蔡星会 许鹏 姬国勋 著

磁流体无网格方法及应用

CILIUTI WUWANGGE

FANGFA JI YINGYONG

国防工業出版社
National Defense Industry Press

磁流体无网格方法及应用

蔡星会　许　鹏　姬国勋　著

国防工業出版社
·北京·

内 容 简 介

本书以加权残量法为基础，以管道中磁流体流动为应用背景，系统介绍了典型无网格方法，主要包括无网格局部径向基函数法、局部彼得洛夫迦辽金法、无网格迦辽金法、无网格径向基点插值法及无网格配点法等在磁流体流动中的应用，进行了大量数值仿真实验，分析了影响算法精度的典型参数，并对部分无网格算法进行了改进。

本书可供从事能源动力、反应堆热工水力，力学及数值计算研究等方面的科学技术人员及相关专业的高年级本科生、研究生和教师参考使用。

图书在版编目（CIP）数据

磁流体无网格方法及应用/蔡星会，许鹏，姬国勋著. —北京：国防工业出版社，2014.3

ISBN 978-7-118-09137-3

Ⅰ. ①磁…　Ⅱ. ①蔡…　②许…　③姬…　Ⅲ. ①磁流体力学　Ⅳ. ①0361.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 034234 号

※

国防工業出版社 出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路 23 号　邮政编码 100048）

国防工业出版社印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 880×1230　1/32　印张 5　字数 168 千字

2014 年 3 月第 1 版第 1 次印刷　印数 1—2000 册　定价 48.00 元

国防书店：（010）88540777　发行邮购：（010）88540776

发行传真：（010）88540755　发行业务：（010）88540717

前言

随着计算机技术的快速发展，基于计算机的数值仿真计算日益成为解决实际复杂工程问题及科学研究的重要手段，而针对如何提高数值算法计算的应用范围、计算精度及开拓新算法等研究也成为数值仿真计算领域的重要方向。

经过数十年的研究和发展，网格类算法如有限元法、有限容积法和有限差分法在数值仿真计算领域取得了很大的成就，在研究基础上也开发出了比较成熟的商业软件，如ABQUS、ANSYS、COSMOS、FLUENT、CFX、Msc/SuperForge 等，然而网格类算法自身具有难以克服的弱点，如对网格质量的依赖性很强，网格的形状、数量等因素直接影响着计算结果，且需要耗费大量时间和精力来产生网格，对于计算区域形状不规则的情况，网格的生成更加困难等。近年来无网格算法不依靠网格建立近似函数，不需要网格或只需要背景网格，克服了网格类方法的缺陷，在超大变形、网格畸变等问题中具有明显优势，目前已成为国内外数值计算领域的研究热点。

目前，提出的无网格算法有10多种，多数算法在固体力学、流体力学及结构力学等方面得到了应用和探索。总的来看，无网格算法的研究还处于探索和拓展阶段，虽然学者们在杂志和会议上发表了一些研究论文，但关于无网格方法的书籍还比较少见。目前，国内外介绍无网格方法书籍有以下几本。例如，2002 年美国 SN Atluri 教授出版的《The Meshless Local Petrov-Galerkin（MLPG）Method》，系统地介绍了无网格局部 Petrov-Galerkin 法的原理及应用；同年新加坡刘桂荣教授出版了《Mesh Free Method：Moving Beyond the Finite Element Method》，着重介绍了弱式无网格法及应用；2003 年刘桂荣出版的《Smooth Particle Hyrynamics-a meshfree particle method》重点介绍了

SPH 方法的理论及其应用；2004 年 SN Atluri 出版了《The meshless method（MLPG）for domain & BIE discretizations》；同年国内张雄教授出版了《无网格法》；2005 年刘桂荣出版了《An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming》；同年国内刘更教授出版了《无网格法及其应用》。上述书籍多以固体力学和流体力学为应用背景，本书借鉴了现有无网格数值分析方法的研究成果，结合自己数年的研究工作，主要介绍无网格数值计算方法在磁流体流动方面的应用。

本书应用电磁学和流体力学理论建立了磁流体流动的控制方程组和边界条件，采用合适的无量纲数对控制方程组进行了无量纲化，无量纲控制方程组中速度场和感应磁场相互耦合，故方程组的求解难度要大于一般流体力学方程组，无量纲控制方程组中的无量纲数——哈特曼数，类似一般流体力学方程中的对流项，其大小对计算结果影响较大。一般地，外加磁场强度越大，哈特曼数（Ha）越大，数值计算越容易发散，误差也就越大。作者分别应用无网格局部径向基函数法、局部彼得洛夫—迦辽金（Petrov-Galerkin）法、无网格迦辽金（Galerkin）法、无网格径向基点插值法及无网格配点法对无量纲磁流体力学方程组进行了离散，并进行了系统的计算，探索无网格算法计算磁流体流动的应用，并对无网格算法中的典型参数进行了研究，得出了在一定条件下提高无网格算法精度的最优参数值。

本书共 9 章。第 1 章主要介绍了液态金属在强磁场条件下的应用背景、研究现状和发展趋势，并对无网格算法的发展和应用进行了综述。第 2 章主要介绍了几种典型的加权残量法。第 3 章介绍了几种典型的无网格插值方法。第 4 章根据电磁学麦克斯韦方程组和流体力学基本方程组，建立了耦合速度场和感应磁场的二维磁流体流动控制方程组，并对其进行了无量纲化，得到二维无量纲磁流体力学方程组。第 5 章详细介绍了无网格局部径向基点插值方法，应用局部径向基点插值方法对稳定的磁流体力学控制方程进行了离散，计算了管道导电和绝缘情况下的磁流体流动，对无网格局部径向基点插值方法在磁流体流动方面的应用进行了详细分析，探索了典型参数变化对计算精度的影响。第 6 章系统研究了局部 Petrov-Galerkin 无网格法在充分发展地磁流体流动方面的应用，探索了各种参数对提高计算精度的影响及

该算法能稳定、准确计算磁流体流动的最大哈特曼数。第7章详细介绍了无网格Galerkin算法，并应用该方法对中等哈特曼数条件下时变和稳定的MHD流动控制方程进行了离散和求解。通过将磁流体流动控制方程进行变形，将速度场和感应磁场进行了解耦，并将稳定格式引入无网格Galerkin算法，通过计算得到了强磁场条件下绝缘管道内的磁流体速度场和感应磁场分布。第8章通过对无网格径向基点插值法进行改进，提出了二阶无网格径向基点插值法，并应用该方法对绝缘和导电管道内稳定的磁流体流动控制方程进行了求解，通过合理地引入边界条件，针对绝缘管道局部破损情况进行了计算和分析，并对不同方向外加磁场条件下的磁流体流动进行了数值仿真。第9章在介绍无网格配点法的基础上提出了迎风格式无网格配点法，并将速度场和感应磁场进行了解耦，计算了强磁场条件下绝缘管道内的磁流体流动。

本书的内容来自作者数年在无网格方法研究方面的成果，在无网格方法研究过程中，得到了西安交通大学苏光辉教授的大力指导与支持，在此表示衷心的感谢！本书在完成过程中得到了第二炮兵工程大学科研部的大力支持与资助，在此表示感谢！

由于作者水平所限，书中不妥之处敬请读者指正。

作　者

2013年12月

目　录

第1章 绪 论

自然界中无论是机械、地理、电力、化学、电子还是生物领域的大部分现象都可用代数、微分或积分方程的形式加以描述。人们总是希望获得这些方程的精确解。然而对于实际问题，只有少数情况下可得到精确解，对大多数复杂问题只能通过数值计算方法获得近似解，当今社会的工程师及科技工作者必须熟悉与其相关技术问题的数值计算方法。科研人员在设计、论证、效能评估等工程、技术问题时也常采用数值计算方法或数值计算工具进行研究，因此对数值计算方法进行研究具有重要的意义。随着计算机技术的快速发展，基于计算机的数值仿真计算技术也越来越成为解决实际复杂工程问题及科学研究问题的重要手段。数值仿真计算主要是将复杂的实际问题转化为简单的、离散形式的数学表达式，然后通过计算机求解，最终根据分析者的需要揭示出问题的本质。只要数值方法使用得当，有效地获得一个复杂问题的数值近似解是完全可能的。

1.1 磁流体流动的研究现状

自20世纪50年代起，学者就开始了关于聚变条件下液态金属磁流体动力学（Magneto Hydrodynamics，MHD）效应对于流动传热及压降等方面影响的研究，到目前为止已经取得多方面的成果，但聚变条件下的MHD效应对热工水力的影响机理仍未完全理解。总的来看，聚变包层内磁流体流动与传热方面主要有以下几个问题：①聚变包层的磁流体受到温度场、压力场和电磁场等多种因素的影响，需要对纳维尔-斯托克斯（Navier-Stokes）方程、麦克斯韦（Maxwell）方程、传热与传质方程耦合求解；②聚变包层内磁场强度高达 4～5T（特斯

拉），哈特曼数 $Ha=10^3\sim10^5$，流场受到强烈影响；③流道内表面的涂层可能会产生微细裂纹，这对磁流体的流动、传热和传质等会有显著的影响。

由于磁流体流动受到多种因素的影响，对其进行理论分析十分困难，学者在忽略了一些因素后，对一些简单的磁流体流动进行了相关的理论研究，得出了一些结论。Hartmann[1]对两无限大平板之间磁流体流动进行了分析，Shercliff[2, 3]对绝缘固壁内充分发展的磁流体流动进行了研究，Hunt[4]分别对哈特曼层和侧边界层导电的磁流体进行了研究，并分别得出了相应的解析公式。

美国、日本、欧洲及俄罗斯在关于聚变条件下的磁流体效应研究方面做了大量工作，在分析开放或封闭管道内的 MHD 压降、湍流及传热等问题上取得了一定进步。美国学者对均匀磁场条件下液态金属的自然对流情况进行了试验研究[5]。美国学者[6, 7]和俄罗斯的[8]学者于 20 世纪 90 年代中期开始对绝缘覆层破损或裂纹导致的磁流体流动热工水力特性变化进行了试验和数值仿真研究，认为破损位置、大小等情况对磁流体流动压降有较大的影响。日本学者[9, 10]对液态金属循环的绝缘管道破损情况对磁流体的流动影响进行了试验研究，还对强磁场中环形管道内的压降进行了测量，对压降计算公式进行了修正。欧洲的[11]学者为研究氦冷锂铅包层内冷却剂的流动情况，设计了试验装置，对聚变条件下液态金属在突扩管道中的流动进行了试验研究，将试验结果与数值模拟结果进行了对比。

我国关于聚变条件下液态金属的流动研究始于 20 世纪 90 年代，为研究磁流体动力学效应和结构材料等与液态金属的兼容性，核工业西南物理研究院于 20 世纪 90 年代建造了液态金属试验回路[12]，这也是我国第一台用于聚变堆磁流体动力学效应和材料兼容性研究的大型试验装置。后来，中国科学院等离子体物理研究所也根据研究需要建立了锂铅试验回路[13]，拟开展相关的研究。最近，核工业西南物理研究院在新的液态金属回路上开展了液态金属包层试验[14]，获得了带通道插件管道的 MHD 效应的试验结果，并发展出一种计算 FCI 管道 MHD 效应的方法。

但由于试验研究耗费较大，且受影响因素较多，因此数值模拟在

液态金属流动换热研究中仍具有不可替代的作用。中国科学院等离子体物理研究所[15]采用大型商用计算流体动力学软件 FLUENT 和自主开发的 MHD 用户子程序针对 ITER 中国液态锂铅试验包层模块内的液态金属流动 MHD 效应进行了数值模拟，得出了一些有益的结果。核工业西南物理研究院采用简化理论[16]对带流道插件磁流体效应进行了研究。但总的来说，我国在聚变条件下液态金属流动 MHD 效应方面的数值模拟研究还比较少，具有自主产权的数值模拟软件的开发也还处于初始阶段。因此，系统地开展液态金属 MHD 效应的计算方法研究,准确计算聚变堆设计和应用中常见液态金属包层的关键问题，具有十分重要的现实意义。

1.2 无网格算法的应用及进展

目前，MHD 效应的计算方法研究主要包括两类，即网格类算法和无网格类算法。网格类计算方法包括有限差分法[17-22]、有限元法[23-25]、有限容积法[26]等，在 MHD 流动计算方面应用比较多，但此类算法对网格质量的依赖性很强，网格的形状、数量等因素直接影响着计算结果，且需要耗费大量时间和精力来产生网格，对于计算区域形状不规则的情况，网格的生成更加困难。无网格类方法不依靠网格建立近似函数，不需要网格或只需要背景网格，克服了网格类方法的缺陷，在超大变形、网格畸变等问题中具有明显优势，目前已成为国内外数值计算领域的研究热点。

目前，提出和应用的无网格方法有 10 多种，多数方法已经在固体力学、流体力学及结构力学等领域得到了应用和探索。

光滑粒子流体动力学（Smoothed Particle Hydrodynamics，SPH）方法是 Lucy[27]和 Gingold 等人于 1977 年提出的一种无网格算法，并将之应用于研究无限边界的天体物理问题，如星体爆炸和尘埃云等。随后人们对 SPH 算法进行了系统的研究和改进，拓展了该算法的应用领域，并提高了精度。通过应用 SPH 算法，Benz[28]、Monaghan[29]对星体碰撞、Faber[30]对中子星和黑洞的融合、Senz[31]对白矮星的爆炸等多种天体物理问题进行了研究。Benz[32]应用 SPH 算法对从直径为几厘

米到数百公里的陨石块和冰体撞击地面产生的灾难进行了数值仿真，得出了重要的结论。除了天体物理研究外，SPH 算法还在材料强度[33]、激波传播[34]、多相流[35]、可压缩流体流动[36]、金属成型[37]及冲击问题[38]等领域得到应用。Morris[39]还应用 SPH 算法对磁流体动力学的若干问题进行了研究。近年来国内学者也对 SPH 算法进行了研究和应用。龙丽平等人[40]应用 SPH 算法从基本 SPH 近似出发，修正了模拟固体力学中大变形弹塑性碰撞的 SPH 方法，模拟了杆弹的塑性碰撞。宋顺成[41]等利用 SPH 算法对战斗部侵彻混凝土后爆炸的情况进行了数值分析。黄雨[42]等应用 SPH 算法进行了土体大变形弹塑性数值模拟。目前，SPH 算法已经被引入 LS-DYNA-3D、AUTODYN-2D 等商业计算软件中，在计算高速碰撞、弹塑性变形、爆炸冲击等方面具有重要应用。

有限点法（Finite Point Method，FPM）是 Ońate[43]于 1996 年提出的、采用移动最小二乘法构成形函数、用配点法离散求解方程的一种无网格方法。FPM 在流体动力学领域[44, 45]、结构力学[46]、金属冶炼[47]和气囊膨胀仿真[48]等方面得到了应用。国内应用该方法对带有源参数的一维热传导反问题[49]、柔性板的大挠度分析[50]等问题进行了计算。

物质点法[51]（Material Point Method，MPM）是与 SPH 方法类似的一种方法，它是由质点网格法[52]（Particle-in-cell Method）扩展而来的。其主要特点是将连续体离散成一组携带了密度、位置、速度和应力等信息有质量的点，这些点可以在固定或自由布置的背景网格中，依靠所受的内力或外力运动。MPM 兼有欧拉法和拉格朗日法的优点，对大变形[53]、强间断[54]和材料的非线性问题[55]等方面具有一定的优点。MPM 还被应用在冲击与接触[56, 57]、颗粒材料的变形与相互作用[58]等方面。国内也有学者对 MPM 进行了研究和应用拓展，并应用于爆炸焊接[59]、高速碰撞[60]、滑移爆轰[61]等方面。

Nayroles[62]等人于 1992 年对 Garerkin 法进行改进，引入移动最小二乘法，产生了扩散单元法（Diffuse Element Method，DEM）。该方法被成功地应用于电磁场计算[63]和磁阻电机优化[64]方面。1994 年，美国 Northwestern University 的学者 Belytschko 等人[65]对 DEM 法进行了改进，采用拉格朗日乘子法施加本质边界条件，并保留形函数导数中

Nayroles 忽略的项，提出了无网格伽辽金法（Element-Free Galerkin Method，EFGM）。EFGM 在动态裂纹扩展[65, 66]方面的数值仿真计算表明该方法不需要像有限元法那样进行网格重分便可获得较好的结果。经过测试[65]，EFGM 的收敛性要优于有限元法，且能适应不规则节点的分布。EFGM 已被成功地用于求解流体力学问题[67]、板壳结构[68]、流体动力学[69]、薄板振动分析[70]、电磁场问题[71]、地下水的流动[72]等方面。Sérgio Luí s Lopes Verardi[73]等人应用 EFGM 法研究了矩形管中充分发展的、哈特曼数低于 1000 的磁流体流动。国内的张林、欧阳洁等人[74]对 EFGM 方法进行了改进，得到了二阶的 EFGM 方法（Two-Level Element-Free Galerkin Method，TLEFGM），并计算了哈特曼数小于 10000 的稳定磁流体流动，但文献中只对绝缘和部分绝缘部分完全导电的矩形管道进行了数值计算，并未针对一般导电管道中的流动进行计算。Liu GR 和 Wang JG[75]基于 Galerkin 法提出了点插值法（Point Interpolation Method，PIM），类似于 EFGM，PIM 仅利用局部域中任意分布的节点构造形函数，也需要全局背景网格进行积分，PIM 的形函数具有 Kronecker δ 函数性质，便于施加本质边界条件，但其多项式力矩矩阵可能奇异。Liu GR 和 Zhang JG[76]提出了径向基点插值法（Radial Point Interpolation Method，RPIM）以克服奇异性问题。RPIM 已经成功地应用于固体力学、板壳结构[77]及非线性[78]等问题。

Atluri 和 Zhu[79]于 1998 年提出了一种无网格局部 Petrov-Galerkin（Meshless Local Petrov-Galerkin Method，MLPG）方法，该算法完全消除了网格，基于移动最小二乘法构造近似场函数，积分域为一局部子域。经过改进算法，学者将 MLPG 法引入到三维弹性静力学[80, 81]、动力学[82]、高速碰撞和穿孔[83]、对流扩散[84]、裂纹尖端的应力场分析[85]及弹塑性变形[86]、固体的自由和强迫振动[87]、薄板屈曲[88]等问题的应用。Mehdi Dehghan[89]应用 MLPG 法计算了矩形导电管道中哈特曼数小于 50 的情况下，不稳定磁流体流动的速度场和感应磁场的分布。国内也对 MLPG 法进行了研究和拓展，并把它用于分析厚板弯曲[90]、板壳的弹塑性大变形[91]、不规则区域的热传导[92]、功能梯度材料的力学分析[93]等问题。

GR Liu[94, 95]等应用局部 Petrov-Galerkin 的思想形成了局部点插值法（Local Point Interpolation Method，LPIM）和局部径向基点插值法（Local Radial Point Interpolation Method，LRPIM）。LPIM 采用多项式基函数，形成了具有 Kronecker δ 函数性质的多项式形函数，可以像有限元法那样直接施加本质边界条件，但该方法的插值力矩矩阵在计算中可能会发生奇异，需要使用矩阵三角化算法[96]。LRPIM 采用径向基函数作为其形函数，同样具有 Kronecker δ 函数性质，且由于径向基函数具有良好的插值稳定性，使得 LRPIM 可以很好地适应任意分布的节点域。LRPIM 在固体振动分析[97]、涡电流分析[98]、二维压电结构分析[99]、功能梯度材料分析[100]、时域电磁场分析[101]等方面得到了很好的应用。国内学者将 LRPIM 应用于模拟裂纹尖端的应力场[102]、厚板弯曲静力[103]和动力学分析[104, 105]等问题。

再生核粒子法（Reproducing Kernel Particle Method，RKPM）是由 Liu WK 等人[106]于 1995 年提出的一种全局弱式无网格方法，通过增加一个修正函数，保持了 SPH 方法的优点。与 DEM 和 EFGM 相比，RKPM 具有更高的计算效率[106]。RKPM 已被广泛地应用于流体力学[106]、结构动力学[107]、材料的非线性大变形[108]和电磁场问题[109]。

著名的力学家 Atluri 采用边界元法的思想，提出局部边界积分法[110]（Local Boundary Integral Equation Method，LBIEM），求解了拉普拉斯（Laplace）方程和泊松（Passion）方程。LBIE 法在非均匀固体热传导分析[111]、弹性动力学[112]、线性或非线性边界值问题[113]、瞬态热传导问题[114]、功能梯度材料瞬态热传导[115]和切变裂纹的动力学分析[116]等问题上得到了应用。Mehdi Dehghan[117]应用 LBIEM 对初始速度为 0、哈特曼数小于 40 的矩形和圆形管道中的磁流体流动情况进行了模拟和分析。国内学者也对 LBIEM 进行了研究和分析，并将其应用于求解势问题[118]、薄板问题[119]和二维弹性问题[120]等。

Kansa[121, 122]于 1990 年将径向基函数引入配点技术，形成了无网格配点法，并对双曲线形、椭圆形和抛物线形的方程进行了求解。无网格配点法（Meshfree Collocation Method，MCM）以某种配点的形式在节点处对偏微分方程进行强式离散，不需要进行数值积分，算法简洁，是一种真正的无网格方法。学者们对其进行了深入的研究和改进，

并将其应用于求解二维不可压缩流动的旋涡问题[123]、地下水流动问题[124]、弹性和裂纹问题[125]、非线性问题[126]、对流扩散问题[127]等。国内学者应用无网格配点法对轴对称分布载荷的圆形大挠度板的应力分布[128]、大挠度板壳的弹塑性问题[129]、拱坝地震动水压力[130]等问题进行了分析。

总的来看，无网格法的研究和应用还处在探索和拓展阶段，它们多应用于普通流体力学、流体动力学、固体力学、结构力学等领域。近年来，随着人们对磁场条件下磁流体流动研究的深入，一些无网格法也被引入磁流体领域，对磁流体的流动问题进行研究和分析。对一些重要的无网格方法进行研究，探索其在磁流体流动中的应用具有重要意义。

1.3 无网格算法定义及分类

刘桂荣[131]给出了无网格法的定义：无网格法是建立在整个问题域的系统代数方程，不需要利用预定义的网格信息进行域离散的方法。即无网格法利用一组散布在问题域中以及域边界上的节点表示该问题域及其边界。散布的节点之间并没有网格相连接，即不需要任何事先定义的节点连接信息用于构造场变量未知函数的插值或近似表达式。一般来说，对无网格法的最低要求是不需要利用定义的网格对场变量进行插值或近似的。理想的无网格法在求解任意形状的、由偏微分方程和边界条件决定的问题时，其整个求解过程均不需要网格。

一般来说，无网格法按照公式的导出方法可分为三类：基于强式的无网格法；基于弱式的无网格法；基于弱式和强式相结合的无网格法。

直接针对原始的常微分方程或偏微分方程进行求解，称为强式。能获得强式系统方程的精确解当然是理想的，但遗憾的是这对于许多实际工程问题是极难办到的，因此经常采用基于强式的数值方法去获得问题的近似解。

基于强式的无网格算法已有很长的发展历史，任意网格有限差分法或广义有限差分法、无网格配点法、有限点法等均为典型的基于强