权威 实用 经典

2015 人大考研

2015 考研数学冲刺训练200题（数学三）

主编 / 胡金德 谭泽光

- 精细分类——严格按照大纲细分专题，选编习题覆盖大纲所有考点
- 命题导航——针对每一专题，通过近10年的真题分析，全面揭示命题趋势
- 经典真题——以经典真题为例，深化考生对每一知识点命题难度、频度等特点的认知
- 冲刺训练——选取5～10道与真题难度相近的习题，精讲精练，突破难点，赢取高分

中国人民大学出版社

2015
考研数学
冲刺训练200题（数学三）

主编　胡金德　谭泽光

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

2015考研数学冲刺训练200题. 数学三/胡金德,谭泽光主编. 一北京:中国人民大学出版社,2014.3
ISBN 978-7-300-18668-9

Ⅰ.①2… Ⅱ.①胡… ②谭… Ⅲ.①高等数学一研究生一入学考试一习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第316890号

2015考研数学冲刺训练200题(数学三)
主编 胡金德 谭泽光
2015 Kaoyan Shuxue Chongci Xunlian 200 Ti (Shuxue San)

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242(总编室)		010－62511770(质管部)
	010－82501766(邮购部)		010－62514148(门市部)
	010－62515195(发行公司)		010－62515275(盗版举报)
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.1kao.com.cn(中国1考网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京东君印刷有限公司		
规　　格	185mm×260mm 16开本	**版　　次**	2014年3月第1版
印　　张	15.5	**印　　次**	2014年3月第1次印刷
字　　数	397 000	**定　　价**	28.00元

前　　言

本书是一本系统化的考研数三知识点专项梳理及能力提高训练用书，为了使考研同学能在短时间内对考研数三所有考点有更加清楚的认识，对考研数三试题的难度和做题的速度有更加精确的把握，我们通过深入分析考研数学考试大纲的要求和精神以及近年来考研数三命题的特点和动向，编写了本书. 本书将考研数三所有知识点分专题进行归类讲解，内容包括高等数学、线性代数、概率论与数理统计三大部分，其中高等数学共分 22 个专题，线性代数共分 14 个专题，概率论与数理统计共分 11 个专题进行讲解.

本书每个专题分以下三部分进行讲解：

一、命题导航——通过对考研大纲以及近年考研真题的分析，总结了每一专题在近年考研真题中的命题频率. 例如：专题一“极限的求解及应用”在考研真题的选择题、填空题和解答题中均有出现，包括：2012 年第 9、15 题，2011 年第 15 题，2010 年第 1、4、15 题，2008 年第 15 题，2007 年第 11 题，2006 年第 1、15 题. 通过这样的总结，可以使考生对不同知识点是否为常考知识点有个清楚的认识，以便在后期的复习中把握重点. 另外，本部分还给出了本专题中知识点分析及解题技巧总结，以使考生对此类问题的解法有总体的把握和提升.

二、经典真题——此部分包含 1～2 道与此专题紧密相关的考研数三经典真题，并附有详细答案解析. 目的主要是让考生对此专题所含知识点在数三真题中的出题特点有更加明确的认识. 另外，也让考生对考研数三真题的难度和命题特点有更加清晰的认识.

三、冲刺训练——我们依据此专题在考研数三真题中的分布情况，并结合考研数学考试大纲的要求和命题趋势特征，精选 5～10 道练习题，所选题目难度与考研数三真题难度接近，并略有提升. 旨在让考生通过题目练习，加深对知识点的掌握，提高做题的速度和准确性，提高考生在做解答题时解题的规范性.

希望本书能成为广大考生的良师益友. 由于时间仓促，书中难免有疏漏之处，诚请各位专家和读者批评指正.

最后，祝愿每一位考生都能不负努力，考取理想的学府.

编者

2014 年 3 月

目　　录

第一部分　高等数学

第二部分　线性代数

第三部分　概率论与数理统计

第一部分 高等数学

专题一 极限的求解及应用

命题导航

极限概念及其计算一直是考研大纲中要求理解、掌握的重点考查内容，求极限是历年考研真题中的常考题型，在选择题、填空题、解答题中均有出现，如：12(9)、(15)题，11(15)题，10(1)、(4)、(15)题，09(9)题，08(15)题，07(11)题，06(1)、(15)题.

求函数的极限主要有七种：$\frac{0}{0}$型，$\frac{\infty}{\infty}$型，$0\cdot\infty$型，$\infty-\infty$型，1^{∞}型，0^{0}型，∞^{0}型，求解方法如下：

1）用初等数学（例如三角、对数、指数、分子与分母同乘以某式、提公因式等）中的恒等变形，使得能约分的就约分；

2）如果有因式极限存在但不为0，那么可将这种因式按乘积运算法则提出来另求；

3）用洛必达法则；

4）用等价无穷小替换；

5）对于1^{∞}型，0^{0}型，∞^{0}型可以化为指数型复合函数的极限计算；

6）皮亚诺余项泰勒公式；

7）导数定义求极限；

8）最基本的求解方法为极限的四则运算定理，复合函数求极限，连续函数求极限，以及几个重要极限.

经典真题

1.（2012年第9题）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=$________

【详解】 **解法一：**用求1^{∞}型极限的方法，由于

$$(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=(1+\tan x-1)^{\frac{1}{\tan x-1}(\tan x-1)\frac{1}{\cos x-\sin x}}$$

而

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\cos x-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos x}\frac{\sin x-\cos x}{\cos x-\sin x}\right)=-\sqrt{2}$$

因此
$$I=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=e^{-\sqrt{2}}.$$

解法二：

用求幂指数型极限的一般方法. 由于 $I=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} e^{\frac{\ln\tan x}{\cos x-\sin x}}$，而

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\tan x}{\cos x-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\tan x}\,\frac{1}{\cos^2 x}}{-\sin x-\cos x}$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$$

因此　$I=e^{-\sqrt{2}}$.

2.（2011 年第 15 题）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$.

【详解】　解法一： 利用当 $x\to 0$ 时的等价无穷小关系 $\ln(1+x)\sim x$ 与洛必达法则可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\cos x}{2\sqrt{1+2\sin x}}-1}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{x\sqrt{1+2\sin x}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+2\sin x}}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(-\sin x-\frac{2\cos x}{2\sqrt{1+2\sin x}}\right)=-\frac{1}{2}$$

解法二： 在得到等式 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x^2}$ 之后计算过程可以与解法一有所不同，例如可进行如下计算：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2\sin x-(x+1)^2}{x^2(\sqrt{1+2\sin x}+x+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-x^2-2x}{x^2}$$

$$=-\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}$$

$$=-\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x}$$

$$=-\frac{1}{2}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2}=-\frac{1}{2}.$$

解法三： 写出 $\sqrt{1+2\sin x}$ 的 2 阶泰勒公式

$$(1+2\sin x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}(2\sin x)+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}(2\sin x)^2+o(x^2)$$

$$=1+\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 x+o(x^2)$$

所以$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\dfrac{1}{2}\sin^2x-x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^2}-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

冲刺训练

【1.1】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{1-\cos x}=$ ________.

【1.2】 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{\ln(1-x)}+\dfrac{1}{\sin x}\right]=$ ________.

【1.3】 $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+\sin^2x)}}=$ ________.

【1.4】 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)-\ln(1+\sin^2x)}{(1-\cos x)\ln(1-\sin^2x)}$.

【1.5】 求极限$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{e^x-1}{1-\cos x}}$.

【1.6】 求极限$\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1-e^x}{2\ln(1+x)}}, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}, & x<0.\end{cases}$$

【1.7】 若$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x+xf(x)}{x^3}=0$,求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2+f(x)}{x^2}$.

【1.8】 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(x+1)-\cos x\sqrt[3]{\cos3x}\sqrt[5]{\cos5x}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2n-1]{\cos(2n-1)x}}{\ln(2-\cos x)}$.

【1.9】 确定a与b的值,使得

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\sqrt{x^4+ax}-\frac{\left(x^3+x^2+\dfrac{3}{2}bx\right)}{\sqrt[x]{e}}\right]=\frac{1}{4}.$$

【1.10】 求极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

【1.11】 已知$\lim\limits_{x\to0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x^2}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=e^3$,求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^3}$.

【1.12】 设$\lim\limits_{x\to1^-}\sin^p(1-x)\cdot\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2\ln\frac{1}{x}}dt$存在且不为0,求常数$p$的值及该极限值.

【1.13】 设$f(x)$可微且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$,求$\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_x^{x+2}tf(t)\cdot\ln\frac{t+1}{t}dt$.

答 案 详 解

【1.1】 由$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2(x\to0)$,用洛必达法则

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{\frac{1}{2}x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{2x\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1-x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{2}=-\frac{1}{2}.$$

【1.2】 所求极限为"$\infty-\infty$"型未定式，应首先通分化为"$\frac{0}{0}$"型未定式后，再进行求解.

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{\ln(1-x)}+\frac{1}{\sin x}\right]=\lim_{x\to0}\frac{\sin x+\ln(1-x)}{\ln(1-x)\sin x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x+\ln(1-x)}{-x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\frac{1}{1-x}}{-2x}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1}{1-x}\lim_{x\to0}\frac{(1-x)\cos x-1}{x}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x-1}{x}-\cos x\right)$$

$$=-\frac{1}{2}(0-1)=\frac{1}{2}.$$

点 拨

当遇到$0\cdot\infty,\infty-\infty,0^0,1^\infty,\infty^0$等未定式时，需先把未定式转化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型，再用洛必达法则求解.

【1.3】 **解法一：**属1^∞型.

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{\ln(1+\sin^2x)}}$$

$$=\lim_{x\to0}e^{\frac{\cos x-1}{\ln(1+\sin^2x)}}.$$

利用等价无穷小因子替换得

$$\lim_{x\to0}(\cos x-1)\cdot\frac{1}{\ln(1+\sin^2x)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{\sin^2x}=-\frac{1}{2}.$$

即：原式 $=e^{-\frac{1}{2}}$.

解法二：属1^∞型，用求指数型极限的一般方法.

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{\ln(1+\sin^2x)}\ln\cos x},$$

而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\ln(1+\sin^2 x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{\sin x}{\cos x}}{2x}=-\frac{1}{2},$$

即:原式 $=e^{-\frac{1}{2}}$.

【1.4】 先作恒等变形:

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{x^2-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\right)}{(1-\cos x)\ln(1-\sin^2 x)}.$$

然后用等价无穷小因子替换:$x\to 0$ 时

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\ln\left(1+\frac{x^2-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\right)\sim\frac{x^2-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\sim x^2-\sin^2 x,$$

$$\ln(1-\sin^2 x)\sim-\sin^2 x\sim-x^2.$$

于是

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\left(-2\,\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\right)$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$=-2\cdot 2\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}.$$

由洛必达法则得:

$$\text{原式}=-4\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=-\frac{2}{3}.$$

点 拨

已知 $x\to x_0$ 时,$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$,$\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)=A$.

可得 $x\to x_0$ 时,

$$\ln(1+\varphi(x))\sim\varphi(x)$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0}\ln(1+\varphi(x))=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$,

同理:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{\phi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{A}=0.$$

其中极限 $x\to x_0$ 变为 $x\to 0$ 及 $x\to\infty$ 等时上述结论也可成立.

【1.5】 这是 1^∞ 型的极限.

解法一:$M=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{e^x-1}{1-\cos x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)-1\right]^{\frac{1}{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}\cdot\left[\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right]\frac{e^x-1}{1-\cos x}}$

$=e^A$.

其中:

$$A=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right]\frac{e^x-1}{1-\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x}\cdot\frac{(e^x-1)}{\frac{1}{2}x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x}\cdot\frac{2}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}2\cdot\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x(1+x)}=-1.$$

所以原式 $= e^{-1}$.

解法二：利用泰勒公式求解，由

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2),x\to 0,$$

得：

$$A=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right]\frac{e^x-1}{1-\cos x}$$

$$=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

$$=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=-1$$

所以原式 $= e^{-1}$.

点 拨

1^∞ 型未定式求极限通常有两种方式：

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=1,\quad \lim_{x\to x_0}\mu(x)=\infty$$

方法一：利用等价无穷小的形式化简

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)^{\mu(x)}=\lim_{x\to x_0}[1+\varphi(x)-1]^{\frac{1}{\varphi(x)-1}\cdot\mu(x)[\varphi(x)-1]}=\lim_{x\to x_0}e^{\mu(x)[\varphi(x)-1]}.$$

方法二：把 1^∞ 型未定式化为以 e 为底数的幂函数

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)^{\mu(x)}=\lim_{x\to x_0}e^{\mu(x)\ln\varphi(x)}.$$

【1.6】 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1-e^x}{2x}}=e^{-\frac{1}{2}}.$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=\lim_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}\ln\cos x}.$$

因为

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln\cos x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{2x}=-\frac{1}{2}.$$

所以
$$\lim_{x\to0^-}f(x)=e^{-\frac{1}{2}}.$$
因为
$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)=e^{-\frac{1}{2}}.$$
所以
$$\lim_{x\to0}f(x)=e^{-\frac{1}{2}}.$$

【1.7】解法一:恒等变形后用洛必达法则,由于
$$\lim_{x\to0}\frac{2x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\left[\frac{2x-\sin2x}{x^3}+\frac{\sin2x+xf(x)}{x^3}\right],$$
而
$$\lim_{x\to0}\frac{2x-\sin2x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{2-2\cos2x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{4\sin2x}{6x}=\frac{4}{3},$$
所以
$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{2+f(x)}{x^2}&=\lim_{x\to0}\frac{2x+xf(x)}{x^3}\\&=\lim_{x\to0}\frac{2x-\sin2x}{x^3}+\lim_{x\to0}\frac{\sin2x+xf(x)}{x^3}\\&=\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

解法二:用带皮亚诺余项泰勒公式,题设为 $\sin2x+xf(x)=o(x^3)$.
$$\sin2x=2x-\frac{(2x)^3}{3!}+o(x^3).$$
代入得
$$2x-\frac{8}{6}x^3+xf(x)=o(x^3),$$
从而得
$$2+f(x)=\frac{4}{3}x^2+o(x^2),\quad \frac{2+f(x)}{x^2}=\frac{4}{3}+o(1),$$
于是
$$\lim_{x\to0}\frac{2+f(x)}{x^2}=\frac{4}{3}.$$

点拨

若将 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x+xf(x)}{x^3}$ 中 $\sin2x$ 用等价无穷小直接替换为 $2x$,得到 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x+xf(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2+f(x)}{x^2}=0$ 是错误的.

因为替换过程会产生误差 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{x^3}-\dfrac{2x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\cos2x-2}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2(\cos2x-1)}{3x^2}=-\dfrac{4}{3}\neq0$.

【1.8】 由等价无穷小代换:

① $\ln(2-\cos x)\sim\ln[1+(1-\cos x)]\sim(1-\cos x)\sim x^2/2$.

② $x-\ln(x+1)\sim x^2/2$.

故 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2/2-\cos x\sqrt[3]{\cos3x}\sqrt[5]{\cos5x}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2n-1]{\cos(2n-1)x}}{x^2/2}$

$$= 1 + \lim_{x \to 0}\left[-\frac{\cos x \sqrt[3]{\cos 3x} \sqrt[5]{\cos 5x} \cdot \cdots \cdot \sqrt[2n-1]{\cos(2n-1)x}}{x^2/2}\right].$$

记

$$S = \lim_{x \to 0} \frac{-\cos x \sqrt[3]{\cos 3x} \sqrt[5]{\cos 5x} \cdot \cdots \cdot \sqrt[2n-1]{\cos(2n-1)x}}{x^2/2}.$$

由洛必达法则

$$\begin{aligned} S = -\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\Bigg(& -\sin x \sqrt[3]{\cos 3x} \sqrt[5]{\cos 5x} \cdot \cdots \cdot \sqrt[2n-1]{\cos(2n-1)x} \\ & + \cos x \cdot \frac{-\sin 3x}{\sqrt[3]{(\cos 3x)^2}} \cdot \sqrt[5]{\cos 5x} \cdot \cdots \cdot \sqrt[2n-1]{\cos(2n-1)x} \\ & + \cos x \cdot \sqrt[3]{\cos 3x} \cdot \frac{-\sin 5x}{\sqrt[5]{(\cos 5x)^4}} \cdot \cdots \cdot \sqrt[2n-1]{\cos(2n-1)x} + \cdots \\ & + \cos x \cdot \sqrt[3]{\cos 3x} \cdot \sqrt[5]{\cos 5x} \cdot \cdots \cdot \frac{-\sin(2n-1)x}{[\cos(2n-1)x]^{\frac{2n-2}{2n-1}}}\Bigg). \end{aligned}$$

由观察可知

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \cos x &= \lim_{x \to 0} \sqrt[3]{\cos 3x} \\ &= \lim_{x \to 0} \sqrt[5]{\cos 5x} = \cdots = 1. \end{aligned}$$

从而得

$$\begin{aligned} S &= \lim_{x \to 0}\left[\frac{\sin x}{x} + \frac{\sin 3x}{x} + \frac{\sin 5x}{x} + \cdots + \frac{\sin(2n-1)x}{x}\right] \\ &= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2. \end{aligned}$$

故　原式 $= 1 + n^2$.

点拨

本题关键是活用等价无穷小与洛必达法则.

其中：$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin nx}{x \sqrt[n]{\cos^{n-1} nx}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin nx}{x}$.

【1.9】　解法一：将左式化为 $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[\sqrt{x^6 + ax^3} - \left(x^3 + x^2 + \frac{3}{2}bx\right)e^{-\frac{1}{x}}\right]$

利用换元法，令 $t = \dfrac{1}{x}$，

$$\begin{aligned} \text{左式} &= \lim_{t \to 0^+}\left[\left(\frac{1}{t^6} + \frac{a}{t^3}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^2} + \frac{3}{2}b\frac{1}{t}\right)e^{-t}\right] \\ &= \lim_{t \to 0^+}\left[\frac{1}{t^3}(1 + at^3)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{t^3}\left(1 + t + \frac{3}{2}bt^2\right)e^{-t}\right]. \end{aligned} \qquad ①$$

由麦克劳林公式

$$\begin{cases} (1 + at^3)^{\frac{1}{2}} = 1 + \dfrac{a}{2}t^3 + o(t^3), \\ e^{-t} = 1 - t + \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t^3}{6} + o(t^3). \end{cases}$$

故 $$①=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t^3}\left[\left(1+\frac{a}{2}t^3+o(t^3)\right)-\left(1+t+\frac{3}{2}bt^2\right)\left(1-t+\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}+o(t^3)\right)\right]$$
$$=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t^3}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}b\right)t^2+\left(\frac{a}{2}+\frac{3b}{2}-\frac{1}{3}\right)t^3+o(t^3)\right]$$
$$=\begin{cases}+\infty, & b\neq\frac{1}{3},\\ \frac{a}{2}+\frac{1}{6}, & b=\frac{1}{3}.\end{cases}$$

已知 $$\lim_{x\to\infty}\left[x\sqrt{x^4+ax}-\frac{x^3+x^2+\frac{3}{2}bx}{\sqrt[x]{e}}\right]=\frac{1}{4}.$$

可得$\frac{a}{2}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$,解得 $a=\frac{1}{6}$.

故 $a=\frac{1}{6},\quad b=\frac{1}{3}$.

解法二:作换元 $t=\frac{1}{x}$,可得

$$左式=\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{1+at^3}-\left(1+t+\frac{3b}{2}t^2\right)e^{-t}}{t^3}$$
$$\xlongequal{洛必达}\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{3at^2}{2\sqrt{1+at^3}}-\left(1+3bt-1-t-\frac{3bt^2}{2}\right)e^{-t}}{3t^2}$$
$$=\lim_{t\to0^+}\left\{\frac{a}{2\sqrt{1+at^3}}-\left[\frac{(3b-1)}{3t}-\frac{b}{2}\right]e^{-t}\right\}$$
$$=\begin{cases}+\infty, & b\neq\frac{1}{3},\\ \frac{a}{2}+\frac{b}{2}, & b=\frac{1}{3}.\end{cases}$$

则 $$\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=\frac{1}{4},$$

故 $a=\left(\frac{1}{4}-\frac{b}{2}\right)\cdot2=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\cdot2=\frac{1}{6}$.

综上,$a=\frac{1}{6}$,$b=\frac{1}{3}$.

【1.10】 注意到 $x\to0^+$ 与 $x\to0^-$ 两个变化过程中,$e^{\frac{1}{x}}$ 的极限不同,要先求出左、右极限分别讨论.

当 $x\to0^+$ 时

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{e^{-\frac{4}{x}}(e^{\frac{1}{x}}+2)}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right].$$
$$=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{e^{-\frac{3}{x}}+2e^{-\frac{4}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}\right)+\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}.$$

因为,

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-3/x} = \lim_{x\to 0^+} e^{-4/x} = 0.$$

故

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1.$$

当 $x\to 0^-$ 时

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$=\frac{2+0}{1+0}-1=2-1=1.$$

故

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1.$$

点 拨

某些情况下极限的左、右极限可能会不相等，一般这时需要先分别求左、右极限；另外对于有绝对值符号时的极限问题，亦要对去绝对值符号的“变号”问题进行讨论.

【1.11】 对等式两边取对数

$$\lim_{x\to 0}\ln\left[\left(1+x+\frac{f(x)}{x^2}\right)^{\frac{1}{\sin x}}\right]=\ln e^3=3.$$

$$左边=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x^2}\right)}{\sin x}.$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x^2}\right)}{x}.$$

注意：本题中极限已存在，$x+\frac{f(x)}{x^2}$ 必在 $x\to 0$ 时趋向于 0 方能保证极限存在.

$$左边=\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{f(x)}{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x^3}\right)=3,$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=2$.

点 拨

含有幂函数极限的常用的求解方法：

① 两边取对数；

② 把普通的幂函数变为以 e 为底的幂函数. 本题也可直接变形为：

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{\sin x}\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x^2}\right)}=e^3$$

【1.12】
$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2\ln\frac{1}{x}}\,dt=\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2\ln\frac{1}{x}}\,dt\sqrt{\ln\frac{1}{x}}$$

$$\xlongequal{u=t\sqrt{\ln\frac{1}{x}}} \frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du \qquad ①$$

只需求$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du$.

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du\right)^2 = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du \cdot \int_0^{+\infty} e^{-w^2}\,dw = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}(e^{-u^2}\cdot e^{-w^2})\,du\,dw$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty} re^{-r^2}\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{4}(-e^{-r^2})\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

所以

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

故 $① = \frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

$$原式 = \lim_{x\to1^-}\frac{\sin^p(1-x)}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} \xlongequal{t=1-x} \lim_{t\to0^+}\frac{(\sin t)^p}{[\ln(1-t)^{-1}]^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$= \lim_{t\to0^+}\frac{t^p}{[-\ln(1-t)]^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \lim_{t\to0^+}\frac{t^p}{t^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

故 $p=\frac{1}{2}$ 可使极限存在且不为 0.

极限值为$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

【1.13】 由积分中值定理，$\exists\,\xi\in[x,x+2]$，使得

$$\int_x^{x+2} tf(t)\ln\frac{t+1}{t}\,dt = 2\xi f(\xi)\ln\frac{\xi+1}{\xi}$$

因 $x\to+\infty$，故 $\xi\to+\infty$.

$$原式 = \lim_{\xi\to+\infty} 2\xi f(\xi)\ln\frac{\xi+1}{\xi}$$

$$= \lim_{\xi\to+\infty} 2f(\xi)\frac{\ln\left(1+\frac{1}{\xi}\right)}{\frac{1}{\xi}} = \lim_{\xi\to+\infty} 2f(\xi)\frac{\frac{1}{\xi}}{\frac{1}{\xi}}$$

$$= 2\lim_{\xi\to+\infty} f(\xi) = 2\cdot1 = 2.$$