

清华
GCT

2014硕士学位研究生入学资格考试

GCT

数学

模拟试题与解析

刘庆华 主编



总第11版

清华大学出版社



2014 硕士学位研究生入学资格考试



模拟试题与解析

刘庆华 主编

关 治 扈志明 编

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书根据硕士学位研究生入学资格考试指南的要求,编写了12套模拟试题,每套试题包含25道单项选择题,其中算术、初等代数、几何与三角三部分有15道题,一元函数微积分、线性代数两部分有10道题,书中给出了每套模拟试题的答案与解析过程,供考生们参考。

本书可供准备参加硕士学位研究生入学资格考试的备考人员以及辅导教师使用。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

2014 硕士学位研究生入学资格考试 GCT 数学模拟试题与解析/刘庆华主编.--北京:清华大学出版社,2014 (2014.4 重印)

ISBN 978-7-302-35538-0

I. ①2… II. ①刘… III. ①高等数学—研究生—入学考试—题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 034922 号

责任编辑:刘 颖

封面设计:傅瑞学

责任校对:赵丽敏

责任印制:何 芊

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社总机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:北京鑫海金澳胶印有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×230mm

印 张:9.5

字 数:214 千字

版 次:2014 年 3 月第 1 版

印 次:2014 年 4 月第 2 次印刷

印 数:11001~14000

定 价:20.00 元

产品编号:058446-01

前言

本书是根据硕士学位研究生入学资格考试指南编写的数学辅导材料,以方便考生备考。

按照现在的复习备考方式,大致将复习的过程分为三个阶段:全面复习阶段、归纳总结阶段和冲刺阶段。在每个阶段考生所选用的辅导材料是有区别的。在全面复习阶段,一般选用涵盖考试大纲所涉及的知识点的教材(我们所编写的《2014 硕士学位研究生入学资格考试 GCT 数学考前辅导教程》就是为此准备的),此阶段的主要任务是将要考的知识点搞清楚、弄明白,扫清知识上的盲点。在归纳总结阶段,是对前一阶段所复习知识的浓缩和提升,以便于自己从全局上把握所复习的知识,突出重点和难点。由于各自的知识背景和复习效果不同,所以浓缩和提升的程度也不同,因此,这一阶段可选择材料较少,一些辅导教师开设串讲课来帮助备考者归纳总结,考生也可以根据自身特点,自己总结或提炼此阶段的复习材料和复习方法。在冲刺阶段,大多采取做模拟试题的方式,通过做模拟试题来检查自己对知识点的掌握程度以及灵活运用所学知识处理问题的能力,同时也可以从中发现自己的薄弱点,以便及时调整复习的方式和方法。很多考生在第二阶段就开始有针对性地做一些题目,帮助自己归纳总结,训练提高。另外,也可以通过做模拟试题来熟悉试卷的出题方式和应对考试的一些措施及技巧。

为了便于考生检验全面复习阶段的效果,顺利、便捷地开展归纳总结阶段的复习,我们在编写《2014 硕士学位研究生入学资格考试 GCT 数学考前辅导教程》的基础上,编写了本书,以帮助考生在备考阶段准备得更加充分,提升应试能力,以利在考试中取得好的成绩。

考试大纲中关于数学内容的考试要求是:测试考生所具有的数学方面的基础知识和基本思想方法,逻辑思维能力,数学运算能力,空间想象能力以及运用所掌握的数学知识和方法分析问题和解决问题的能力。据此,我们在模拟试题的选择上,既考虑到试题的知识覆盖面,又注意到难易程度,以利于考生通过做模拟试题能够全面检查对所复习知识的掌握程度。在模拟试题的设计上,既侧重知识的重点和难点,也注意考查重点和难点的方式与方法,以便于考查考生对重

点和难点的掌握程度以及对这些知识点的灵活运用情况。

根据考试指南的要求,我们在此模拟试题集中编写了 12 套模拟试题. 每套试题包含 25 道单项选择题,其中算术、初等代数、几何与三角三部分有 15 道题,一元函数微积分、线性代数两部分有 10 道题. 在书的后半部分给出了每套模拟试题的答案与解析过程,供考生们参考.

由于 GCT 在国内是一种类型比较新颖的考试,准备 GCT 考试与准备传统的考试有所不同,为了使考生尽快地熟悉和掌握这一考试形式,对过去的考题做一点总结和分析是十分必要的. 下面用表格的形式将过去 11 年中数学基础能力测试题涉及的知识点加以汇总,以便考生能够清晰地了解考点的分布情况以及各考点的出题频次,更有针对性地进行复习备考.

科 目	内 容	具体知识点	出题年份
算 术	数的概念与运算	数的概念与性质	2003, 2003, 2009, 2011
		分数运算	2003, 2008, 2011
		比与百分数的运算	2003, 2004, 2005, 2006, 2006, 2007, 2008, 2010, 2010, 2011
		算术表达式求值	2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2012, 2013
	简单应用问题	植树问题	2003, 2004, 2008
		运动问题	2004, 2007, 2008, 2009, 2011
		求单位量与求总量的问题	2004, 2005, 2012, 2013
		其他问题	2006, 2012, 2013
初等代数	数与代数式	乘方、开方运算	2003
		绝对值的概念与性质	2004, 2011, 2012
		复数的基本概念与简单运算	2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013
		简单代数公式	2005, 2005, 2007, 2007, 2011, 2013
	集合与函数	集合与函数的基本性质	2003, 2007, 2009, 2010, 2010, 2011, 2012, 2013, 2013
	代数方程和一元二次函数	一元二次方程	2004, 2006, 2007, 2008, 2010, 2013
		二元一次方程组	2007
		一元二次函数	2003, 2006, 2008, 2009, 2012
	不等式	分式不等式	2004, 2012
	数列	等差数列, 等比数列	2005, 2006, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013
	排列、组合、二项式定理	组合公式	2007, 2008, 2009
	古典概率问题	等可能事件的概率	2004, 2005, 2006, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013
		简单概率公式	2003, 2007
几何与三角	平面几何	求面积问题	2003, 2004, 2005, 2006, 2006, 2008, 2009, 2009, 2011, 2012, 2013
		求长度问题	2004, 2004, 2005, 2010, 2013
		求角度问题	2004, 2006, 2007, 2011

科 目	内 容	具体知识点	出题年份
几何与三角	空间几何图形	空间几何体	2003, 2003, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013
	三角函数	特殊角的三角函数值	2005, 2007, 2008, 2009, 2010, 2012
	平面解析几何	平面直线问题	2003, 2003, 2004, 2006, 2009, 2010, 2012, 2013
		平面几何与平面解析几何的综合题	2005, 2005, 2007, 2008, 2010, 2011
		二次曲线问题	2005, 2006, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013
一元函数 微积分	函数、极限、连续	函数	2005, 2008, 2009, 2012, 2013
		极限	2005, 2007, 2009, 2010, 2011, 2012
		连续	2007
	导数与微分的概念与运算	基本概念	2003, 2005, 2006, 2008, 2010, 2011, 2012, 2013
		运算	2004, 2007, 2009, 2010, 2012, 2013
	导数的应用	利用导数判定单调性、求极值	2003, 2003, 2004, 2005, 2006, 2006, 2006, 2007, 2008, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013
	不定积分	分部积分与换元积分	2005, 2007
	定积分	定积分的概念与性质	2003, 2005, 2007, 2009, 2011, 2011, 2013
		定积分的运算	2003, 2004, 2006, 2006, 2008, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013
		定积分的应用	2004, 2004, 2010
线性代数	行列式	行列式的性质及计算	2003, 2004, 2005, 2007, 2009, 2012
	矩阵	矩阵的运算与性质	2003, 2003, 2005, 2006, 2008, 2010, 2011
		逆矩阵	2004, 2007, 2009, 2011, 2012, 2013
	向量组	线性相关与线性无关	2004, 2006
		秩与极大线性无关组	2005, 2008, 2010, 2013
	线性方程组	齐次线性方程组	2003, 2004, 2006, 2008, 2013
		非齐次线性方程组	2007, 2009, 2010, 2011, 2012
	矩阵的特征值和特征向量	基本概念与运算	2003, 2005, 2006, 2008, 2012, 2013
		可对角化的充要条件	2004, 2007, 2009, 2010, 2011

由于 GCT 考试是只有四选一这种形式的客观题,考生除了复习好有关的内容,掌握基本的分析问题和解析问题的常用方法外,还应了解处理选择题时的一些解题技巧.下面就以一些题目为例,简要地介绍几种技巧.

一、排除法

由于在 GCT 考试中四个选项中有且仅有一个选项正确的,所以如果能将错误的排除,

剩下的自然就是正确选项. 大部分情况下, 即使只排除掉一两个错误选项, 对找到正确选项也是很有帮助的. 因此排除法是处理选择题的一个有效方法.

1. (2006) 矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

若 $\mathbf{A}$ 的特征值和 $\mathbf{B}$ 的特征值对应相等, 则其中 _____.

(A) $x=1, y=1$

(B) $x=0, y=1$

(C) $x=-1, y=0$

(D) $x=0, y=-1$

由矩阵的特征值的和等于其对角元素和的性质, 以及 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 两矩阵的特征值相等可得

$$2+0+x=2+y-1, \quad \text{即} \quad x=y-1.$$

从而可得只有选项 (B), (C) 满足此条件, 于是排除了选项 (A), (D).

如果选选项 (C), 则矩阵 $\mathbf{B}$ 有零特征值, 故矩阵 $\mathbf{A}$ 也应有零特征值, 由此可得矩阵 $\mathbf{A}$ 的行列式应等于零. 但实际计算得 $|\mathbf{A}| = -2$, 所以排除选项 (C). 故正确的选项为 (B).

2. (2005) 三个不相同的非零实数 a, b, c 成等差数列, 又 a, c, b 恰成等比数列, 则 $\frac{a}{b}$ 等于 _____.

(A) 4

(B) 2

(C) -4

(D) -2

根据条件可知 $c^2 = ab$, 从而 $\frac{a}{b} > 0$, 所以选项 (C), (D) 错误. 又 $2b = a + c$, 即 $2 = \frac{a}{b} + \frac{c}{b}$,

且 $\frac{c}{b} \neq 0$, 所以 $\frac{a}{b} \neq 2$, 故选项 (B) 错误. 即正确选项为 (A).

3. (2007) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$, 则必定 _____.

(A) $f(1) = 4$

(B) $f(x)$ 在 $x=1$ 处无定义

(C) 在 $x=1$ 的某邻域 ($x \neq 1$), $f(x) > 2$

(D) 在 $x=1$ 的某邻域 ($x \neq 1$), $f(x) \neq 4$

取 $f(x) = \frac{2(x^2-1)}{x-1}$ 排除选项 (A), 取 $f(x) = 4$ 排除选项 (B), (D). 故正确选项为 (C).

二、特殊值代入法

题目中给出的大多是一些满足一定条件的变量或函数. 对这些量成立的结论对满足这些条件的特殊数或特殊函数自然也成立. 通过选取合适的特殊值, 将正确选项找出是处理选择题的最有效方法之一.

1. 设 a, b, m 均为大于零的实数, 且 $b > a$, 则 $\frac{a+m}{b+m}$ 与 $\frac{a}{b}$ 谁大? _____.

(A) 前者

(B) 后者

(C) 一样大

(D) 无法确定

对于此题, 如果令 $a=1, b=2, m=1$, 及 $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$, 便知选项 (A) 正确.

2. (2008) 设

$$f(x) = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 1-x, & x < 0, \end{cases}$$

则有_____.

(A) $f(f(x)) = (f(x))^2$

(B) $f(f(x)) = f(x)$

(C) $f(f(x)) > f(x)$

(D) $f(f(x)) < f(x)$

此题中函数的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 我们可以取 x 的特殊值来加以判断. 比如取 $x=c>0$, 则 $f(c)=c>0$, 于是 $f(f(c))=f(c)=c$. 只要 $c \neq 1$, 则 $(f(c))^2 = c^2 \neq c = f(f(c))$. 所以正确的选项为(B).

3. (2005) 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 且 $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n} (n=1, 2, \dots)$, 则 $f'(0) =$ _____.

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

作为选择题, 本题的简单方法是取 $f(x)=2x$, 则 $f(x)$ 满足题中条件, 且 $f'(x)=2$, 特别地有 $f'(0)=2$. 故选项(C)正确.

4. (2012) 若 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 的三边之长, 则 $|a-b-c| + |b-c-a| - |c-a-b| =$ _____.

(A) $a+b-c$

(B) $b+c-a$

(C) $3a-b-c$

(D) $3c-a-b$

既然这里是对一般三角形来讲的, 那么, 对于特殊的三角形自然成立. 最简单的三角形是各边长均为 1 的等边三角形. 但这样取时, 区分不出各个选项. 可取一个特殊的直角三角形, 即各边长分别为 3, 4, 5 的直角三角形.

取 $a=3, b=4, c=5$, 则

$$\begin{aligned} |a-b-c| + |b-c-a| - |c-a-b| &= |3-4-5| + |4-5-3| - |5-3-4| \\ &= 6+4-2=8, \end{aligned}$$

$$a+b-c = 3+4-5=2, \quad b+c-a = 4+5-3=6,$$

$$3a-b-c = 3 \times 3 - 4 - 5 = 0, \quad 3c-a-b = 3 \times 5 - 3 - 4 = 8.$$

故正确的选项为(D).

5. (2006) 设 n 为正整数, 在 1 与 $n+1$ 之间插入 n 个正数, 使这 $n+2$ 个数成等比数列, 则所插入的 n 个正数之积等于_____.

(A) $(1+n)^{\frac{n}{2}}$

(B) $(1+n)^n$

(C) $(1+n)^{2n}$

(D) $(1+n)^{3n}$

取 $n=1$, 则数列为 $1, \sqrt{2}, 2$, 插入的数为 $\sqrt{2} = (1+1)^{\frac{1}{2}}$. 易知选项(A)正确.

6. (2007) 行列式 $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$ 展开式中的常数项为_____.

(A) 4

(B) 2

(C) 1

(D) 0

行列式 $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$ 的常数项是它在 $x=0$ 时值, 即 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, 由于此行列式的

第一行与第二行相同, 故其值为 0. 即选项(D)正确.

7. (2009) 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的左、右焦点分别是 F_1 和 F_2 . 若 P 是该双曲线右支上异于顶点的一点, 则以线段 PF_2 为直径的圆与以该双曲线实轴为直径的圆的位置关系是_____.

- (A) 相离 (B) 外切 (C) 相交 (D) 内切

作为选择题, 不妨选一特殊的双曲线和特殊的 P 点. 例如, 取 $a=3, b=4$, 则右焦点 F_2 为 $(5, 0)$. 再取双曲线右支上与 F_2 具有相同横坐标的一点 $P(5, \frac{16}{3})$, 则以 PF_2 为直径的圆的圆心坐标为 $M(5, \frac{8}{3})$, 半径为 $\frac{8}{3}$. 以实轴为直径的圆的圆心为 $O(0, 0)$, 所以两圆圆心距离为

$$|OM| = \sqrt{5^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{3^2 + 2 \times 3 \times \frac{8}{3} + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = 3 + \frac{8}{3},$$

即两圆圆心间的距离等于两圆的半径之和, 所以两圆相切. 故(B)选项正确.

三、选项代入法

对于选择题来说, 题目中的选项也包含许多可以利用的信息, 比如将题中给出的选项代入题干中进行验证就是处理选择题的一个常用方法.

1. (2004) 设 a, b, c 均为正数, 若 $\frac{c}{a+b} < \frac{a}{b+c} < \frac{b}{c+a}$, 则_____.

- (A) $c < a < b$ (B) $b < c < a$ (C) $a < b < c$ (D) $c < b < a$

本题直接求解题干中的分式不等式比较复杂, 但如果将选项(A)代入题干进行验证则非常简单.

2. (2005) 设 $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, 则 A 的对应于特征值 2 的一个特征向量是_____.

- (A) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

本题根据特征值和特征向量的定义, 利用选项代入法易知正确选项为(D).

3. $\int e^{x^2 + \ln x} dx = () + C$ (C 为常数).

- (A) e^{x^2} (B) $\frac{1}{2}e^{x^2}$ (C) $2e^{x^2}$ (D) $(1+2x^2)e^{x^2}$

由于 $(e^{x^2})' = 2xe^{x^2} \neq xe^{x^2}$, 所以排除掉选项(A); 由于 $(\frac{1}{2}e^{x^2})' = xe^{x^2} = e^{x^2 + \ln x}$, 所以选项(B)正确.

4. (2007) 方程 $\sqrt{x+y-2} + |x+2y| = 0$ 的解为 _____.

- (A) $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$

易知

$$\begin{cases} x=0, \\ y=2, \end{cases} \quad \begin{cases} x=3, \\ y=1 \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$$

都不满足题设方程, 所以正确选项为(D).

四、数形结合法

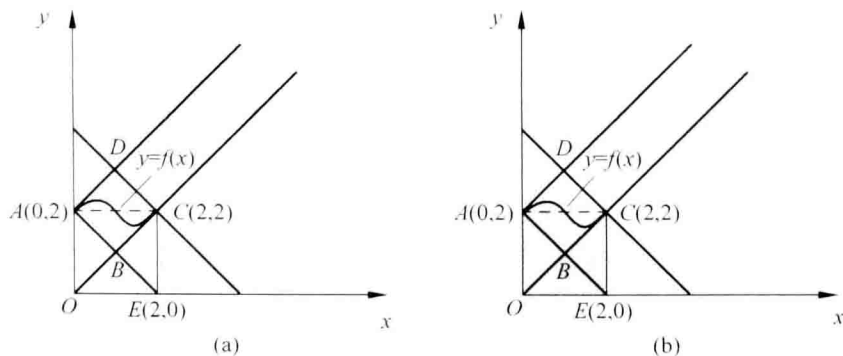
许多情形数与形是密切结合的. 借助图形可以直观地理解数(函数)所反映的内容, 因此, 可以将题目与题目中所涉及的函数所对应的图形结合起来, 寻找解题的捷径.

1. (2013) 设函数 $f(x)$ 可导, 且满足 $f(0) = f(2) = 2$, $|f'(x)| \leq 1$, 若 $I = \int_0^2 f(x) dx$, 则 I 属于 [].

- A. (1, 2) B. (2, 3) C. (3, 5) D. (5, 7)

本题考查了利用导数的特点分析函数的性态及定积分的几何意义.

由于 $f(x)$ 没有给出具体形式, 所以求积分 I 是不可取的. 但由函数 $f(x)$ 满足 $f(0) = f(2) = 2$, $|f'(x)| \leq 1$ 可得曲线 $y = f(x)$ 在 $y = x$, $y = -x + 4$, $y = x + 2$, $y = -x + 2$ 所围的正方形 $ABCD$ 之中, 如例图 1(a) 所示.



例图 1

显然, 正方形 $AOEC$ 的面积 $S_1 = 4$, 三角形 ABC 的面积 $S_2 = 1$, 三角形 ACD 的面积 $S_3 = 1$. 由定积分的几何意义知, $I = \int_0^2 f(x) dx$ 为例图 1(b) 所示阴影部分曲边梯形 $OECA$

的面积. $S_1 - S_2 < I < S_1 + S_3$, 即 $3 < I < 5$.

故正确选项为 C.

注 由于函数 $f(x)$ 满足 $f(0) = f(2) = 2$, $|f'(x)| \leq 1$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 $y = x$, $y = -x + 4$, $y = x + 2$, $y = -x + 2$ 所围的正方形之中.

证明 由 $|f'(x)| \leq 1$ 得 $-1 \leq f'(x) \leq 1$. 设 $F(x) = f(x) - x - 2$, $x \in [0, 2]$, $F'(x) = f'(x) - 1 \leq 0 \Rightarrow F(x)$ 单调减少, 而 $F(0) = 0$, 因此 $F(x) < 0$, 即 $f(x) - x - 2 < 0$, 这表明曲线 $y = f(x)$ 在直线 $y = x + 2$ 下方. 同理可证曲线 $y = f(x)$ 在直线 $y = -x + 4$ 的下方, 而在直线 $y = x$ 和 $y = -x + 2$ 的上方.

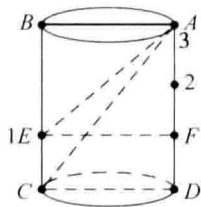
2. (2011) 一个盛满水的圆柱形容器, 其底面半径为 1, 母线长为 3. 将该容器在水平的桌面上平稳地倾斜使水缓慢流出. 当容器中剩下的水为原来的 $\frac{2}{3}$ 时, 圆柱的母线与水平面所成的角等于_____.

- (A) 75° (B) 60° (C) 45° (D) 30°

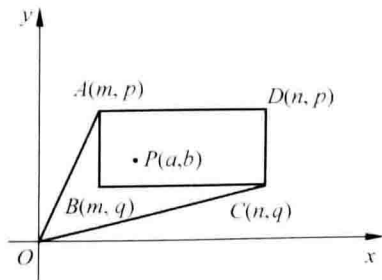
此题给人的第一感觉是无从下手. 但将题目转化为图形后, 很快就可以找到解题思路. 如例图 2 所示, 假想倾斜圆柱形容器使线段 AC 与水平的桌面平行, 则显然流出的水为原来容器内水的一半. 受此启发, 可先找出当圆柱形容器直立放置时, 总容积 $\frac{1}{3}$ 处所对应的位置, 即 EF 直线处(高为 1 的位置), 则 EF 直线以上部分的容积为总容积的 $\frac{2}{3}$. 将容器倾斜使线段 AE 与水平的桌面平行, 则流出的水为 EF 直线以上部分的容积的一半, 即容器中剩下的水为原来的 $\frac{2}{3}$. 这时由题设知 $EF = 2$, 而 $AF = 2$, $\triangle AEF$ 为直角三角形, 所以 $\angle EAF = 45^\circ$. 故正确的选项为 (C).

3. (2006) $P(a, b)$ 的第一象限内的矩形 $ABCD$ (含边界) 中的一个动点, A, B, C, D 的坐标如例图 3 所示, 则 $\frac{b}{a}$ 的最大值与最小值依次是_____.

- (A) $\frac{p}{m}, \frac{q}{n}$ (B) $\frac{q}{m}, \frac{p}{n}$ (C) $\frac{q}{m}, \frac{q}{n}$ (D) $\frac{p}{m}, \frac{p}{n}$



例图 2



例图 3

由例图 3 可知, 比值 $\frac{b}{a}$ 是直线 OP 的斜率, 当点 P 与点 A 重合时取得最大值 $\frac{p}{m}$, 当点 P

与点 C 重合时取得最小值 $\frac{q}{n}$, 故正确选项为 (A).

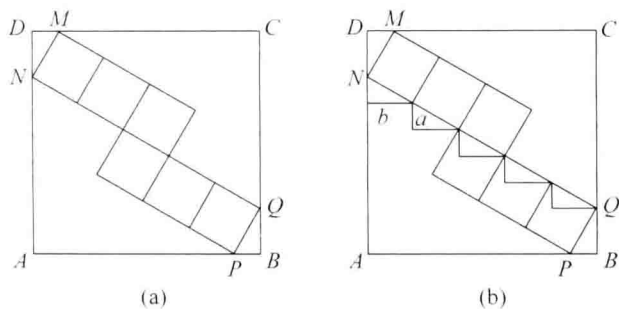
4. (2009) 在边长为 10 的正方形 $ABCD$ 中, 若按例图 4(a) 所示嵌入 6 个边长一样的小正方形, 使得 P, Q, M, N 四个顶点落在大正方形的边上, 则这 6 个小正方形的面积之和是_____.

- (A) $32\frac{16}{25}$ (B) $30\frac{1}{5}$ (C) $32\frac{4}{5}$ (D) $30\frac{4}{5}$

本题初看似乎无从下手, 但做出如例图 4(b) 中所示的辅助线后, 借助所得到的一些全等直角三角形, 可以很容易地看出这些全等直角三角形与正方形 $ABCD$ 之间的关系, 这样问题就迎刃而解了. 具体求解过程如下.

作如例图 4(b) 所示的辅助折线, 显然所得的小直角三角形与直角 $\triangle DMN$ 及 $\triangle BPQ$ 全等. 设小直角三角形的两条直角边的长度分别为 a, b , 则 $5b = 10, 5a + 2b = 10$, 所以 $b = 2, a = \frac{6}{5}$. 从而 $a^2 + b^2 = \frac{36}{25} + 4 = \frac{136}{25}$, 所求面积之和是 $6 \times \frac{136}{25} = 32\frac{16}{25}$.

故正确选项为 (A).



例图 4

从已举行的 11 次 GCT 考试汇总情况来看, 尽管 25 道题都是 4 选 1 的单项选择题, 但在 45 分钟内完成这些题目, 时间还是很紧张的. 因此考生在做这些模拟试题时, 最好按正式考试的要求来做, 即在 45 分钟内做完一套模拟试题, 然后再核对答案, 进行分析总结. 而不要一遇到疑难问题就停下来, 翻看答案和解析过程. 这样才能真正体现出模拟试题的效用.

由于编者的经验和水平所限, 书中难免会有疏漏和不足之处. 欢迎广大读者、辅导教师及各方面的专家批评指正.

编者
2014 年 1 月

CONTENTS

目 录

模拟试题(1)	1
模拟试题(2)	5
模拟试题(3)	9
模拟试题(4)	13
模拟试题(5)	17
模拟试题(6)	21
模拟试题(7)	25
模拟试题(8)	29
模拟试题(9)	33
模拟试题(10)	37
模拟试题(11)	41
模拟试题(12)	45
模拟试题(1)答案与解析	48
模拟试题(2)答案与解析	55
模拟试题(3)答案与解析	63
模拟试题(4)答案与解析	72
模拟试题(5)答案与解析	79
模拟试题(6)答案与解析	86
模拟试题(7)答案与解析	93
模拟试题(8)答案与解析	102
模拟试题(9)答案与解析	110
模拟试题(10)答案与解析	118
模拟试题(11)答案与解析	125
模拟试题(12)答案与解析	132

模拟试题(1)

本试题满分为 100 分,共 25 个选择题,每题 4 分.每小题所给出的 4 个选项中,只有一项是正确的.

1. P 是数轴上的一点,坐标为 -1 , Q 是数轴上的一动点,若要求 Q 与 P 的距离不超过 1,则点 Q 的坐标 x 的取值范围为[].

- (A) $|x-1|<1$ (B) $|x-1|\leq 1$ (C) $|x+1|<1$ (D) $|x+1|\leq 1$

2. 已知 a, b, c 是从小到大的 3 个相邻奇数.若 $ab>132$, $bc<342$,且 b 是合数,则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=[]$.

- (A) $\frac{4}{221}$ (B) $\frac{1}{30}$ (C) $\frac{1}{15}$ (D) $\frac{30}{221}$

3. 某洗衣机生产厂家,为了检测其产品无故障的启动次数,从生产的一批洗衣机中任意抽取了 5 台,如果测得的每台无故障启动次数分别为 11300, 11000, 10700, 10000, 9500, 那么这批洗衣机的平均无故障启动次数大约为[].

- (A) 10300 (B) 10400 (C) 10500 (D) 10600

4. 某产品由甲、乙两种物品混合而成,甲、乙两种物品所占比例分别为 x 和 y .若甲物品的价格在 60 元的基础上上涨 10%,乙物品的价格在 40 元的基础上下降 10%时,该产品的成本保持不变,那么 x 和 y 分别等于[].

- (A) 50%, 50% (B) 40%, 60% (C) 60%, 40% (D) 45%, 55%

5. 把 6 个人分配到 3 个部门去调研,每部门去 2 人,则分配方案共有[]种.

- (A) 15 (B) 105 (C) 45 (D) 90

6. 某车间生产的一种零件中,一等品的概率是 0.9.生产这种零件 4 件,恰有 2 件一等品的概率是[].

- (A) 0.0081 (B) 0.0486 (C) 0.0972 (D) 0.06

7. 已知复数 z 的模 $|z|=2$, 虚部 $\operatorname{Im} z=\sqrt{3}$, 实部 $\operatorname{Re} z<0$, 则 $z^2=[\quad]$.

- (A) $-2-2\sqrt{3}i$ (B) $-2\sqrt{3}-2i$ (C) $2+2\sqrt{3}i$ (D) $2\sqrt{3}+2i$

8. 有下列 3 个不等式: ① $x-1<(x-1)^2$, ② $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>2\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$, ③ $4^x<2^{x+1}$. 则 $[\quad]$.

- (A) ①和②的解集相同 (B) ②和③的解集相同
(C) ③和①的解集相同 (D) ①, ②和③的解集各不相同

9. 已知方程 $(x^2-2x+p)(x^2-2x+q)=0$ 的四个根构成一个首项为 $\frac{1}{4}$ 的等差数列, 则 $|p-q|=[\quad]$.

- (A) 1 (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{8}$

10. $\{a_n\}$ 是等比数列, 首项 $a_1<0$, 则 $\{a_n\}$ 是递增数列的充分必要条件是公比 q 满足 $[\quad]$.

- (A) $q<0$ (B) $q<1$ (C) $q>0$ (D) $0<q<1$

11. 记 $\triangle PQR$ 的面积为 $S_{\triangle PQR}$. 已知 $\triangle ABC$ 的重心是 G , P 是 $\triangle ABC$ 内的一点,

$$\lambda_1 = \frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}}, \quad \lambda_2 = \frac{S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle ABC}}, \quad \lambda_3 = \frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}$$

若 $\lambda_1=\frac{1}{2}, \lambda_2=\frac{1}{3}, \lambda_3=\frac{1}{6}$, 则 P 点 $[\quad]$.

- (A) 在 $\triangle GAB$ 内 (B) 在 $\triangle GBC$ 内 (C) 在 $\triangle GCA$ 内 (D) 与 G 点重合

12. $\triangle ABC$ 为锐角三角形. 已知 $\sin B=\frac{4}{5}, \sin C=\frac{2\sqrt{5}}{5}, |BC|=5$, 则 $\triangle ABC$ 的面积等于 $[\quad]$.

- (A) 5 (B) $2\sqrt{5}$ (C) $3\sqrt{5}$ (D) 10

13. 若一个平行四边形的周长为 10, 相邻边的乘积为 6, 则此平行四边形的对角线平方之和为 $[\quad]$.

- (A) 36 (B) 26 (C) 25 (D) 13

14. 如果直线 $l: x-2y+2=0$ 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 (a>b>0)$ 的左焦点 F_1 和短轴上的顶点 $(0, b)$, 则该椭圆的离心率等于 $[\quad]$.

- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (D) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

15. 棱长为 1 的正方体各顶点都在同一个球面上, 则该球面的面积等于 $[\quad]$.

- (A) 2π (B) $\frac{3\pi}{2}$ (C) 3π (D) 4π

16. 设 $f(x)$ 具有连续导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x)}{x} + \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right] = \frac{3}{2}$, 则 [].

- (A) $f(0)=0$ 且 $f'(0)=2$ (B) $f(0)=0$ 且 $f'(0)=1$
(C) $f(0)=-1$ 且 $f'(0)=2$ (D) $f(0)=-1$ 且 $f'(0)=1$

17. 设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

则 [].

- (A) $f(x)$ 在 $x=0$ 处间断
(B) $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导
(C) $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 但导数在 $x=0$ 处不连续
(D) $f(x)$ 在 $x=0$ 处有连续导数

18. 在 $(0, +\infty)$ 内 $f'(x) > 0$, 若 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-1)}{x-2}$ 存在, 则 [].

- (A) 在 $(0, +\infty)$ 内 $f(x) > 0$
(B) 在 $(0, +\infty)$ 内 $f(x) < 0$
(C) 在 $(0, 1)$ 内 $f(x) > 0$, 在 $(1, +\infty)$ 内 $f(x) < 0$
(D) 在 $(0, 1)$ 内 $f(x) < 0$, 在 $(1, +\infty)$ 内 $f(x) > 0$

19. $I(x) = \int_e^x \frac{1}{t} \ln t dt$ 在 $[e, e^2]$ 上的最大值为 [].

- (A) 0 (B) 1 (C) $2\ln 2$ (D) $\frac{3}{2}$

20. 若 $\ln x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int x f(e^{-x}) dx = []$.

- (A) $xe^{-x} + e^{-x} + C$ (B) $-xe^{-x} - e^{-x} + C$
(C) $xe^x - e^x + C$ (D) $-xe^x + e^x + C$

21. $f(x)$ 为连续函数, $I = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)} dx$ (a 为常数), 则 $I = []$.

- (A) $\frac{a}{2}$ (B) a (C) $2a$ (D) 0

22. 设 A 为 4 阶实对称矩阵, 且 $A^2 + A = 0$. 若 A 的秩为 3, 则 A 的特征值为 [].

- (A) 1, 1, 1, 0 (B) 1, 1, -1, 0
(C) 1, -1, -1, 0 (D) -1, -1, -1, 0

23. 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{pmatrix} \quad (a_i b_j \neq 0, i, j = 1, 2, \cdots, n),$$

则矩阵 A 的秩为 [].

- (A) 0 (B) 1 (C) n (D) 无法确定

24. 向量组 $\alpha_1 = (-1, -2, -1, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, 3, 2, -1)^T$, $\alpha_3 = (0, 1, 1, 0)^T$, $\alpha_4 = (1, 4, 3, -4)^T$ 的极大线性无关组是 [].

- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ (C) α_1, α_2 (D) α_3, α_4

25. 设 η_1, η_2 是线性方程组

$$\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = a_4, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -4 \end{cases}$$

的两个不同解, 则该线性方程组的通解是 [] (其中 k_1, k_2, k 为任意常数).

- (A) $(k_1 + 1)\eta_1 + k_2 \eta_2$ (B) $(k_1 - 1)\eta_1 + k_2 \eta_2$
(C) $(k + 1)\eta_1 - k\eta_2$ (D) $(k - 1)\eta_1 - k\eta_2$

静
GCT