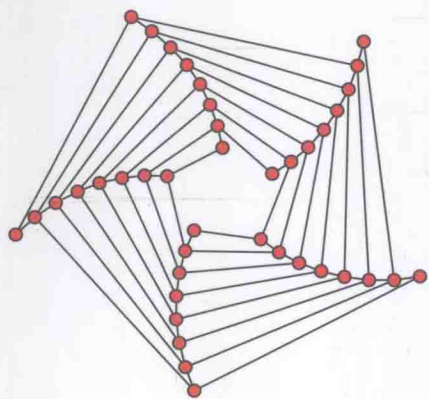


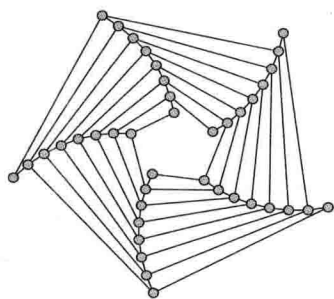


高中校本课程教材

高校自主招生 数学综合拓展教程

◆黄仁寿 编著

湖南师范大学出版社



高中校本课程教材

高校自主招生 数学综合拓展教程

◆黄仁寿 编著

湖南师范大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

高校自主招生数学综合拓展教程 / 黄仁寿编著. —长沙: 湖南师范大学出版社, 2013. 6

ISBN 978 - 7 - 5648 - 1226 - 3

I. ①高… II. ①黄… III. ①中学数学课—高中—升学参考资料

IV. ①G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 113781 号

高校自主招生数学综合拓展教程

黄仁寿 编著

◇策划组稿: 黄道见

◇责任编辑: 黄道见

◇责任校对: 蒋旭东

◇出版发行: 湖南师范大学出版社

地址/长沙市岳麓山 邮编/410081

电话/0731. 88853867 88872751 传真/0731. 88872636

网址/http: //press. hunnu. edu. cn

◇经销: 湖南省新华书店

◇印刷: 长沙瑞和印务有限公司

◇开本: 710 mm × 1000 mm 1/16

◇印张: 17. 5

◇字数: 448 千字

◇版次: 2013 年 6 月第 1 版第 1 次印刷

◇书号: ISBN 978 - 7 - 5648 - 1226 - 3

◇定价: 38. 00 元

作者简介

黄仁寿，湖南平江人，湖南省教科院数学教研员。虽然黄老师拥有诸如中学数学教学研究专业委员会、高中数学竞赛委员会、湖南省数学学会、长沙市夏远景数学名师工作室等许多社会团体兼职的头衔，但他很难提及，或许最令他坚守的还是中学数学教师的角色和身份。

黄老师曾担任长沙市雅礼中学湖南省理科实验班数学教师、数学奥林匹克教练并兼班主任工作。当年的学生大多通过在联赛、冬令营、集训队中的卓越表现获得了保送进入清华、北大、复旦、上海交大、耶鲁(美国)、哈佛(美国)、麻省理工(美国)等著名大学的资格，如今已是相关行业中科技或管理方面的精英了。黄老师常说是因为学生的优秀使他必须具有深入钻研学科的态度和行动，使他“被迫”读了一些专业著作并做了许多数学题目，也习惯性地写一些形似豆腐块的研究文章见诸《数学通报》或《数学通讯》等专业期刊。

今天，作为一名专职数学教育科研工作者，有许多职责范围内的日常事务和科研课题要做，但作为一位数学教师的思考和实践却从未停顿。影响学生发展的真正“基因”是什么？优秀的中学生何以优秀并怎样保障其发展的可持续性？在高校招生改革步入“快车道”的形式下，优秀中学生凭什么脱颖而出？所有这些，都是黄老师正积极探索的主题。本书就是在这个主题下的一次创作实践。

前 言

高校招生制度改革已迈入快车道。“打破一考定终身”，“扩大招生自主权”，“大力推行择优、自主、推荐、定向、破格等多元录取方式”，已成为高校招生中正积极探索和实践的模式。这些改革举措，为优秀高中学生提供了更多的展示自我、脱颖而出的舞台。在这个舞台上，数学是文、理科考生必考科目，是冲击名牌高校的有力抓手，客观上已经成为影响学生发展的举足轻重的科目。

高中学生如何在完成繁重的正常学业过程中，通过校本课程或自主研修，拓展知识面的深度和广度以适应高校自主招生的新形式？我们编写了校本课程教材《高校自主招生数学综合拓展教程》、《高校自主招生数学必修拓展教程》、《高校自主招生数学选修拓展教程》共3册，合力构成反映数学学科自主招生全貌、研习学科能力、适应高校自主招生的自主研修平台。

一本好书，就是一个高效的课堂。本书创作的出发点是致力于打造一个全新的“书课堂”，具体有如下两个最突出的特色：其一是每个页面均设置“旁白”，它像一位倚立身旁的老师，时刻为读者指点学习的迷津或将思考链接到相关的领域；其二是书中所有例题均按“思维指向”、“问题探究”、“简明解答”、“总结反思”4个步骤展开讲解。“思维指向”是从宏观上解决问题的方式方法；“问题探究”是方式方法的精细化；“简明解答”是解题过程的准确表述；“总结反思”是数学思考的进一步延续和升华。这种构思，旨在为不同需求层面的读者提供个性化的学习案例，引领他们养成良好的数学思考习惯，建构科学的世界观和方法论。

本书通过4个章节探究了高校自主招生中数学学科的能力建构和发展途径，并锐意为学生构建一个“品学兼修”的学习平台。这里的“品”，特指优良的学习品质和科学的学习方法；“学”，则指高校自主招生中具体的数学学科内容。我们希望读者通过本书学习，不但能理解高校自主招生中数学的重点、难点和热点，而且知道用最有效的方式突破数学学科能力的瓶颈。4个章节依次为：

第1章，成功者的个性特征。自主招生命题的最基本立意就是有利于高校选拔合格的人才。本章通过若干鲜活的案例，透析了青年学生可持续发展的个性特征和

高校对人才数学素养的期待和考查方式,堪称高中学生备考自主招生的“通识”。

第2章,数学思考的宏观策略。思维是数学能力的核心。本书从若干方面介绍了处理自主招生中数学问题的宏观思路和解题策略。数学问题的解法是如何想到的?这是困扰学生的疑难,本章旨在这一方面为学生释疑解惑。

第3章,经典数学方法综述。数学方法是数学能力的重要载体。自主招生数学命题中有许多高中数学常规教学中不被重视或不作介绍的方法体系,本章对此作了较为全面的介绍,是高中学生从数学方法角度的一次拓展。

第4章,热点题材专题拓展。植根高中数学教材但又不拘泥于教材,这是自主招生的一个突出特点。“不拘泥”的主要表现就是命题“触须”常伸展到高中数学内容的“最近发展区”——高等数学基础部分。本章的立意就是对这些内容作一些较为全面的阐述。

窥一斑而知全豹。本书所有例、习题均选自名牌高校自主招生真题,因而具有较强的资料性和可读性,既可作为高中师生拓展高中数学知识面的课外读物,也可作为优秀的高中学生备考高校自主招生的相关教材。高一、高二的学生在使用本丛书“必修拓展”和“选修拓展”分册的同时选择性地阅读本书相关章节,对优化学习品质,提升学习效果,应当有较大的裨益。

本书的创作是作者对高中新课程学生读物的一个初步尝试,存在的问题一定不少。作者将以研究课题的方式为结构和内容的进一步优化做长期的工作,期待广大读者在使用中发现书中存在的问题与不足,并不吝赐教,以便再版时修订或改进。

作者

2013年5月

目 录

第 1 章 成功者的个性特征	(1)
第 1 节 积极的情感态度	(2)
☐ 情感的向上性和稳定性	
☐ 习惯的有力作用	
☐ 经验是个好东西	
思考与训练	
第 2 节 数学的理性精神	(8)
☐ 领悟概念的本质特征	
☐ 数学的理性并非是纯演绎的	
☐ 让理性战胜你的直觉	
思考与训练	
第 3 节 这样突破最有效	(15)
☐ 重视数学的通性通法	
☐ 理顺知识的来龙去脉	
☐ 掌握一些处理问题的套路	
☐ 加强数学文化的修养	
思考与训练	
第 2 章 数学思考的宏观策略	(22)
第 1 节 化简与从简的思维倾向	(23)
☐ 将问题化归为特定的形式	
☐ 通过代换简化问题的结构	
☐ 将问题分解或退化到简单情形	
思考与训练	
第 2 节 整体和局部的协同处理	(37)
☐ 用整体观念考察数学问题	
☐ 从“部分解决”到完全解题	
☐ 整体和局部的协同处理	
思考与训练	

第3节 分步与分类的思考策略 (54)

☐分步,对数学问题的纵向分解

☐分类,对数学问题的横向分解

☐引理,分步与分类的一种特殊形式

思考与训练

第4节 问题的等价转化 (69)

☐问题的数形相互转化

☐问题的换一种说法

☐问题的逆向思考

思考与训练

第5节 问题的一般化与特殊化 (81)

☐特殊的试探作用

☐化归为一般化的数学模型

☐熟知思路与方法的合理迁移

思考与训练

第6节 试探与猜想 (92)

☐简化的引路作用

☐极端的探究作用

☐类比的引导作用

思考与训练

第3章 经典数学方法综述 (102)

第1节 数学归纳法 (103)

☐第一数学归纳法

☐串值数学归纳法

☐跳跃数学归纳法

☐反向数学归纳法

思考与训练

第2节 设计构造法 (112)

☐设计构造函数模型

☐设计构造方程或不等式模型

☐设计构造数列模型

☐设计构造几何图形

思考与训练

第3节 局部结构替换法	(122)
☐ 三角函数值替换	
☐ 分母平均值替换法	
☐ 结构等价替换	
思考与训练	
第4节 微微调整逼近法	(134)
☐ 性态调整逼近法	
☐ 数值调整逼近法	
☐ 位置调整逼近法	
思考与训练	
第5节 函数解析法	(142)
☐ 构造满足某种条件的函数	
☐ 函数的某些性态分析	
☐ 函数特征的理解和应用	
思考与训练	
第4章 热点题材专题拓展	(149)
第1节 不等式的证明和应用	(150)
☐ 平均值不等式的应用	
☐ 柯西不等式的应用	
☐ 凸函数的琴生不等式	
☐ 证明不等式的三种思维方式	
思考与训练	
第2节 简单的递推数列和迭代问题	(163)
☐ 等差、等比型递推迭代问题	
☐ 一阶线型递推迭代问题	
☐ 二阶齐次线型递推迭代型问题	
☐ 分式型递推迭代问题	
思考与训练	
第3节 统计与概率论基础	(175)
☐ 基本计数公式及其应用	
☐ 概率的基本性质及应用	
☐ 两种概型的概率的计算	
☐ 数学期望与方差的应用	

思考与训练

第4节 数列的极限和函数的连续性 (190)

- ☐ 数列极限的运算法则及应用
- ☐ 几个特殊数列的极限的应用
- ☐ 无穷等比数列各项的和及其应用
- ☐ 连续函数的性质及应用

思考与训练

第5节 矩阵和行列式的基础应用 (200)

- ☐ 矩阵的定义和运算
- ☐ 矩阵变换和行列式的计算
- ☐ 利用行列式研究线性方程组的解
- ☐ 利用行列式计算面积和体积

思考与训练

第6节 组合数学基础 (210)

- ☐ 简单的组合不等式
- ☐ 抽屉原理和平均值原理
- ☐ 简单的组合极值问题
- ☐ 存在性和操作性问题

思考与训练

第7节 初等数论基础 (222)

- ☐ 整除的性质及应用
- ☐ 最大公约数和最小公倍数的应用
- ☐ 同余问题
- ☐ 不定方程问题
- ☐ 高斯函数问题

思考与训练

第8节 求解几何问题的一般思路与方法 (237)

- ☐ 利用计算法推证几何关系
- ☐ 利用坐标法使几何问题代数化
- ☐ 平面几何基本方法的应用
- ☐ 几个重要定理和应用

思考与训练

思考与训练·参考答案 (250)

第1章 成功者的个性特征

在未来的十年中,领导世界的国家将是在科学知识的解释和运用方面起领导作用的国家.整个科学的基础又是一个不断增长的数学知识总体.我们越来越多地用数学模型指导我们探索未知的工作.

——瑞典数学家 费尔(H. F. Fehr)

本章导航

第1节 积极的情感态度 / 2

第2节 数学的理性精神 / 8

第3节 这样突破最有效 / 15

第1节 积极的情感态度

有三个因素对数学学习产生重要的影响. 它们是情感态度、思维方法和学习行动. 在这三个因素中, 情感态度又起着统率作用——它直接影响着思维方法和学习行动. 这里的情感态度既指对社会的基本看法和对数学本身的浓厚兴趣, 更强调因为对未来发展的美好期待所产生的学习数学的强大动能.

□ 情感的向上性和稳定性

情感的向上性和稳定性, 是指个人的个性心理和价值取向符合社会的主流需求, 并保持着不会轻易被改变的特征. 情感态度在人的发展中发挥着重要作用, 正因为如此, 高校自主招生中常以不同形式进行着综合考察.

比如, 自主招生面试就是一种通过精心设计, 以交流和观察为主要手段, 来了解考生的情感态度等综合信息为目的的综合测试方式. 在面试过程中, 考官可以依据考生当场对所提问题的回答, 考查综合分析问题的能力、人际交往能力、临堂应变能力、组织表达能力等等.

【例1】 请问你是如何看待范跑跑的?

【思维指向】 简要评价范跑跑事件, 表明自己珍惜生命, 爱护学生, 忠于职业操守的情感态度.

【问题探究】 范跑跑是范美忠的别名, 是四川都江堰光亚高中的一名教师.

在2009年汶川大地震中, 他高喊着“地震了”冲出教室. 他在博客上说“到操场后发现没有一个学生在身旁.”幸而那些学生都没有受伤. 学生问他为什么不尝试帮助他们逃生, 范美忠回答道: “我从来就不是一个勇于献身的人, 只关心自己的生命.”后来范美忠又通过博客表明“只有为我女儿我才可能考虑牺牲自我, 其他的人在这种情况下我是不会管的”. 这种解释无疑又

情感态度、思维方法和学习行动, 这是支撑着人的发展的具有着稳定性的“三角形”, 三者缺一不可.

浙江大学2013年保送生测试题要求学生回答十八届一中全会选举产生的7名政治局常委名单——试题提供了4名常委名单, 要求写出另外3位. 其考查的目标定位就是对考生情感态度的特别关注.

此题为2009年华中师范大学自主招生面试题.

请登录 <http://www.baidu.com> 百度一下“范跑跑”, 获得更多的相关信息.

进一步加深了对范跑跑教师职业情感的否定。

作为报考师范院校的考生,要通过对范跑跑事件的评价,表明自己珍惜生命、爱护学生、忠于职业操守的情感态度。听说当年湖北荆州一名女生的回答非常直接:“既然选择了老师这个职业,就应该把学生当作自己的孩子看待。跑得出地震的人能够存活,跑不出自私的人永远不会幸福。”这样的回答,充分表明了该学生情感的向上性和稳定性。

【简明解答】(仅当参考)任何职业都有其特定的操守,教师的职业操守就是热爱自己的学生,并向他们无私传播科学文化知识和进行理想前途教育,为他们的终身发展奠基。

灾难来临,教师理当是学生的“保护神”。一个教师如果连最起码的安全感都不能给予学生,就不可能得到学生的爱戴和信赖,教育和教学上的效果一定苍白无力。从这个意义上来说,范跑跑不是一个合格的教师。“跑得出地震的人能够存活,跑不出自私的人永远不会幸福”,范跑跑的师德表现,必将遭受具有良知和职业操守的人们的申讨和谴责。

【总结反思】自主招生面试非常重视考生对社会的认知能力。简单来说,考生必须对社会的方方面面有应该的关注,必须具有心怀天下的气度,否则很难在面试中拿到高分。在考场的强烈刺激下,考生对社会的认知能力是无法伪装的,因此考生要加强这方面的修养,关注社会热点。试想,如果考生对当年范跑跑事件这样热门的话题一无所知,他可能作出满意的答卷吗?

□ 习惯的有力作用

习惯是指长时间里养成的,一时不易被改变的思维方式或行为倾向。习惯是成就事业的要素,学好数学,在高考或高校自主招生中脱颖而出,同样有赖于良好的学习习惯。稳定向上的积极心态、井然有序的学习安排、自觉主动的探究精神都是习惯的组成部分。

跑得出地震的人能够存活,跑不出自私的人永远不会幸福。

——一个考生的回答

2013年浙江大学招生人士说,浙大想要招的保送生,不是“两耳不闻窗外事,一心只读教科书”的学生。这些考生马上就要成人了,不能对社会没有关注,没有思考”。这些话充分表明了高校在选拔新生方面的基本的人才观念。

人是习惯的奴隶。

——柏拉图语

【例 2】 你平时是怎样学习的？

【思维指向】 这是一道再平常不过的试题。回答这个问题，考生只要如实地把自己平时的学习方式清晰地表达出来即可。

【问题探究】 题目虽然平常，但主考人能根据考生的回答，了解考生的一些基本的学习状况。考生回答时要简要介绍自己的学习习惯、学习内容、学习方法等，要表明自己充分具备进一步深造的巨大潜力。

【简明解答】（仅供参考）“有计划，堂堂清，在不断的反思中寻求超越。”这就是我学习的基本规律。

整个人生我有自己的规划，这里就不作具体说明了；高中三年我有个规划，这就是全面打好各学科基础，拓宽知识面，力争考入理想的大学，为进一步发展站上一个较高的平台；整个学期我也是有计划的——每一学科除按老师安排完成学习任务之外，还有自己的课外阅读和活动安排，而且在执行方面从不含糊，并追求卓越的效果和成功的体验；每一天的学习我也是按部就班进行的，读完哪些书、做完哪些题、和老师或同学探讨哪些问题，我都是准备充分和心中有数。

每堂课的教学内容，从概念到方法、能力，我坚持不留空白不欠账，当堂解决问题。这样循序渐进，基础也就扎实了。

反思是我的学习习惯。每节课后、每天之后、做完每一道题、考完每一次试、进行过每一次活动……我都坚持进行反思。这个习惯，不但加深了对学习内容的理解和掌握，而且使我能更加了解自己的真实情况，及时调整学习方式，保持着学习上的高效状态。

【总结反思】 这类试题较为常见，难度也不大，应对这类试题要求考生有较为明晰的自我认识，回答时还应注意表述的条理性。

作者在中学任教时有一位十分优秀的学生。该生的文具盒中除文具之外总放有一张便条，便条上列出了当天的重要活动、必须完成的学习任务以及需要向老师或同学请教的疑难问题。她从不“开夜车”，生活和学习安排得很有条理。在她介绍高三后

此题为 2010 年复旦大学自主招生面试题。

2013 年，浙江大学招生人士表示：“浙大希望能在面试中了解学生发现、思考、解决问题的能力，去了解这些孩子有没有批判性或者创造性的思维。”（见 edu.cn.cn）

在当年的高考中，该同学以高分考取国内著名大学，后又在美国耶鲁大学获得金融学博士学位，现供职于美国黑石投资公司。她通过电子邮件向她的老师汇报她的职业理想是“师夷之长，报效国家”。

期临考前 20 天的学习经验时,她提供的做法是:每天定时(约 1 小时)、定量(约高考数学题量的一半,题型比例与之匹配)、系统化(整个内容安排覆盖高考数学的全部)、高质量(包括选题的针对性、新颖性,做题的严格要求等方面)做一些试题,做完后进行科学的总结、评估和反思工作。

从该同学关于“怎样学习”的表述,充分表明了她的学习有条不紊和积极主动.这正是该同学进一步发展的重要的潜能和不竭动力。

□ 经验是个好东西

数学上的经验指的是面对数学问题,能自觉产生一种观察和思考上的倾向性.人们常将“有经验”比作聪明,其实两者在本质上是不同的.将一道题目做出来,涉及的因素很多,聪明一点,可能灵光一闪,想到了解题方法.但靠这种方法解出题目的机会是很少的.大多数情况下,能否将一道题目解出来,就看是否对与此有关的题是否具有经验.经验是个好东西,常比脑子灵活更为有效。

【例 3】 6 红,4 黄,1 蓝,摸几个球能保证摸三个同色的? 52 张牌(没有王),四种花色,抽出几张能保证有七张相同花色?

【思维指向】 此题的解答基于考生的生活经验,也可由抽屉原理直接得出结论。

【问题探究】 设想最“坏”的情况,从“6 红,4 黄,1 蓝”中摸球,摸到了 1 个蓝色球、2 个红球、3 个黄球或 3 个红球、2 个黄球。

从“52 张牌,四种花色”中抽牌,三种花色中均抽出 6 张,只有一种花色中抽出 1 张。

【简明解答】 由 $1+2+3=6$,可知从“6 红,4 黄,1 蓝”中摸 6 个球,能保证摸出三个同色的。

由 $6+6+6+7=25$,可知从“52 张牌,四种花色”中抽 25 张

“熟读唐诗三百首,不会写诗也会吟。”在数学学习中经验也具有这种效能。

此题为 2013 年复旦大学保送生测试面试题。

抽屉原理就是直接由经验总结出来的。

牌,能保证有七张相同花色的.

【总结反思】此题的数学背景为抽屉原理,但直接由生活经验也可写出结论.“平凡之中见真奇”,此题也反映了高校自主招生命题的这一特色.

【例 4】 设 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 是各不相同的正整数, $a \geq 2$, 求证:

$$\left(\frac{1}{a_1}\right)^a + \left(\frac{1}{a_2}\right)^a + \left(\frac{1}{a_3}\right)^a + \dots + \left(\frac{1}{a_n}\right)^a < 2.$$

【思维指向】将欲证不等式左边 $\left(\frac{1}{a_1}\right)^a + \left(\frac{1}{a_2}\right)^a + \left(\frac{1}{a_3}\right)^a + \dots + \left(\frac{1}{a_n}\right)^a$ 进行适当的放缩(放大),使之更好把握,最终推出“ <2 ”的结论.

【问题探究】由于 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 的条件具有不确定性,由经验告诉我们可考虑最小的自然数 $1, 2, 3, \dots, n$ 的组合. 显然

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{a_1}\right)^a + \left(\frac{1}{a_2}\right)^a + \left(\frac{1}{a_3}\right)^a + \dots + \left(\frac{1}{a_n}\right)^a \\ & \leq \left(\frac{1}{1}\right)^a + \left(\frac{1}{2}\right)^a + \left(\frac{1}{3}\right)^a + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^a \end{aligned}$$

因而这种放大是有理由的.

又注意到 $a \geq 2$, 将欲证不等式中的字母 a 换成 2, 不等式左边进一步“放大”即

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{1}\right)^a + \left(\frac{1}{2}\right)^a + \left(\frac{1}{3}\right)^a + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^a \\ & \leq \left(\frac{1}{1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \end{aligned}$$

故这一步放大又使证明过程推进了一步.

接下来证明 $\left(\frac{1}{1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \leq 2$ 的工作,又可以凭非常熟悉的放缩法的经验处理了.

【简明解答】不妨设 $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$, 则有 $a_i > i$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$), 根据幂函数和指数函数的单调性, 可得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{a_1}\right)^a + \left(\frac{1}{a_2}\right)^a + \left(\frac{1}{a_3}\right)^a + \dots + \left(\frac{1}{a_n}\right)^a \\ & \leq \left(\frac{1}{1}\right)^a + \left(\frac{1}{2}\right)^a + \left(\frac{1}{3}\right)^a + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^a \end{aligned}$$

抽屉原理,也称鸽巢原理或狄利克雷原理,欲了解详情,请在 baidu.com 百度“抽屉原理”.

此题为 2003 年复旦大学保送生综合测试题.

此不等式左边不能求和,还得作进一步的放缩.这也是经验的作用.

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\
&< 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} \\
&= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\
&= 2 - \frac{1}{n} < 2
\end{aligned}$$

证毕.

总结反思 经验是个好东西！看到一个题目的结构或某个局部，就能立马联想到类似的问题及其解法，这就是经验的作用。本题就是在经验的作用下构建解题过程的。经验告诉我们，不等式中含有形如 $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ 的局部时，通常的思路就是先对其进行放缩，再用“裂项法”求和。根据需要放大或是缩小采用下列不等式的右边或左边。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \\
&\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}.
\end{aligned}$$

常说“联想出技巧”，这不也是强调经验的作用吗？

思考与训练 ★★★

★★★

1. 请简述你学习数学的动机和动力。

2. 笔者曾有一位十分优秀的学生，在中国某名牌高校本科毕业后考入美国耶鲁大学攻读博士学位，之后就职于美国黑石投资公司从事金融计算工作。她在给本人的电子邮件中表明了她留在美国工作的动机是“师夷之长，报效国家”。请你从积极的情感态度与人的可持续发展的角度，对该同学这样的动机和行为作出评价。