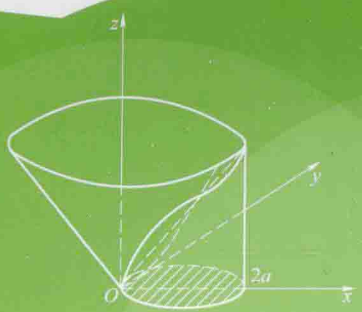
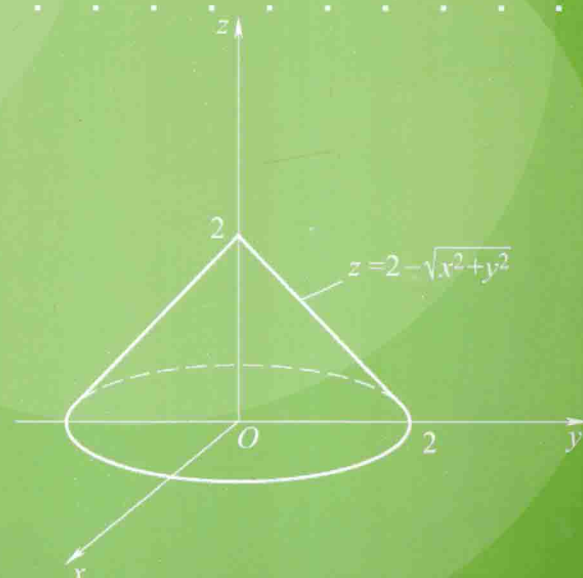
21世纪高等理工科重点课程辅导教材

高等数学学习辅导

李威　李秋姝◈编

GAODENG SHUXUE
XUEXI FUDAO



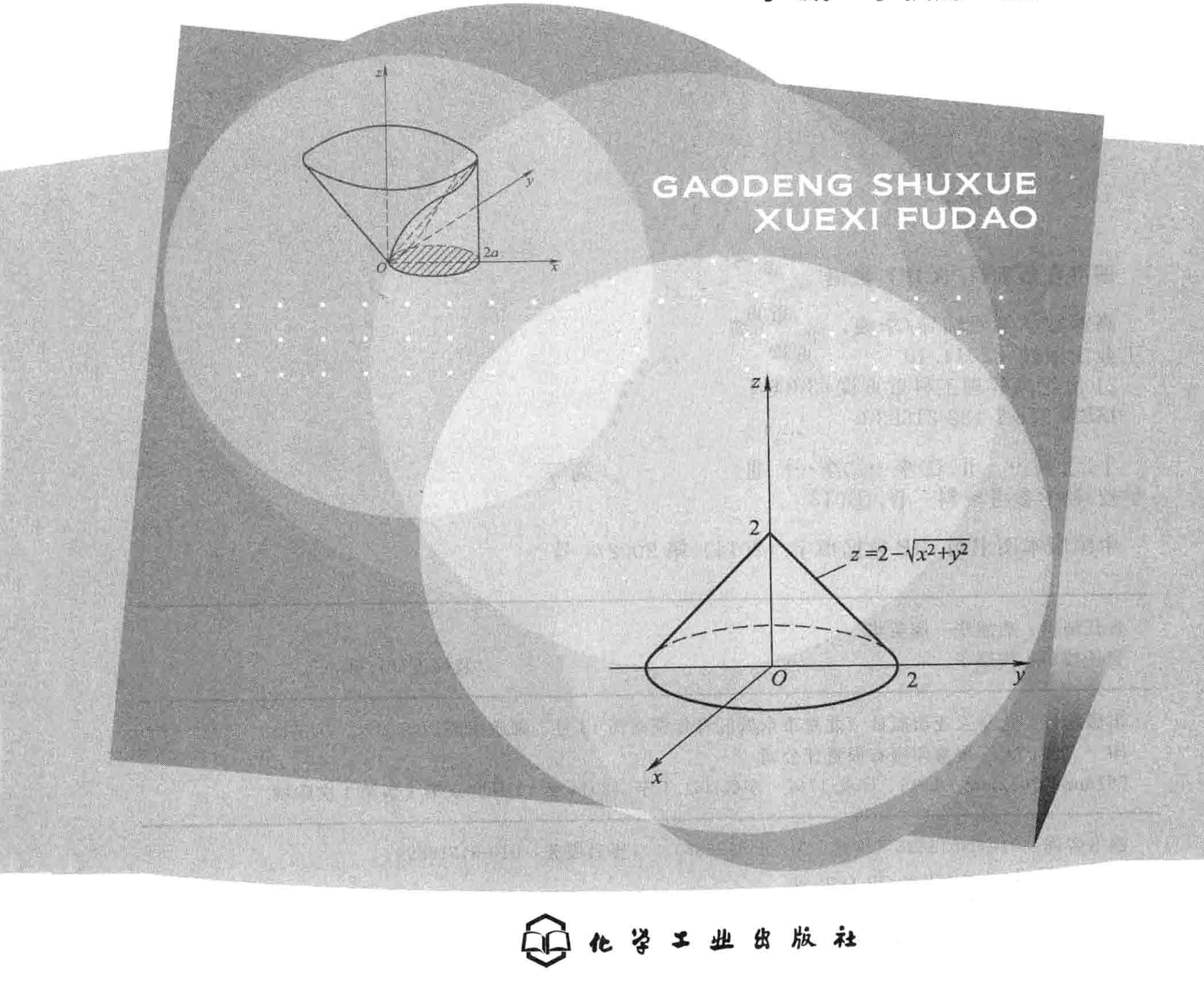


化学工业出版社

21世纪高等理工科重点课程辅导教材

高等数学学习辅导

李威　李秋姝◈编



化学工业出版社

本书是依据2010年教育部教学课程教学指导委员会下发的《高等学校工科类本科高等数学课程教学基本要求》（修订稿）的基本精神，并结合现行通用教材《高等数学》（第五版）（同济大学应用数学系主编）的内容编写而成的。全书内容包括一元函数微积分学、空间解析几何与向量代数、多元函数微积分学、无穷级数与微分方程共12章。每章给出基本要求与重点要求、知识点关联网络，又根据知识点将整章分解成若干节，每节按照内容提要、例题分析、习题、习题解答与提示4部分编写。全书共收录1000余道例题和习题，所有题目按照基本类型进行分类编排。通过研读和演算，使读者能够更深入理解基本概念，掌握基本解题思路和解题技巧，提升逻辑思维能力。

本书可作为理工类和经管类本科各专业学生的高等数学课程的辅导教材，同时也可用作参加硕士研究生入学考试的高等数学学习参考用书，也可作为相关课程教师的教学参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习辅导/李威，李秋姝编. —北京：化学工业出版社，2014.10
21世纪高等理工科重点课程辅导教材
ISBN 978-7-122-21683-0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①李…②李… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①013

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第200274号

责任编辑：唐旭华 郝英华
责任校对：陶燕华 装帧设计：韩 飞

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号 邮政编码100011）
印 装：大厂聚鑫印刷有限责任公司
787mm×1092mm 1/16 印张17¼ 字数461千字 2014年11月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686） 售后服务：010-64518899
网 址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定 价：30.00元

前　　言

本书依据2010年教育部数学课程教学指导委员会下发的《高等学校工科类本科高等数学课程教学基本要求》（修订稿）的基本精神，并结合现行通用教材《高等数学》（第五版）（同济大学应用数学系主编）的内容进行编写。

本书共分为12章及附录，内容包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程。每章给出基本要求与重点要求、知识点关联网络，又根据知识点将整章分解成若干节，每节按照内容提要、例题分析、习题、习题解答与提示4部分编写。

本书的知识点关联网络刻画了每章知识点间的相互联系，使读者将本章知识点串联起来，形成完整的知识框架。例题分析部分是在归纳基本题型基础上，适当选配若干典型例题，其中大部分配有分析或注释，分析思路清楚，注释简洁，便于读者研读。典型例题选自历年硕士研究生入学考试试题（标有△记号）和教学中使用例题、习题，根据方法和类型进行分类介绍，难度相当或高于通用教材中每章总习题的题目。附录给出了期中及期末考试试卷和答案，可供读者自测。本书可作为理工类和经管类本科各专业学生的高等数学课程的辅导教材，同时也可用作参加硕士研究生入学考试的高等数学学习参考用书。

本书由李威负责组织编写和统稿，参加编写的有李威、李秋姝。其中第一至第六章由李威编写，第七至第十二章由李秋姝编写，杨永愉教授进行了审核。在编写过程中得到了杨永愉、崔丽鸿两位教授的悉心指导与大力支持，在此一并表示感谢。

由于水平有限，书中疏漏与不妥之处在所难免，恳请读者给予批评指正。

编者

2014年6月

目　　录

第一章　函数与极限

基本要求与重点要求

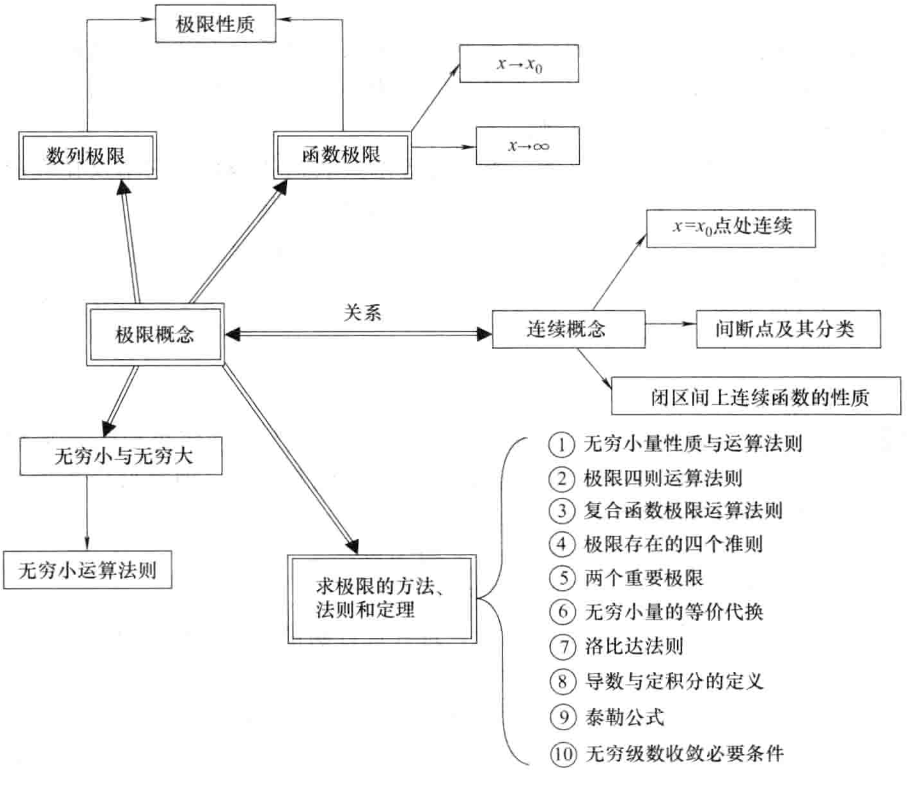
1. 基本要求

理解函数的概念．了解函数奇偶性、单调性、周期性和有界性．理解复合函数的概念．了解反函数的概念．掌握基本初等函数的性质及其图形．会建立简单实际问题中的函数关系式．理解极限的概念（对极限的 ε-N，ε-δ 定义可在学习过程中逐步加深理解，对于给出 ε 求 N 或 δ 不作过高要求）．掌握极限四则运算法则．了解两个极限存在准则（夹逼准则和单调有界准则），会用两个重要极限求极限．了解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念．会用等价无穷小求极限．理解函数在一点连续的概念．了解间断点的概念，并会判别间断点的类型．了解初等函数的连续性．

2. 重点要求

函数的概念．复合函数的概念．基本初等函数的性质及其图形．极限的概念．极限的四则运算法则．两个重要极限．函数在一点连续的概念．

知识点关联网络



第一节　函　　数

一、内 容 提 要

1. 函数定义

设有两个变量 x 和 y，D 是一个给定的非空数集．如果对于每一个 $x \in D$，变量 y 按照

一定的法则总有确定的数值和它对应，则称变量 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$ 其中数集 D 称为这个函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量．变量 y 的取值全体 $W=\{y \mid y=f(x),\ x\in D\}$ 称为函数的值域.

2. 函数的有界性

若存在正数 M，对于一切 $x\in \mathbb{Z}$ 都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{Z}$ 内有界.

3. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对于 I 内的任意两个数 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$[或 $f(x_1)>f(x_2)$]，则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加（或单调减少）.

4. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于 D 内的任意 x，恒有 $f(-x)=f(x)$ [或 $f(-x)=-f(x)$]，则称 $f(x)$ 为偶函数（或奇函数）.

5. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在正数 T，使得对于任意的 $x\in D$ 有 $(x\pm T)\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数．周期函数的周期是指最小正周期.

二、例题分析

复合函数是微积分理论所研究的一类重要函数关系．对于给定的复合函数，必须能够从外到内逐层剥离复合关系，这是掌握复合函数的最重要的一步．在实际应用中，常常需要构造复合函数，确定它的表达式和定义域.

分段函数是微积分理论中最常见的一类非初等形式表达的函数，它不仅在理论研究中具有重要的价值，而且在数学建模中，更是不可或缺的数学工具.

【例 1】 设 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$的表达式及其定义域.

解 由已知可得 $f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}=1-x$，即 $\varphi^2(x)=\ln(1-x)$．由 $1-x>0$ 且 $\ln(1-x)\geqslant 0$ 由于 $\varphi(x)\geqslant 0$，所以 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，

可知 $x\leqslant 0$，所以 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，$x\leqslant 0$.

【例 2】 收音机每台售价为 90 元，成本为 60 元，厂方为鼓励销售商大量采购，决定凡是订购量超过 100 台以上的，每多订购 1 台，售价就降低 0.1 元，但最低价为每台 75 元.

(1) 将每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数；

(2) 将厂方所获的利润 P 表示成订购量 x 的函数；

(3) 某一商行订购了 200 台，厂方可获利润多少？

解 (1) 当 $x\leqslant 100$ 台时每台售价为 90 元，现计算订购量 x 为多少台时售价降为 75 元/台

$$90-75=15,\qquad 15\div 0.1=150.$$

所以，当订购量超过 $150+100=250$ 台时，每台售价为 75 元，当订购量在 100～250 台时，每台售价为 $90-(x-100)\times 0.1=100-0.1x$，因而实际售价 p 与订购量 x 之间的函数关系为

$$p=\begin{cases} 90, & x\leqslant 100, \\ 100-0.1x, & 100<x<250, \\ 75, & x\geqslant 250. \end{cases}$$

(2) 每台利润是实际价格 p 与成本之差：$p-60$，所以总利润 $P=(p-60)x$.

(3) 由 (1) 先计算出 $p=100-0.1\times 200=80$，再由 (2) 知

$$P=(80-60)\times 200=4000(\text{元}).$$

【例 3】 设 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1,\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2,\\ 12x-16, & x>2,\end{cases}$ 求 $f(x)$ 的反函数$g(x)$ 的表达式.

分析 由分段函数求反函数，需要逐段讨论函数的单调性和取值范围.

解 当 $x<-1$ 时，$f(x)=1-2x^2$，显然此时 $f(x)$ 是单调增加的，且有 $f(x)<-1$.

设 $y=1-2x^2$，可得 $x=-\sqrt{(1-y)/2}$，即 $g(x)=-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}$，　$x<-1$.

当$-1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$f(x)=x^3$，显然 $f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上单调增加，且$-1\leqslant f(x)\leqslant 8$.

设 $y=x^3$，由此解出 $x=\sqrt[3]{y}$，即 $g(x)=\sqrt[3]{x}$，$-1\leqslant x\leqslant 8$.

当 $x>2$ 时，$f(x)=12x-16$，显然 $f(x)$ 在 $x>2$ 的范围内是单调增加的，而且 $f(x)>8$.

设 $y=12x-16$，解出 $x=(y+16)/12$，即

$$g(x)=\frac{x+16}{12},\quad x>8.$$

综上所述

$$g(x)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}, & x<-1,\\ \sqrt[3]{x}, & -1\leqslant x\leqslant 8,\\ \dfrac{x+16}{12}, & x>8.\end{cases}$$

三、习　　题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$ 的表达式及其定义域.

2. 设 $f(x^2-1)=\ln\dfrac{x^2}{x^2-2}$，且 $f[\varphi(x)]=\ln x$，求 $\varphi(x)$ 的表达式及其定义域.

3. 设　$f(x)=\begin{cases}-1, & x<-1,\\ x, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & x>1,\end{cases}$ 求 $f(x^2+5)f(\sin x)-5f(4x-x^2-6)$.

4. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是奇函数，$f(1)=a$，且对于任何 x 值有 $f(x+2)-f(x)=f(2)$.

(1) 试用 a 表示 $f(2)$ 与 $f(5)$.　(2) 问 a 取何值时，$f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数?

四、习题解答与提示

1. $f[f(x)]=1$，$(-\infty,+\infty)$.　2. $\varphi(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$，$x>0$，且 $x\neq 1$.

3. $5+\sin x$. 提示：讨论 x^2+5，$\sin x$，$4x-x^2-6$ 的取值范围.

4. (1) $f(2)=2a$，$f(5)=5a$. 提示：分别令 $x=-1$，1，3 带入等式. (2) $a=0$.

第二节　数列与函数的极限

一、内容提要

1. 数列 $\{x_n\}$ 的极限

设数列 $\{x_n\}$ 和常数 A，如果对于任意给定的正数 ε，总存在正整数N，当 $n>$N 时，恒有$|x_n-A|<\varepsilon$，则称常数 A 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或称当 $n\to\infty$时，数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

2. 函数 $f(x)$ 的极限

设函数 $f(x)$ 和常数 A，如果对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限，或称当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 收敛于 A，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

设函数 $f(x)$ 和常数 A，如果对于任意给定的正数 ε，总存在正数 Z，当 $|x|>Z$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限，或称当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 收敛于 A，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

3. 极限计算的常用法则、公式、定理

(1) 极限的四则运算法则；

(2) 复合函数极限的运算法则；

(3) 极限存在的两个准则；

(4) 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e};$$

(5) 无穷小量的性质与运算法则；

(6) 无穷小的等价代换定理

常用等价无穷小：当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，$\mathrm{e}^x-1\sim x$，$a^x-1\sim x\ln a$，$\ln(1+x)\sim x$，$\sqrt[n]{1+x^m}-1\sim\frac{x^m}{n}$；

(7) 洛必达法则；

(8) 导数和定积分的定义；

(9) 泰勒公式.

二、例题分析

极限理论主要包括两部分内容，即收敛性证明与极限的计算方法. 本节仅讨论数列与函数极限的各种计算方法.

1. 四则运算法则

在计算极限的过程中，将函数或数列作恒等变形化简是常用的方法. 恒等变形的常用技巧：提取公因式或分子、分母有理化，消去零因式；自变量代换；三角函数恒等变形. 列项化简；无穷小等价代换等.

【例 1】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$.

解 分子有理化

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2-4}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2(\sqrt{1-x^2}-1)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2(1-x^2-1)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)(\sqrt{1-x^2}+1)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)(\sqrt{1-x^2}+1)}=-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

【例 2】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$ $(x\neq 0)$.

分析 分子分母同乘相同的不为零的因子，运用三角函数的倍角公式，将函数式子化简.

解 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\sin\dfrac{x}{2^n}}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n-1}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\left(2\cos\dfrac{x}{2^n}\sin\dfrac{x}{2^n}\right)}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^{n-1}}\sin\dfrac{x}{2^{n-1}}}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-2}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\left(2\cos\dfrac{x}{2^{n-1}}\sin\dfrac{x}{2^{n-1}}\right)}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}$$

$$=\cdots=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\dfrac{x}{2^n}}{\sin\dfrac{x}{2^n}}\right)=\frac{\sin x}{x}.$$

【例 3】 求$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$.

分析 $1-x^2=(1-x)(1+x)$，当 $x\to1$ 时，$x-1\to0$. 考虑变量代换 $x-1=t$，$t\to0$，$x=1+t$，$\sin\pi x=-\sin\pi t$. 当 $x\to1$ 时，$\sin\pi x$ 不能作无穷小等价代换，而当 $t\to0$ 时，则有 $\sin\pi t\sim\pi t$.

解 令 $x-1=t$，则当 $x\to1$ 时，有 $t\to0$.

$$\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{\sin\pi x}=\lim_{x\to1}\frac{(1-x)(1+x)}{\sin\pi x}\xlongequal{x-1=t}\lim_{t\to0}\frac{-t(t+2)}{-\sin\pi t}=\lim_{t\to0}\frac{\pi t}{\sin\pi t}\cdot\frac{t+2}{\pi}=\frac{2}{\pi}$$

2. 极限存在准则

单调有界原理和夹逼定理是极限存在的两个准则. 利用这两个准则证明并求出函数或数列的极限，是一类技巧性较强的极限计算题目. 单调有界原理的技巧性主要表现在以下两点：其一为单调性的证明. 证明单调性时，有时需要使用数学归纳法. 其二为函数或数列的界的估计. 在估计界的时候，需要对函数或数列进行适当的缩放.

△**【例 4】** 设 $x_1=10$，$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$，试证 $\{x_n\}$ 极限存在，并求此极限.

证 $x_1=10$，$x_2=4$，$x_3=\sqrt{10}$，$x_4=\sqrt{6+\sqrt{10}}$，$x_5=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{10}}}$，…

比较 x_3 与 x_4：$x_3-x_4=\sqrt{10}-\sqrt{6+\sqrt{10}}>0$ 得 $x_3>x_4$，可以猜测$\{x_n\}$为单调下降数列.

当 $n=1$ 时，$x_1>x_2$；假设 $n=k$ 时，有 $x_k>x_{k+1}$，当 $n=k+1$ 时，$x_{k+1}=\sqrt{6+x_k}>\sqrt{6+x_{k+1}}=x_{k+2}$，由数学归纳法可知数列 $\{x_n\}$ 是单调下降的. 由于对任意的自然数 n，都有 $x_n>0$，所以根据单调有界原理可知，数列 $\{x_n\}$ 收敛.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，对式 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$两边令 $n\to\infty$取极限，有$l=\sqrt{6+l}$，由此解出 $l_1=3$，$l_2=-2$；由于 $x_n>0$，所以 $l\geqslant0$，故舍去 $l_2=-2$，即有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

【例 5】 设 $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$ $(n=1,2,\cdots)$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在，并求出极限.

解 因 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)\geqslant\sqrt{a_n\cdot\dfrac{1}{a_n}}=1$，故有$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{a_n^2}\right)\leqslant\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{1^2}\right)=1$，即 $a_{n+1}\leqslant a_n$. 由 $a_{n+1}\geqslant1$ 可知，$\{a_n\}$ 为单调减少且有下界，据单调有界原理可知，数列 $\{a_n\}$ 收敛.

设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 时，对式 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$两边令 $n\to\infty$取极限，得 $2a=a+\dfrac{1}{a}$，解得$a=1$，即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

注　例 14 和例 15 给出了使用单调有界原理的常用技巧．证明单调性有三种方法：①归纳法；②将 $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 与 1 比较；③将 $x_{n+1}-x_n$ 与 0 比较．证明有界性，需要进行适当的缩放．

【例 6】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+i}$

分析　所给问题为无穷多项之和的极限问题，不能利用极限四则运算法则．

解　由于 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+i}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+1}$，

又
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n}=\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}=\frac{1}{n^2+n}\cdot\frac{1+n}{2}\cdot n=\frac{1}{2},$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+1}=\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}=\frac{1}{n^2+1}\cdot\frac{1+n}{2}\cdot n=\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}\cdot\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}(n\to\infty)$$

由夹逼定理可知
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+i}=\frac{1}{2}.$$

【例 7】 利用夹逼定理证明数列 $x_n=\frac{a^n}{n!}$ $(a>0)$ 收敛，并求极限．

证　$\frac{a^n}{n!}=\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{a}{n}$，因为 $a>0$，所以存在自然数 N_1，使 $N_1\geqslant a$．当 $n>N_1$ 以后，$\frac{a}{N_1+1}$，$\frac{a}{N_1+2}$，…，$\frac{a}{n}$均小于 1，有$\frac{a^n}{n!}=\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{a}{N_1}\cdot\frac{a}{N_1+1}\cdot\cdots\cdot\frac{a}{n}<\frac{a^{N_1}}{N_1!}\cdot\frac{a}{n}$，即有 $0<\frac{a^n}{n!}<\frac{a^{N_1}}{N_1!}\cdot\frac{a}{n}$（其中 $n>N_1$），由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{N_1}}{N_1!}\cdot\frac{a}{n}=0$，所以，根据夹逼定理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$.

注　使用夹逼定理的关键技巧是，将所求数列作适当放大和缩小，并且放大和缩小后的极限要相等．

3. 两个重要极限

第一个重要极限结果的一般形式：$\lim\limits_{\square\to0}\frac{\sin\square}{\square}=1$. 这个结果常用来处理含有三角函数的极限计算问题.

第二个重要极限结果，其一般形式：$\lim\limits_{\square\to0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\lim\limits_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}$. 使用这种方法，必须将幂指函数的底化成$(1+\square)$ 或$\left(1+\frac{1}{\square}\right)$形式.

对于此类幂指函数还有一种取对数法，即对幂指函数取对数，将函数的幂指型结构变为两个函数相乘除的形式. 这种方法一般要使用洛必达法则，将在第三章中介绍.

【例 8】 求$\lim\limits_{x\to0}\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

解　$\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\left[1+\frac{x-\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\left\{\left[1+\frac{x-\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{x}{x-\ln(1+x)}}\right\}^{\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}}$，

由于$\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\left[x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]}{x^2}=\frac{1}{2}$,所以$\lim\limits_{x\to0}\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\mathrm{e}}$.

【例 9】 求$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

解　方法一　使用第二重要极限公式

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1+\sin x}{\tan x-\sin x}}\right]^{\frac{\tan x-\sin x}{(1+\sin x)\sin x}},$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{(1+\sin x)\ \sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x\ (1-\cos x)}{(1+\sin x)\ \sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(1+\sin x)}\cdot\dfrac{1-\cos x}{\cos x}=0,$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=e^0=1.$

方法二　取对数法

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}\cdot\ln\left(1+\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(1+\sin x)\cos x}}=e^0=1.$$

注　$x\to 0$ 时有$\square\to 0$，则 $\ln(1+\square)\sim\square$.

【例 10】　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$　$(a>0)$.

分析　本例函数的结构中有一部分是幂指型函数，处理方法上需要一些技巧.

解　$\dfrac{(a+x)^x-a^x}{x^2}=a^x\dfrac{\left(1+\frac{x}{a}\right)^x-1}{x^2}$，因为 $\lim\limits_{x\to 0}a^x=1$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{x}{a}\right)^x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\ln\left[\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{a}{x}}\right]^{\frac{1}{a}}=\frac{1}{a},$$

所以

$$原式=1\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}.$$

注　本例也可使用洛必达法则，但运算过程比较繁杂，学了洛必达法则的读者不妨一试，可以体会出无穷小量的等价代换：$e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)}-1\sim x\cdot\ln\left(1+\dfrac{x}{a}\right)$的作用.

4. 极限与左右极限的关系

函数在一点处极限存在的充分必要条件是在该点处的左右极限存在且相等. 这一结论常用来证明函数在一点处极限不存在或讨论分段函数在分段点处极限的存在性.

【例 11】　讨论极限 $\lim\limits_{x\to 1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的存在性.

解　因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$，$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to 1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0$，$\lim\limits_{x\to 1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$. 由此可知 $\lim\limits_{x\to 1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 不存在.

【例 12】　设 $f(x-1)=\begin{cases}-\dfrac{\sin x}{x}, & x>0,\\ 2, & x=0,\\ x-1, & x<0,\end{cases}$ 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x-1)$.

解　设 $x-1=t$，则

$$f(t)=\begin{cases}-\dfrac{\sin(t+1)}{t+1}, & t>-1,\\ 2, & t=-1,\\ t, & t<-1,\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x-1)=\lim\limits_{t\to -1^+}f(t)=\lim\limits_{t\to -1^+}\dfrac{-\sin(t+1)}{t+1}=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x-1)=\lim\limits_{t\to -1^-}f(t)=\lim\limits_{t\to -1^-}t=-1$，

所以有$\lim\limits_{x\to 0}f(x-1)=-1$.

【例 13】 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

分析 本例的函数中包含绝对值，处理这种函数的极限问题，必须分左、右极限，去掉绝对值符号，然后根据左、右极限的结果作出结论.

解 由于

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2\cdot e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1.$$

所以有
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1.$$

注 下列极限结果值得重视：

$$\lim_{u\to-\infty}e^u=0,\qquad \lim_{u\to+\infty}e^u=+\infty,\qquad \lim_{u\to-\infty}\arctan u=-\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{u\to+\infty}\arctan u=\frac{\pi}{2},\qquad \lim_{u\to-\infty}\operatorname{arccot}u=\pi,\qquad \lim_{u\to+\infty}\operatorname{arccot}u=0.$$

三、习　　题

1. 求下列函数或数列的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a+2x}-\sqrt{a+x}}{x}$ $(a>0)$；　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$；

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$；　(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$；　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{8x^3+1}}$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$；　(8) $\lim\limits_{n\to\infty}[\sin\ln(n+1)-\sin\ln n]$；

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$；　(10) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$，$|x|<1$.

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2nx+x^2}{2n^2}\right)^{-n}$；　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$，$\left(\begin{matrix}a>0,\ a\neq 1,\\ b>0,\ b\neq 1\end{matrix}\right)$；

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$；　(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$；

(6) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 2x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$；　(7) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$；　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$；

(9) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\cot^2 x}$；　(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x$.

3. 设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，$a$为有限常数，求$a$的值.

4. 已知$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{1+2x^2+x^3}-ax-b)=0$，$a,b$为有限常数，求$a$与$b$的值.

5. 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，$a,b$为有限常数，求$a$与$b$的值.

6. 讨论极限$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{|x-1|}$的存在性.

7. $a>0$，$x_1>0$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$ $(n=1,2,3,\cdots)$，证明数列$\{x_n\}$极限存在，并求此极限.

8. 已知 $0<x_n<1$，$n=0,1,2,3,\cdots$，$x_{n+1}=2x_n-x_n^2$，证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

9. 用极限存在的两个准则，即夹逼定理和单调有界原理，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}=0$ $(a>1)$.

10. 用极限存在准则求数列 $x_n=\dfrac{11\times12\times13\times\cdots\times(n+10)}{2\times5\times8\times11\times\cdots\times(3n-1)}$的极限.

11. 设 $x_1=1$，$x_{n+1}=\sqrt{3+2x_n}$ $(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求出极限.

四、习题解答与提示

1. (1) $\dfrac{1}{2}$. 提示：分子与分母都可作无穷小量的等价代换.　　(2) $\sqrt{a}/2a$.

(3) 1. 提示：当 $x\to0$ 时，$\ln(1+xe^x)\sim xe^x$，$\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\ln[1+(x+\sqrt{1+x^2}-1)]\sim x+\sqrt{1+x^2}-1$.

(4) 1. 提示：有理化.　　(5) $\dfrac{3}{2}$. 提示：设 $\sqrt[6]{1+x}=t$，则 $x\to0$ 时 $t\to1$.　　(6) $\dfrac{1}{2}$. 提示：有理化.

(7) 1. 提示：$\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})=\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi)$.

(8) 0. 提示：三角函数和差化积，无穷小量运算法则.

(9) $\dfrac{1}{2}$. 提示：利用平方差公式化简.　　(10) $\dfrac{1}{1-x}(|x|<1)$. 提示：分子分母同乘 $1-x$.

2. 提示：本题利用第二个重要极限. (1) e^6. (2) e^{-x}. (3) 当 $ab\neq1$ 时，$\dfrac{\ln(ab)}{2}$；
当 $ab=1$ 时，$\ln b$ 或 $\ln a^{-1}$. 提示：利用第二重要极限，和的等价无穷小代换规则. (4) e；
(5) e；(6) e^2；(7) $e^{-\frac{\pi}{2}}$；(8) $e^{\frac{\ln2}{2}}$；(9) e；(10) e^{a-b}.

3. ln2.　　4. $a=1$，$b=\dfrac{2}{3}$.　　5. $a=1$，$b=-1$.

6. 不存在. 提示：左极限为 -1，右极限为 1.

7. $\sqrt{a}$. 提示：$\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)\geqslant\sqrt{x_n\cdot\dfrac{a}{x_n}}=\sqrt{a}>0$，$\{x_n\}$ 单调下降有下界.

8. 1. 提示：$x_{n+1}-x_n=x_n(1-x_n)>0$，$x_{n+1}=2x_n-x_n^2<2x_n<2$.

9. 提示：因为　$a>1$，所以　$\exists\lambda>0$，使 $a=1+\lambda$，有 $a^n=(1+\lambda)^n>\dfrac{n(n-1)}{2}\lambda^2>\dfrac{n^2}{4}\lambda^2$，即 $0<\dfrac{n}{a^n}<\dfrac{4}{n(a-1)^2}$. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{1}{a}<1$，所以当 n 充分大以后，$u_{n+1}<u_n$，即$\dfrac{n}{a_n}$是单调下降的.

10. 0. 提示：$x_n=11\times\dfrac{12}{2}\times\dfrac{13}{5}\times\cdots\times\dfrac{8+10}{3\times7-1}\times\cdots\times\dfrac{n+10}{3(n-1)-1}\times\dfrac{1}{3n-1}$，证明 $n\geqslant8$ 时，有$\dfrac{n+10}{3(n-1)-1}<1$. 设 $M=11\times\dfrac{12}{2}\times\dfrac{13}{5}\times\cdots\times\dfrac{8+10}{3\times7-1}$.

11. 3. 提示：因为　$x_n>0(n=1,2,\cdots)$，$x_{n+1}-x_n<0$，所以　x_n 是单调下降的，且$x_n>0$.

第三节　无穷小的性质与比较

一、内容提要

1. 无穷小的重要性质

(1) 无穷小乘有界量仍为无穷小；

(2) 无穷大的倒数为无穷小；无穷小（不为零）的倒数为无穷大.

2. 等价无穷小的替换原则

设 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)$，$\beta(x)$，$\tilde{\alpha}(x)$，$\tilde{\beta}(x)$ 都是无穷小量，且 $\alpha(x)\sim\tilde{\alpha}(x)$，$\beta(x)\sim$

$\tilde{\beta}(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\tilde{\alpha}(x)}{\beta(x)}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\tilde{\alpha}(x)}{\tilde{\beta}(x)}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\tilde{\beta}(x)}f(x)$.

3. 几个常见的等价无穷小公式（当 $x\to 0$ 时）

$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，$e^x-1\sim x$，$a^x-1\sim x\ln a$，$\ln(1+x)\sim x$，$\sqrt[n]{1+x^m}-1\sim\dfrac{x^m}{n}$.

4. 无穷小阶的运算规律

设 m，n 为正整数，则

(1) $o(x^m)\pm o(x^n)=0(x^l)$，$l=\min(m,n)$；

(2) $o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$；$x^m\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$；$[o(x)]^n=o(x^n)$；

(3) $m\geqslant n$，$o(x^m)/x^n=o(x^{m-n})$（注：两个 $o(\quad)$ 不可以相除）；

(4) $k\cdot o(x^m)=o(kx^m)=o(x^m)$，$k\neq 0$，为常数.

二、例 题 分 析

在这里，围绕着无穷小这个精量展开三个方面的介绍：无穷小等价代换化简极限，无穷小性质求极限，无穷小比较中的反问题.

1. 无穷小等价代换和性质求极限

本节第一部分内容提要中，介绍了无穷小的几个等价代换关系，在计算函数或数列极限时，利用无穷小等价代换，可以简化函数或数列的表达式.

【例 1】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$.

分析 函数中含有对数函数，可考虑使用 $\ln(1+x)\sim x(x\to 0)$ 的无穷小等价关系. 为此，需要将分子、分母利用对数性质作适当变形.

解 分子 $\ln(\sin^2 x+e^x)-x=\ln e^x+\ln\left(1+\dfrac{\sin^2 x}{e^x}\right)-x=\ln\left(1+\dfrac{\sin^2 x}{e^x}\right)\sim\dfrac{\sin^2 x}{e^x}(x\to 0)$.

同理，分母 $\sim\dfrac{x^2}{e^{2x}}$ $(x\to 0)$. 所以 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin^2 x}{e^x}}{\dfrac{x^2}{e^{2x}}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}\cdot x^2}{e^x\cdot x^2}=\lim\limits_{x\to 0}e^x=1$.

【例 2】 利用无穷小等价代换求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}.$$

分析 分子为和差形式，虽然有 $\tan x\sim x$，$\sin x\sim x$ $(x\to 0)$，但是不能直接使用无穷小等价代换. 因为常用的无穷小等价代换求极限的方法，仅适用于乘积中的无穷小因子，对于和与差形式中不能适用无穷小等价代换，为此需要将分子变为乘积形式，再使用无穷小等价代换.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\left(\dfrac{1}{\cos x}-1\right)}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2\cdot\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2}{2}}{x^2\cdot\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2\cos x}=\dfrac{1}{2}$.

△**【例 3】** 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)$.

分析 当 $x\to+\infty$ 时，a^x $(a>0,\ a\neq 1)$，$x^n(n\geqslant 1)$，$\ln x$ 都是无穷大量，但是它们无穷大量的阶不同，从低到高的排列次序为：$\ln x$，x^n，a^x，无穷大量的阶越高，趋于无穷大越快. 所以有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}=0$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}=0$，而 $\sin x+\cos x$ 有界，由无穷小乘有界量仍为无穷小性质