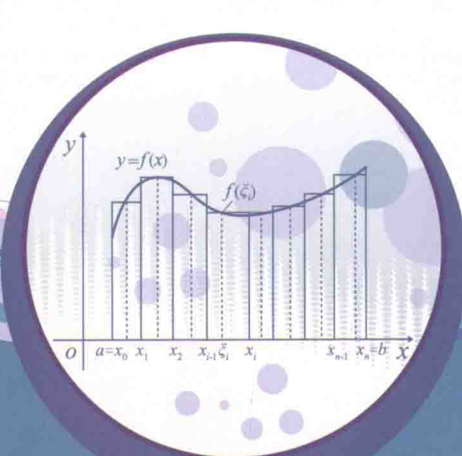
21世纪高职高专规划教材

华腾教育®
HUATENG

高等数学简明教程

光　峰◎主编



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

21 世纪高职高专规划教材

高等数学简明教程

主　编　光　峰
副主编　刘建宇　姚秋妹

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内 容 简 介

本教材在保证科学性和系统性的基础上，注重概念、定理的阐述，减少论证过程，力求简洁、通俗，符合学生的学习心理，方便学生对高等数学的学习、理解和应用。全书主要内容包括：函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理及导数的应用，不定积分，定积分及其应用等。

本书可作为高职高专院校非数学专业的数学基础课程教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学简明教程/光峰主编.—北京：北京邮电大学出版社，2012.5

ISBN 978-7-5635-2980-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①光… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 067536 号

书　　名：高等数学简明教程
主　　编：光　峰
责任编辑：任肖琳
出版发行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号(邮编：100876)
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京振兴源印务有限公司
开　　本：787 mm×960 mm　1/16
印　　张：10.5
字　　数：200 千字
版　　次：2012 年 5 月第 1 版　2012 年 5 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-2980-3　　　　定　价：22.00 元

出版说明

高职高专教育作为我国高等教育的重要组成部分，承担着培养高素质技术、技能型人才的重任。近年来，在国家和社会的支持下，我国的高职高专教育取得了不小的成就，但随着我国经济的腾飞，高技能人才的缺乏越来越成为影响我国经济进一步快速健康发展的瓶颈。这一现状对于我国高职高专教育的改革和发展而言，既是挑战，更是机遇。

要加快高职高专教育改革和发展的步伐，就必须对课程体系和教学模式等问题进行探索。在这个过程中，教材的建设与改革无疑起着至关重要的基础性作用，高质量的教材是培养高素质人才的保证。高职高专教材作为体现高职高专教育特色的知识载体和教学的基本工具，直接关系到高职高专教育能否为社会培养并输送符合要求的高技能人才。

为促进高职高专教育的发展，加强教材建设，教育部在《关于全面提高高等职业教育教学质量的若干意见》中，提出了“重点建设好3 000种左右国家规划教材”的建议和要求，并对高职高专教材的修订提出了一定的标准。为了顺应当前我国高职高专教育的发展潮流，推动高职高专教材的建设，我们精心组织了一批具有丰富教学和科研经验的人员成立了编审委员会。

编审委员会依据教育部制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，调研了百余所具有代表性的高等职业技术学院和高等专科学校，广泛而深入地了解了高职高专的专业和课程设置，系统地研究了课程的体系结构，同时充分汲取各院校在探索培养应用型人才方面取得的成功经验，并在教材出版的各个环节设置专业的审定人员进行严格审查，从而确保了整套教材“突出行业需求，突出职业的核心能力”的特色。

本套教材的编写遵循以下原则：

(1) 成立教材编审委员会，由编审委员会进行教材的规划与评审。

(2) 按照人才培养方案以及教学大纲的需要，严格遵循高职高专院校各学科的专业规范，同时最大程度地体现高职高专教育的特点及时代发展的要求。因此，本套教材非常注重培养学生的实践技能，力避传统教材“全而深”的教学模式，将“教、学、做”有机地融为一体，在教给学生知识的同时，强化了对学生实际

操作能力的培养。

(3) 教材的定位更加强调“以就业为导向”,因此也更为科学。教育部对我国的高职高专教育提出了“以应用为目的,以必需、够用为度”的原则。根据这一原则,本套教材在编写过程中,力求从实际应用的需要出发,尽量减少枯燥、实用性不强的理论灌输,充分体现出“以行业为向导,以能力为本,以学生为中心”的风格,从而使本套教材更具实用性和前瞻性,与就业市场结合也更为紧密。

(4) 采用“以案例导入教学”的编写模式。本套教材力图突破陈旧的教育理念,在讲解的过程中,援引大量鲜明实用的案例进行分析,紧密结合实际,以达到编写实训教材的目标。这些精心设计的案例不但可以方便教师授课,同时又可以启发学生思考,加快对学生实践能力的培养,改革人才的培养模式。

本套教材涵盖了公共基础课系列、财经管理系列、物流管理系列、电子商务系列、计算机系列、电子信息系列、机械系列、汽车系列和化学化工系列的主要课程。

对于教材出版及使用过程中遇到的各种问题,欢迎您通过电子邮件及时与我们取得联系(联系方式详见“教师服务登记表”)。同时,我们希望有更多经验丰富的教师加入到我们的行列当中,编写出更多符合高职高专教学需要的高质量教材,为我国的高职高专教育做出积极的贡献。

编审委员会

前　言

高等数学课程是培养学生计算、逻辑推理、抽象思维和空间想象以及应用知识能力必不可少的一门课程，是高职高专各专业的一门重要公共基础课程。本教材是根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，结合高职高专院校在培养技术应用型人才方面的教学特点编写而成的。

在编写过程中，我们综合吸收了大量优质教材的特点，密切结合当前高职高专教学改革的实际，在保证科学性的基础上，注重讲清概念，减少论证，力求简洁、通俗，符合学生的学习心理，方便学生对高等数学的学习、理解和应用。本教材主要具有以下特点。

(1)注重各专业培养目标对数学基础知识的需求和学生可持续发展的需要。根据不同专业的需要与不同生源的情况选择与整合数学知识。恰当把握教学内容的深度与广度，适度保持数学自身的系统性与逻辑性，以适合于高等职业院校学生的实际数学水平。

(2)考虑学习对象的状况及特点，在讲述基本公式、概念和定理的过程中，注意其几何图形的直观阐述；用实例引入抽象概念的讲解；例题的讲解清晰明了，并总结了不同类型题目的解题思路；对学生容易出错的地方，给出了“注意”予以提醒。在理论阐述和习题编排中，有意识地培养学生的数学思维和数学修养。不过分追求复杂的计算和理论上的严密论证，加强与实际应用联系较多的基础知识、基本方法、基本技能的训练。

(3)在每章开始都用简短语言提出了本章知识点，使学生一开始就明确各章的学习内容和主要目标。书中的例题、习题的类型和数量配置合理。每节后配有练习题，每章后配有复习题 A 组(基础层次)和 B 组(提高层次)，以便学生及时检测学习效果和归纳学习内容。

另外，本教材中带有“*”的内容，读者可根据实际需要选学。

本教材由光峰副教授任主编，刘建宇、姚秋妹任副主编。具体编写分工如下：第一章及附录由光峰编写，第二章由田宇编写，第三章由王家宇编写，第四章由刘建宇编写，第五章由姚秋妹编写。

由于编者水平有限，衷心地希望广大读者对书中的不足之处给予批评与指正。

编　者

目　录

第一章　函数、极限与连续

函数是高等数学研究的主要对象，是高等数学中最重要的概念之一；极限是高等数学中研究问题的基本方法，而函数的连续则是研究的条件. 本章在复习函数基本知识的基础上，着重介绍函数的极限和函数的连续性等基本概念、性质及运算法则.

第一节　函　　数

在自然界、社会经济现象及工程技术中都存在着许许多多不同的变量，并且它们之间存在着某种联系，这里研究的函数即是对这种量与量之间依存关系的描述.

一、函数的概念

引例 1　设圆的面积为 S，半径为 r，则这两个变量间的相互依存关系由公式

$$S = \pi r^2$$

确定.

分析　当半径 r 在区间 $(0, +\infty)$ 内任意取定一个数值时，根据上述公式，变量 S 都有唯一确定的值和它对应.

引例 2　某厂每天最多生产某种产品 2 000 件，设备和管理费用等固定成本为 10 000 元，每生产一件产品，成本增加 50 元，则每天的生产成本 C 与日产量 x 之间的对应关系由下式

$$C = 10\,000 + 50x$$

确定.

分析　当日产量 x 在集合 $\{0, 1, 2, \cdots, 2\,000\}$ 内任取一值时，根据上式，成本 C 都有唯一确定的值和它对应.

以上两例表明，在一个问题中往往同时有几个变量在变化着，这几个变量并不是孤立地在变，而是直接或间接地相互联系又相互制约的. 它们之间这种相互依赖的关系刻画了客观世界中事物变化的内在规律，这种规律用数学进行描述就是函数关系.

定义 1　设 x, y 是两个变量，D 是给定的非空数集，如果变量 x 在 D 内任取一

个确定的数值时，变量 y 按照一定的法则 f 都有唯一确定的数值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的**函数**，记为

$$y = f(x), x \in D,$$

其中变量 x 称为**自变量**，变量 y 称为**因变量**（或函数），数集 D 称为函数的**定义域**，f 称为函数的**对应法则**.

当 x 取确定数值 $x_0 \in D$ 时，通过法则 f，函数有唯一确定的值 y_0 与之相对应，称 y_0 为函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的**函数值**，记为

$$y_0 = y\Big|_{x=x_0} = f(x_0).$$

由全体函数值构成的集合称为函数的**值域**，记为 M，即 $M = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$.

由函数的定义可以看出，定义域和对应法则是确定函数的两个必不可少的要素，也就是说，如果两个函数的对应法则和定义域都相同，那么这两个函数就是相同的函数.

例 1 函数 $y = x + 1$ 与函数 $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ 是否表示同一函数？

解 否，它们表示两个不同的函数. 前者的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，后者的定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. 因为定义域不同，所以函数不同.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的，如引例 1 中，函数 $S = \pi r^2$ 的定义域为 $D = (0, +\infty)$；引例 2 中，函数 $C = 10\,000 + 50x$ 的定义域为 $D = \{0, 1, 2, \cdots, 2\,000\}$. 但在数学上作一般性研究时，对于只给出表达式而没有说明实际背景的函数，规定：函数的定义域是使函数表达式有意义的自变量的取值范围. 一般考虑以下几个方面：

(1) 分式函数的分母不能为零；

(2) 偶次根式的被开方式必须大于等于零；

(3) 对数函数的真数必须大于零；

(4) 三角函数与反三角函数要符合其定义；

(5) 如果函数表达式中含有上述几种函数，则应取各部分定义域的交集.

例 2 求下列函数的定义域.

(1) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$； (2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x}} + \ln(x + 1)$.

解 (1) 由 $x^2 - 1 \neq 0$，得 $x \neq \pm 1$，所以函数 $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ 的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

(2) 因为 $\begin{cases} 1 - x > 0, \\ x + 1 > 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x < 1, \\ x > -1, \end{cases}$ 所以函数的定义域为 $(-1, 1)$.

在函数的定义中，对定义域 D 内的每一个 x 值，对应的函数值 y 总是唯一的，这样定义的函数称为**单值函数**. 如果给定一个对应法则，按这个法则，对定义域 D 内的每一个 x 值，总有确定的 y 值与之对应，但这个 y 不总是唯一的，称这种法则确定了一个**多值函数**. 例如，设变量 x 和 y 之间的对应法则由方程 $x^2+y^2=R^2$ 给出. 显然，对每个 $x\in[-R,R]$，由方程 $x^2+y^2=R^2$ 可确定出对应的 y 值，当 $x=R$ 或 $-R$ 时，对应 $y=0$ 一个值；当 x 取 $(-R,R)$ 内任一值时，对应的 y 有两个值. 所以这个方程确定了一个多值函数.

多值函数是单值函数的复杂表现，只要把单值函数研究透彻了，多值函数的问题就迎刃而解了. 所以本书主要讨论单值函数，今后如不加声明，函数均指单值函数.

二、函数的性质

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义(区间 I 为函数 $f(x)$ 的整个定义域或其定义域的一部分)，则函数一般具有下列几种特性.

1. 有界性

定义 2　如果存在正数 M，使对任意的 $x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**有界**，否则称 $f(x)$ 在区间 I 上**无界**.

例如，$y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，因为 $|\sin x|\leqslant 1$ 对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都成立；而函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-1,1)$ 上无界，因为不存在正数 M，使得 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 对于 $(0,1)$ 上的一切 x 都成立，如图 1-1 所示.

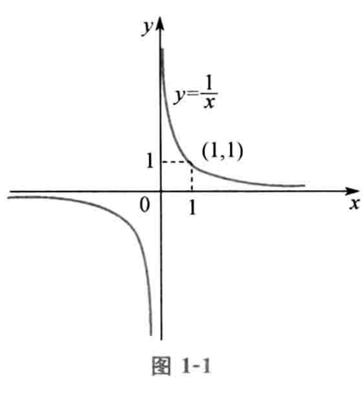


图 1-1

2. 单调性

定义 3　若对任意的 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$)，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**(或**单调减少**). 区间 I 称为**单调增**

区间(或**单调减区间**);单调增加函数和单调减少函数统称为**单调函数**;单调增区间和单调减区间统称为**单调区间**.

例如,$y = x^2$ 在$[0, +\infty)$ 内单调增加,在$(-\infty, 0]$ 内单调减少. 又如,$y = x^3$ 在$(-\infty, +\infty)$ 内单调增加.

3. 奇偶性

定义 4 设区间 I 关于原点对称,若对任意的 $x \in I$,都有 $f(-x) = f(x)$,则称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的**偶函数**;若对任意的 $x \in I$,都有 $f(-x) = -f(x)$,则称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的**奇函数**;若函数既不是奇函数也不是偶函数,则称为**非奇非偶函数**.

例如,$y = x^2$ 与 $y = \cos x$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上是偶函数,$y = x^3$ 与 $y = \sin x$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上是奇函数,$y = x + 1 + \cos x$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上是非奇非偶函数.

4. 周期性

定义 5 如果存在不为零的实数 T,使得对于任意的 $x \in I, x + T \in I$,都有 $f(x+T) = f(x)$,则称函数 $y = f(x)$ 是**周期函数**,T 是 $y = f(x)$ 的一个**周期**. 通常所说的周期函数的周期是指它的**最小正周期**.

例如,$y = \cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数;$y = \tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

三、反函数

在研究两个变量之间的函数关系时,可根据问题的实际需要选定其中一个变量作为自变量,另一个变量为函数.

例如,在商品销售中,已知某种商品的价格为 $p(p > 0)$,设其销售量为 x,销售收入为 y. 当已知销售量 x 时,根据关系式

$$y = px$$

可求得销售收入 y,这里 y 是 x 的函数;反之,若已知销售收入 y,求对应的销售量 x 时,根据 $y = px$ 可解得关系式

$$x = \frac{y}{p},$$

则给定 y 值,可求得对应的 x 值,这时 y 是自变量,x 是因变量,x 是 y 的函数,称 $x = \frac{y}{p}$ 为 $y = px$ 的反函数.

定义 6 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D,值域为 M. 如果对于 M 中的每个数 y,在 D 中都有唯一确定的数 x 与之对应,且使 $y = f(x)$ 成立,则确定了一个以 y 为自

变量，x 为因变量的函数，称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记为 $x=f^{-1}(y)$，其定义域为 M，值域为 D.

由于习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此将反函数中 x 与 y 互换位置，即记为 $y=f^{-1}(x)$，$x\in M$.

相对于反函数 $y=f^{-1}(x)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**. 把直接函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形画在同一坐标平面上，这两个图形关于直线 $y=x$ 对称，如图 1-2 所示.

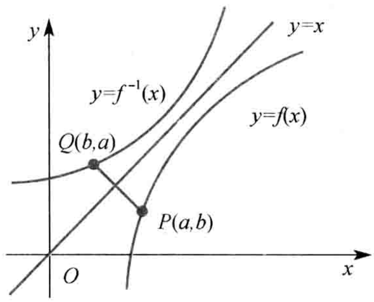


图 1-2

求反函数的一般步骤是：先由 $y=f(x)$ 解出 x，得 $x=\varphi(y)$，看它是否能成为函数；如果它是函数，再将函数 $x=\varphi(y)$ 中的 x,y 分别换为 y,x，即得 $y=f(x)$ 的反函数 $y=\varphi(x)$.

例 3　求函数 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 的反函数.

解　由 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 解得 $x=y^3-1$. 当 y 在 $(-\infty,+\infty)$ 内任取一值时，有唯一确定的 x 值与之对应，所以它是一个函数. 将 x,y 分别换为 y,x，得

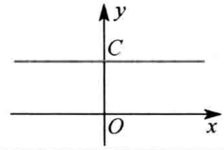
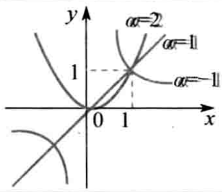
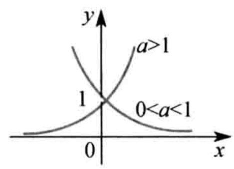
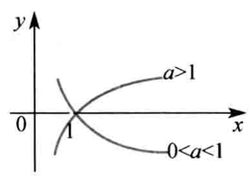
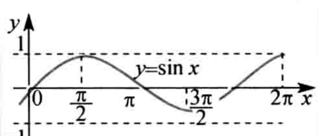
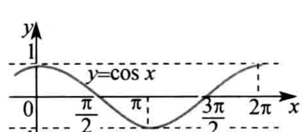
$$y=x^3-1,$$

即函数 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 的反函数为 $y=x^3-1$.

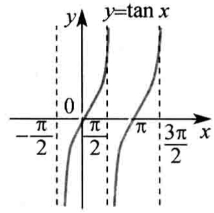
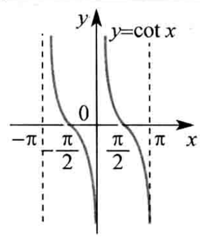
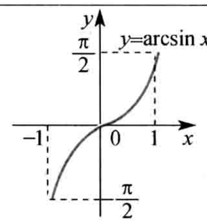
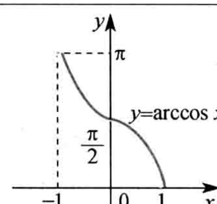
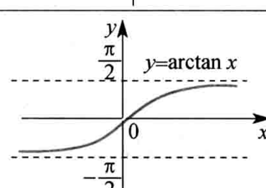
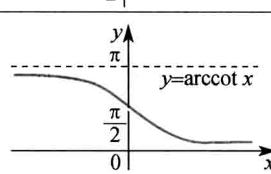
四、基本初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为**基本初等函数**. 为后面学习方便起见，现将这六类基本初等函数的表达式、定义域、值域、图形、性质等列表表示出来（见表 1-1）.

表 1-1

函数	定义域和值域	图形	性质
常数函数 $y=C$ (C 为常数)	$x\in(-\infty,+\infty)$		1. 有界; 2. 偶函数.
幂函数 $y=x^{\alpha}$ (α 为实数)	定义域由 α 的取值决定		1. 图形均过点(1,1); 2. 在第一象限内,当 $\alpha>0$ 时,单调增加;当 $\alpha<0$ 时,单调减少.
指数函数 $y=a^{x}$ ($a>0$,且 $a\neq1$, a 为常数)	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		1. 图形均过点(0,1); 2. 图形均在 x 轴上方; 3. 当 $0<a<1$ 时,单调减少,当 $a>1$ 时,单调增加.
对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$,且 $a\neq1$, a 为常数)	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		1. 图形均过点(1,0); 2. 图形在 y 轴右侧; 3. 当 $0<a<1$ 时,单调减少,当 $a>1$ 时,单调增加.
三角函数 正弦函数 $y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		1. 图形均过原点; 2. 奇函数; 3. 有界; 4. 周期为 2π,在 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ 内单调增加,在 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$ 内单调减少($k\in\mathbf{Z}$).
三角函数 余弦函数 $y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		1. 偶函数; 2. 有界; 3. 周期为 2π,在 $[2k\pi-\pi,2k\pi]$ 内单调增加,在 $[2k\pi,2k\pi+\pi]$ 内单调减少($k\in\mathbf{Z}$).

续表

函数		定义域和值域	图形	性质
三角函数	正切函数 $y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		1. 奇函数； 2. 无界； 3. 周期为 π，在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加 $(k\in\mathbf{Z})$.
	余切函数 $y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		1. 奇函数； 2. 无界； 3. 周期为 π，在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$.
反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		1. 图形过原点； 2. 奇函数； 3. 有界； 4. 单调增加.
	反余弦函数 $y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		1. 有界； 2. 单调减少.
	反正切函数 $y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		1. 图形过原点； 2. 奇函数； 3. 有界； 4. 单调增加.
	反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		1. 有界； 2. 单调减少.

五、复合函数

事物与事物的关系，通常是相互关联、错综复杂的．例如，某水库的水位是因为时间的变化而改变的，而水库的蓄水量又是由水库的水位决定的．因此，水库的蓄水量与时间之间也发生着联动关系．这种相互连带关系抽象为数学的概念，就是复合函数．

定义 7 设 $y=f(u)$，其中 $u=\varphi(x)$，且函数 $u=\varphi(x)$ 的值域包含在函数 $y=f(u)$ 的定义域内，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，其中 u 称为**中间变量**．

例如，$y=u^2, u=\sin x$ 可复合成 $y=\sin^2 x$．

复合函数还可以有多个中间变量，如 $y=\mathrm{e}^u, u=\sqrt{v}, v=x+1$ 复合成函数 $y=\mathrm{e}^{\sqrt{x+1}}$，这里 u, v 都是中间变量．

注意 并不是任意两个函数都能构成复合函数．例如，$y=\sqrt{1-u^2}$ 和 $u=x^2+2$ 就不能构成复合函数．因为对函数 $y=\sqrt{1-u^2}$ 而言，必须要求变量 $u\in[-1,1]$，而 $u=x^2+2\geqslant 2$，所以对任何 x 的值，y 都得不到确定的对应值．

利用复合函数不仅能将若干个简单的函数复合成一个函数，还可以把一个较复杂的函数分解成几个简单的函数，这对于今后掌握微积分的运算是很重要的．

例 4 将下列复合函数进行分解．

(1) $y=\ln\cos x$； (2) $y=\sqrt[3]{\sin x}$； (3) $y=3^{\arccos(3x+2)}$．

解 (1) $y=\ln\cos x$ 是由 $y=\ln u, u=\cos x$ 复合而成的．

(2) $y=\sqrt[3]{\sin x}$ 是由 $y=\sqrt[3]{u}, u=\sin x$ 复合而成的．

(3) $y=3^{\arccos(3x+2)}$ 是由 $y=3^u, u=\arccos v, v=3x+2$ 复合而成的．

六、初等函数与分段函数

定义 8 由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成并用一个式子表示的函数，称为**初等函数**．

例如，$y=\ln\cos x, y=\dfrac{x(x+\sqrt{x^2+1})}{x-1}, y=\cos^2 x+2$ 等都是初等函数．

定义 9 在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子表示的函数，称为**分段函数**．

分段函数仍旧是一个函数，而不是几个函数，分段函数的定义域是各段函数定义域的并集．

例如，符号函数 $\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 就是一个分段函数，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

例 5　设 $f(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x\leqslant 0,\\ 1-x, & 0<x\leqslant 1,\\ 1, & 1<x<3,\end{cases}$ 求 $f(0),f\left(\frac{1}{2}\right),f(2)$ 及函数的定义域.

解　$f(0)=2^0=1,f\left(\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},f(2)=1$，函数的定义域为 $(-1,3)$.

分段函数一般不是初等函数，如函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ 不能用一个式子表示. 但少数例外，如绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ 是初等函数.

习题 1-1

1. 下列各组函数是否是相同的函数？

(1) $y=\sin x$ 与 $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$；　(2) $y=|x|$ 与 $u=\sqrt{v^2}$；

(3) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$；　(4) $y=1$ 与 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{5}{x^2+2}$；　(2) $y=\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\ln(4-x)$；

(3) $y=\begin{cases}x^2, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ \sqrt{2-x}, & 0<x<2.\end{cases}$

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x+1, & -1<x<0,\\ 0, & 0\leqslant x<2,\end{cases}$ 求 $f\left(-\frac{\pi}{4}\right),f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

4. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=3x^2-x^6$；　(2) $y=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$；

(3) $y=\mathrm{e}^{-x^2}+x$；　(4) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$.

5. 求下列函数的反函数.

(1) $y=2x-3$；　(2) $y=\ln(x-1)+1$.

6. $f(x)=(x+1)^2,g(x)=\mathrm{e}^x$，求 $f[g(x)],g[f(x)]$.