换成两根橡皮筋悬挂，则日光灯将不能正常照明，会出现晃荡、震颤等现象，就材料力学而言，此时结构所处的状态是________。

(A) 强度不够　　(B) 刚度不够　　(C) 应力过大　　(D) 应力过小

解：结构中某个构件如果出现变形过大而引起整个结构不能正常工作，则是刚度问题。橡皮筋在外力作用下极易产生过大变形，因此正确的答案是结构处于刚度不够的状态。

故选：(B)

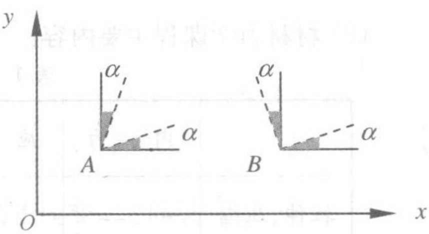
例题1－3 如例题1－3图所示，构件中两点A，B处两条相互垂直的微元线段在变形后分别如图(虚线)所示，则这两点的角应变分别为________。

(A)$\gamma_{xy}(A)=-2\alpha$，$\gamma_{xy}(B)=2\alpha$

(B)$\gamma_{xy}(A)=2\alpha$，$\gamma_{xy}(B)=2\alpha$

(C)$\gamma_{xy}(A)=-2\alpha$，$\gamma_{xy}(B)=0$

(D)$\gamma_{xy}(A)=2\alpha$，$\gamma_{xy}(B)=0$



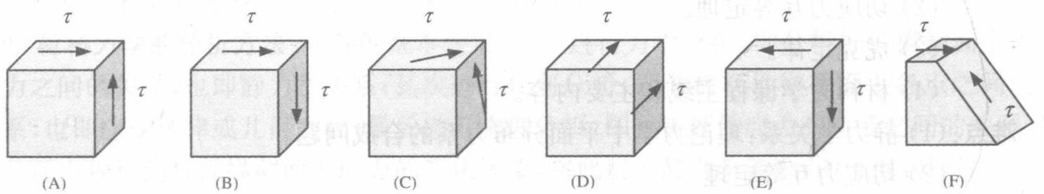
例题1－3图

解：切应变就是某点处某个直角在变形前后的改变量，直角减小为正，增大为负。如例题1－3图所示，A点在x，y两方向之间的直角在变形后改变量是2α，而且是减小，因此有：$\gamma_{xy}(A)=2\alpha$。而B点在x，y两方向之间的直角在变形后仍然是直角，则有：$\gamma_{xy}(B)=0$。

故选：(D)

1.2.1.2 多选题

例题1－4 构件中某点的单元体微分面上的切应力如例题1－4图所示，________情况是不可能存在的。



例题1－4图

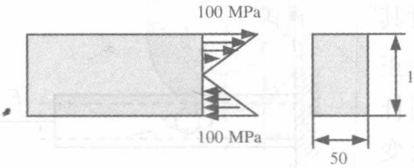
解：切应力互等定理有三个要点：① 两个切应力分别是两个不同的但相互垂直的平面上的切应力；② 两个切应力垂直于两个平面的交线；③ 两个切应力同时指向或同时离开两个相互垂直的平面的交线。根据切应力互等定理的三个要点可知：上列构件中某点的单元体微分面上的切应力不可能存在的情况是(B)，(C)，(D)，(F)；只有(A)，(E)是可能存在的。

故选：(B)，(C)，(D)，(F)

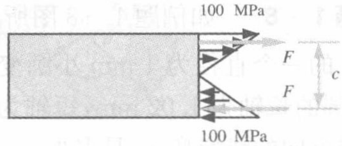
1.2.2 填空题

例题1－5 如例题1－5图(a)所示，某矩形截面杆件横截面上的正应力分布规律由上

至下是线性分布，而沿截面宽度方向是均匀分布，则杆件横截面上的轴力 F_N = ________ kN，弯矩 M = ________ kN·m。



例题 1－5 图(a)



例题 1－5 图(b)

解：平面上分布力系的合成问题对材料力学理论分析至关重要。

截面上的轴力为：$F_N = \int_A \sigma \mathrm{d}A = 50[\frac{1}{2} \times 50 \times 100 + \frac{1}{2} \times 50 \times (-100)] = 0$

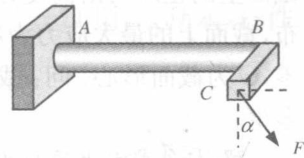
由于半截面上的正应力沿高度是三角形分布，合力作用点在离上缘三分之一截面半高处，如例题 1－5 图(b) 所示。

则截面上的弯矩为：

$$M = \int_A \sigma y \mathrm{d}A = Fc = 2[\frac{1}{2} \times 50 \times 100 \times (\frac{2}{3} \times 50)] \times 50 = 8.33 \times 10^6 \,\mathrm{N \cdot mm} = 8.33 \,\mathrm{kN \cdot m}$$

故填：第一空：0；第二空：8.33 kN·m

例题 1－6　如例题 1－6 图所示结构，当载荷 F 作用的角度为 $\alpha = 0°$ 时，杆件 AB 处于________变形状态；当 $0° < \alpha < 90°$ 时，杆件 AB 处于________变形状态；而当 $\alpha = 90°$ 时，杆件 AB 处于________变形状态。



例题 1－6 图

解：当 $\alpha = 0°$ 时，载荷 F 竖直向下作用，则 AB 杆处于弯曲和扭转组合变形状态。

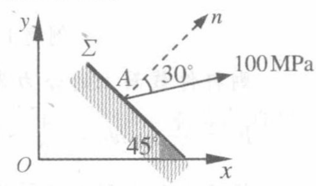
当 $0° < \alpha < 90°$ 时，载荷 F 如例题 1－6 图所示的倾斜向下作用，则 AB 杆处于拉伸、弯曲和扭转组合变形状态。

当 $\alpha = 90°$ 时，载荷 F 水平作用，则 AB 杆处于拉伸和弯曲变形状态。

特别注意：杆件由剪力引起的剪切变形一般忽略不计。

故填：第一空：弯扭组合变形；第二空：拉弯扭组合变形；第三空：拉弯组合变形

例题 1－7　如例题 1－7 图所示，A 点处平面 Σ 上的全应力矢量为 p = 100 MPa，则 A 点处平面 Σ 上的正应力 σ = ________，切应力 τ = ________；全应力矢量在 x 方向的投影 p_x = ________，在 y 方向的投影 p_y = ________。



例题 1－7 图

解：A 点处 Σ 平面上的正应力为：

$\sigma = p\cos 30° = 100 \times 0.866 = 86.6$ MPa

A 点处 Σ 平面上的切应力为：

$\tau = p\sin 30° = 100 \times 0.5 = 50$ MPa

全应力矢量在 x 方向的投影为：

$p_x = p\cos(60° - 45°) = p\cos 15° = 100 \times 0.966 = 96.6$ MPa

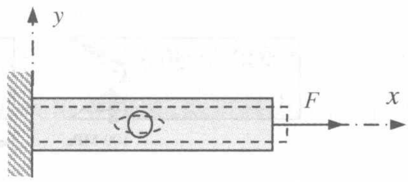
全应力矢量在 y 方向的投影为：

$p_y = p\sin(60° - 45°) = p\sin 15° = 100 \times 0.259 = 25.9$ MPa

故填：第一空：86.6 MPa；第二空：50 MPa；第三空：96.6 MPa；第四空：25.9 MPa

1.2.3 计算题

例题 1－8 如例题 1－8 图所示杆件，拉伸时其侧表面上的一个直径为 1 mm 小圆变形后成了一个正椭圆，椭圆的长轴为 1.02 mm，短轴为 0.995 mm，则杆件在轴线方向的线应变 ε_x 是多少？xy 方向间的切应变 γ_{xy} 是多少？材料的泊松比 ν 是多少？



例题 1－8 图

解：杆件在轴线方向的线应变为：

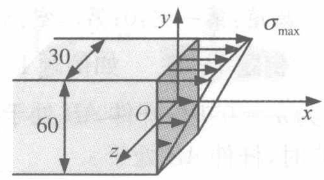
$$\varepsilon_x = \frac{\Delta(\mathrm{d}x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1.02-1}{1} = 0.02$$

杆件 xy 方向间的切应变为：$\gamma_{xy} = \Delta(\angle xOy) = 0$

杆件在 y 方向的线应变为：$\varepsilon_y = \dfrac{\Delta(\mathrm{d}y)}{\mathrm{d}y} = \dfrac{0.995-1}{1} = -0.005$

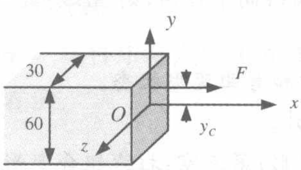
杆件材料的泊松比为：$\nu = -\dfrac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \dfrac{0.005}{0.02} = 0.25$

例题 1－9 如例题 1－9 图(a) 所示，矩形截面杆件横截面上的正应力沿高度方向线性分布，而沿宽度方向均匀分布，截面上的最大应力为 $\sigma_{\max} = 100$ MPa，截面的底边应力为零，O 为截面形心。问：截面上存在什么内力分量？其值是多少？

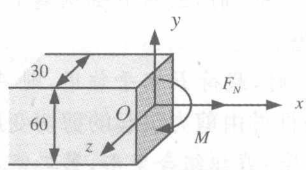


例题 1－9 图(a)

解：杆件截面上的应力沿宽度方向是均匀的，沿高度方向是三角形分布，则截面上连续分布的力系的合力作用点在 y 轴离截面上缘距离为三分之一截面高度的地方，如例题 1－9 图(b) 所示。



例题 1－9 图(b)



例题 1－9 图(c)

则杆件截面上的合力为：

$$F = \frac{1}{2}\sigma_{\max} hb = \frac{1}{2} \times 100 \times 60 \times 30 = 90 \times 10^3\,\mathrm{N} = 90\,\mathrm{kN}$$

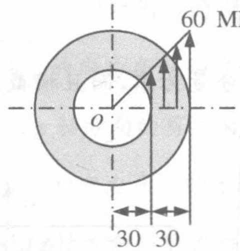
将其向截面形心处简化，如例题 1－9 图(c) 所示，有：

$$F_N = F = 90\,\mathrm{kN}$$

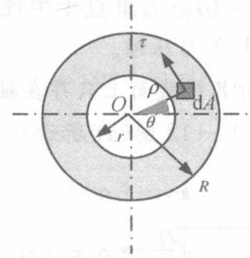
$$M = Fy_C = 90 \times 10^3 \times \left(\frac{60}{2} - \frac{60}{3}\right) = 9 \times 10^5\,\mathrm{N \cdot mm} = 0.9\,\mathrm{kN \cdot m}$$

所以，杆件截面上存在两种内力，即轴力 $F_N = 90$ kN 和弯矩 $M = 0.9$ kN · m。

例题 1－10 如例题 1－10 图(a) 所示，某空心圆轴横截面上的切应力沿半径方向的分布规律呈线性分布，求横截面上的扭矩。



例题 1－10 图(a)



例题 1－10 图(b)

解:在外半径 $R=60$ mm 处的切应力为:$\tau_1=60$ MPa

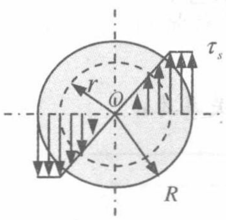
在内半径 $r=30$ mm 处的切应力为:$\tau_2=30$ MPa

切应力沿半径方向的分布规律为:$\tau=\dfrac{\rho}{R}\tau_1$,$\rho$是截面上的动点到圆心的距离,如例题 1－10 图(b) 所示,根据力系合成原理,则截面上的扭矩为:

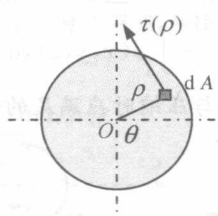
$$T=\int_A \tau\rho\mathrm{d}A=2\pi\int_r^R\frac{\tau_1\rho}{R}\cdot\rho\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\frac{2\pi}{R}\tau_1\cdot\frac{R^4-r^4}{4}=\frac{\pi}{2R}\tau_1(R^4-r^4)$$

$$=\frac{3.14}{2\times 60}\times 60\times(60^4-30^4)=\frac{3.14}{2}\times 30^4\times 15=19\times 10^6\,\mathrm{N\cdot mm}=19\,\mathrm{kN\cdot m}$$

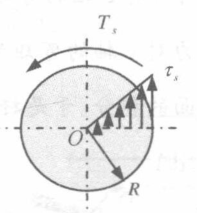
例题 1－11　圆形截面杆件横截面上的切应力分布规律如例题 1－11 图(a) 所示,杆件材料是理想弹塑性材料,τ_s 是材料的剪切屈服应力,求截面上的扭矩。



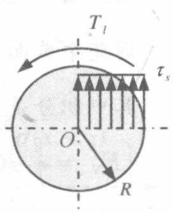
例题 1－11 图(a)



例题 1－11 图(b)



例题 1－11 图(c)



例题 1－11 图(d)

解:如例题 1－11 图(b) 所示,采用极坐标(ρ,θ),假设微元面积 dA 处的切应力为 $\tau(\rho,\theta)$,则:

$$\tau(\rho,\theta)=\begin{cases}\dfrac{\tau_s}{r}\rho, & 0\leqslant\rho\leqslant r\\ \tau_s, & r\leqslant\rho\leqslant R\end{cases}$$

由于 $\tau(\rho,\theta)$ 只与 ρ 有关,记 $\tau(\rho,\theta)=\tau(\rho)$,则根据面分布力系的合成原理,杆件横截面上的扭矩为:

$$T=\int_A\tau(\rho)\rho\mathrm{d}A=\int_0^{2\pi}\int_0^R\tau(\rho)\rho\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=2\pi\int_0^R\tau(\rho)\rho^2\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\left(\int_0^r\frac{\tau_s}{r}\rho^3\mathrm{d}\rho+\int_r^R\tau_s\rho^2\mathrm{d}\rho\right)=\frac{2\pi}{3}\left(R^3-\frac{r^3}{4}\right)\tau_s$$

如果 $r=R$,则 $T_s=\dfrac{\pi R^3}{2}\tau_s$ 称为屈服扭矩,如例题 1－11 图(c) 所示。

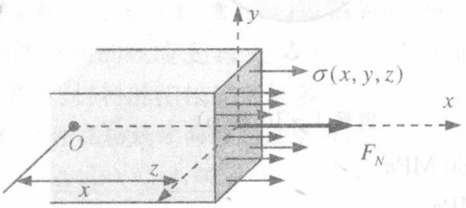
如果 $r=0$,则 $T_l=\dfrac{2\pi R^3}{3}\tau_s$ 称为极限扭矩,如例题 1－11 图(d) 所示。

例题 1－12　推导杆件拉伸与压缩、圆轴扭转以及梁纯弯曲等几种基本变形情况下应满足的静力学关系(即横截面上的各内力分量与截面上应力之间的关系)。扭转时只考虑圆轴且

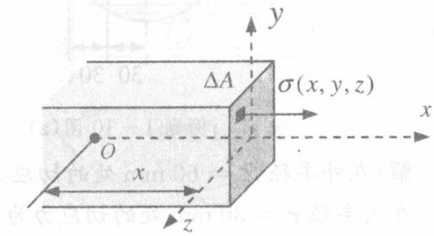
圆轴截面上任意点的切应力垂直于半径直线。

解:(1) 杆件的拉伸与压缩。

杆件拉伸压缩时其横截面上只存在轴力,其他的内力分量为零,而且横截面上只有正应力而没有切应力,如例题 1－12 图(a) 所示。



例题 1－12 图(a)



例题 1－12 图(b)

假设距离轴线坐标原点为 x 的截面上正应力的分布规律为 $\sigma(x,y,z)$,则如例题 1－12 图(b) 所示,在截面上点 (y,z) 处微元面积 ΔA 上沿 x 方向的内力为:$\Delta F = \sigma(x,y,z)\Delta A$

则整个截面上的内力的合力即轴力为:$F_N = \int_A \sigma(x,y,z)\mathrm{d}A$

微元面积 ΔA 上的内力对 y 轴的弯矩为:$\Delta M_y = \Delta F y = \sigma(x,y,z)y\Delta A$

则整个截面上的内力对 y 轴的弯矩为:$M_y = \int_A \sigma(x,y,z)z\mathrm{d}A = 0$

微元面积 ΔA 上的内力对 z 轴的弯矩为:$\Delta M_z = -\Delta F z = -\sigma(x,y,z)z\Delta A$

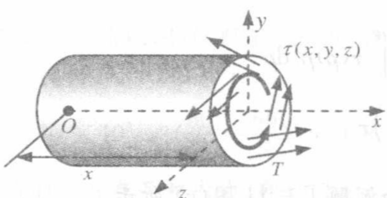
则整个截面上的内力对 z 轴的弯矩为:$M_z = -\int_A \sigma(x,y,z)y\mathrm{d}A = 0$

其中积分是对横截面的积分。于是杆件拉伸与压缩时应满足的静力学关系为:

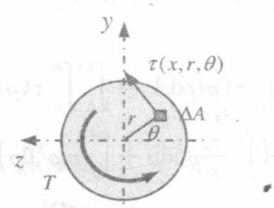
$$\begin{cases} F_N = \int_A \sigma(x,y,z)\mathrm{d}A \\ M_y = \int_A \sigma(x,y,z)z\mathrm{d}A = 0 \\ M_z = -\int_A \sigma(x,y,z)y\mathrm{d}A = 0 \end{cases}$$

(2) 圆轴的扭转。

圆轴扭转时其横截面上只存在扭矩,其他的内力分量为零,而且横截面上只有切应力而没有正应力,如例题 1－12 图(c) 所示。



例题 1－12 图(c)



例题 1－12 图(d)

由于只考虑圆轴,采用极坐标,如例题 1－12 图(d) 所示。假设距离轴线坐标原点为 x 的截面上切应力的分布规律为 $\tau(x,r,\theta)$,又由于切应力垂直于半径直线,则在截面上点 (r,θ) 处微元面积 ΔA 上的内力为:$\Delta F = \tau(x,r,\theta)\Delta A$,对圆心的力矩为:$\Delta T = \Delta F r = \tau(x,r,\theta)r\Delta A$