普通高等教育"十二五"规划教材　公共基础课系列

线性代数

Linear Algebra

何其祥　沈炳良　武斌　邹晓光　编著

上海财经大学出版社

普通高等教育"十二五"规划教材·公共基础课系列

线性代数

何其祥　沈炳良　武　斌　邹晓光　编著

上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/何其祥,沈炳良,武斌,邹晓光编著.一上海:上海财经大学出版社,2014.8

普通高等教育"十二五"规划教材·公共基础课系列

ISBN 978-7-5642-1960-4/F·1960

Ⅰ.①线… Ⅱ.①何… ②沈… ③武… ④邹… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 158906 号

□ 责任编辑 刘光本
□ 责任电邮 lgb55@126.com
□ 责编电话 021－65904890
□ 封面设计 钱宇辰
□ 责任校对 卓 妍 胡 芸

XIANXING DAISHU
线 性 代 数
何其祥 沈炳良 武 斌 邹晓光 编著

上海财经大学出版社出版发行
(上海市武东路 321 号乙 邮编 200434)
网 址:http://www.sufep.com
电子邮箱:webmaster @ sufep.com
全国新华书店经销
上海叶大印务发展有限公司印刷装订
2014 年 8 月第 1 版 2014 年 8 月第 1 次印刷

787mm×1092mm 1/16 9.5 印张 243 千字
(习题集 7.75 印张 198 千字)
印数:0 001－5 000 定价:38.00 元

前 言

PREFACE

线性代数是高等院校理工类和经管类各专业学生的重要基础课程。本课程介绍的概念、理论和方法已广泛地渗透自然科学、工程技术、经济管理等领域。尤其是计算机科学日益发展的今天，许多非线性问题均可以通过线性化解决，线性代数日益显示其重要性和实用性。通过该课程的学习，学生们能有效地培养严谨的逻辑推理能力和抽象思维能力，对后继专业课程的学习和数量分析能力的培养起着非常重要的作用。

目前国内外出版的线性代数教材种类繁多，其中不乏优秀教材。随着我国高等教育逐步走向普及化，尤其是独立学院的不断涌现，适用于独立学院学生层次的教材还不多。独立学院学生基础相对薄弱，且线性代数等基础课程的课时被不断压缩。考虑到这些因素，我们研究和借鉴了国内外众多优秀教材的结构和内容安排，并充分考虑到经管类专业的特点，编写了这本线性代数教材。全书共五章，参加编写的教师为：邹晓光(第三、四章)，沈炳良(第一、五章)，武斌(第二章)，由何其祥统纂定稿。全书叙述简洁、准确，适当减少繁琐的证明和推导，尽量增加较多的例题，在概念的引入等环节，力求从解决问题的角度体现实用性。

本书可读性较强，既可以作为独立学院或同等层次学生的教学用书，也可以作为其他专业学生的参考书。学习本书的预修课程只需初等数学即可。

在线性代数课程建设及其本书的编写过程中，得到了上海财经大学浙江学院领导的关心和支持，并得到了上海财经大学出版社的协助，在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中难免错误，恳请专家和读者批评指正。

何其祥

2014 年 8 月

目 录

CONTENTS

第一章

行列式

行列式是线性代数的一个重要概念,它广泛应用于自然科学、工程技术及经济、管理、金融等众多领域.本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及其计算方法,进而介绍用行列式求解一类特殊线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

§1 二阶与三阶行列式

一、二元线性方程组与二阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}. \tag{1}$$

为消去未知数 x_2,以 a_{22} 与 a_{12} 分别乘以上两方程的两端,然后两个方程相减,得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12};$$

类似地,消去 x_1,得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,求得方程组(1)的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{2}$$

(2)式中的分子、分母都是四个数分两对相乘再相减而得.其中,分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 是由方程组(1)的四个系数确定的,把这四个数按它们在方程组(1)中的位置,排成二行二列(横排称行、竖排称列)的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{3}$$

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为数表(3)所确定的二阶行列式，并记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式(4)的元素或元.元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列.位于第 i 行第 j 列的元素称为行列式(4)的 (i,j) 元.

上述二阶行列式的定义，可用对角线法则来记忆.参看图 1—1，把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为主对角线，a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为副对角线(或次对角线)，于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

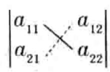

图 1—1

利用二阶行列式的概念，(2)式中 x_1,x_2 的分子也可写成二阶行列式，即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

那么(2)式可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

注意：这里的分母 D 是由方程组(1)的系数所确定的二阶行列式(称系数行列式)；x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11},a_{21} 所得的二阶行列式；x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12},a_{22} 所得的二阶行列式.

例 1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2=12 \\ 2x_1+x_2=1 \end{cases}.$$

解 由于

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-(-4)=7\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=12-(-2)=14,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-24=-21,$$

因此 $$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{14}{7}=2, x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-21}{7}=-3.$$

二、三阶行列式

定义 1.1 设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{5}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}, \tag{6}$$

(6)式称为数表(5)所确定的三阶行列式.

上述定义表明三阶行列式含 6 项,每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号,其规律遵循图 1—2 所示的对角线法则:图中有三条实线看作是平行于主对角线的连线,三条虚线看作是平行于副对角线的连线,实线上三元素的乘积冠以正号,虚线上三元素的乘积冠以负号.

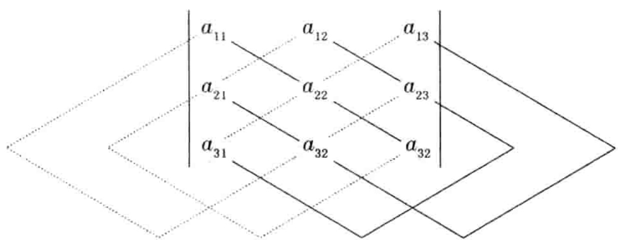

图 1—2

例 2 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

解 按对角线法则,有

$$\begin{aligned} D &=1\times2\times(-2)+2\times1\times(-3)+(-4)\times(-2)\times4 \\ &\quad -1\times1\times4-2\times(-2)\times(-2)-(-4)\times2\times(-3) \\ &=-4-6+32-4-8-24=-14. \end{aligned}$$

例 3 求解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}=0.$$

解 方程左端的三阶行列式

$$\begin{aligned} D &= 3x^2+4x+18-9x-2x^2-12 \\ &= x^2-5x+6, \end{aligned}$$

由 $x^2-5x+6=0$,解得 $x=2$ 或 $x=3$.

注意:对角线法则只适用于二阶与三阶行列式.为研究四阶及更高阶行列式,我们先介绍有关排列的知识,然后引出 n 阶行列式的概念.

习题 1—1

1.计算下列二、三阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$;　(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$;　(5) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$;　(6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

2.求解方程 $\begin{vmatrix} x+1 & 2 & -1 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix}=0$.

3.求解方程组 $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11. \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11 \end{cases}$

§2 排　列

作为定义 n 阶行列式的准备,我们先讨论排列的定义及性质.

定义 2.1　由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列.

例如,2431 是一个四级排列,45321 是一个五级排列.我们知道,n 级排列的总数是

$$P_n=n\cdot(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1=n!.$$

显然,$12\cdots n$ 也是一个 n 级排列,这个排列具有自然顺序,就是按递增的顺序排起来的,我们称为自然排列.其他的排列都或多或少破坏自然顺序.

定义 2.2　在一个排列中,如果一对数的前后位置与大小顺序相反,即前面的数大于后面的数,那么它们就称为一个逆序,一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数.

逆序数为奇数的排列称为奇排列,逆序数为偶数的排列称为偶排列.

下面介绍求逆序数的方法.设

$$p_1p_2\cdots p_n$$

为 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,考虑数 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$,如果比 p_i 大且排在 p_i 前面的数有 τ_i 个,就说 p_i 的逆序数为 τ_i,每个数的逆序数之总和

$$\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n$$

即是这个排列的逆序数,记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$,简记为 τ,即

$$\tau=\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n.$$

例 1　求排列 45321 的逆序数.

解　在排列 45321 中,

4 排在首位,逆序数为 0;

5 是最大数,故逆序数为 0;

3 的前面比 3 大的数有两个:4,5,故逆序数为 2;

2 的前面比 2 大的数有三个:4,5,3,故逆序数为 3;

1 的前面比 1 大的数有四个:4,5,3,2,故逆序数为 4.

于是这个排列的逆序数为

$$\tau(45321)=0+0+2+3+4=9.$$

故排列 45321 是一个奇排列.显然,$\tau(12\cdots n)=0$,故自然排列是偶排列.

把一个排列中某两个数的位置互换,而其余的数不动,就得到另一个排列.这样的一个变换称为对换.将相邻两个数对换,叫作相邻对换.

定理 2.1　对换改变排列的奇偶性.

证　先证相邻对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_sabb_1\cdots b_t$,对换 a 与 b,变为排列 $a_1\cdots a_sbab_1\cdots b_t$.显然,$a_1,\cdots,a_s;b_1,\cdots,b_t$ 这些数的逆序数经过对换并不改变,而 a,b 两数的逆序数改变为:当 $a<b$ 时,经对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变;当 $a>b$ 时,经过对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1,所以排列 $a_1\cdots a_sabb_1\cdots b_t$ 与排列 $a_1\cdots a_sbab_1\cdots b_t$ 的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_sab_1\cdots b_tbc_1\cdots c_m$,把它作 t 次相邻的对换,变成 $a_1\cdots a_sabb_1\cdots b_tc_1\cdots c_m$,再作 $t+1$ 次相邻的对换,变成 $a_1\cdots a_sbb_1\cdots b_tac_1\cdots c_m$.总之,经 $2t+1$ 次相邻对换,排列 $a_1\cdots a_sab_1\cdots b_tac_1\cdots c_m$变成排列 $a_1\cdots a_sbb_1\cdots b_tac_1\cdots c_m$,所以这两个排列的奇偶性相反.

推论 1　在全部 n 级排列中,奇、偶排列的个数相等,各有$\frac{n!}{2}$个.

证　假设在全部 n 级排列中共有 s 个奇排列,t 个偶排列.将 s 个奇排列中的前两个数字对换,得到 s 个不同的偶排列,因此,$s\leqslant t$.同理可证 $t\leqslant s$,于是 $t=s$,即奇、偶排列的总数相等,各有$\frac{n!}{2}$个.

推论 2　奇排列变成自然排列的对换次数为奇数,偶排列变成自然排列的对换次数为偶数.

证　由定理 2.1,知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数,而自然排列是偶排列(逆序数为 0),由此可知推论成立.

习题 1—2

1.计算下列排列的逆序数:

(1) 1　2　3　4;　　(2) 4　1　3　2;

(3) 64175382;　　(4) 28357146;

(5) 1　$3\cdots(2n-1)2$　$4\cdots(2n)$;　　(6) 1　$3\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots2$.

2.选择 i 和 k 使

(1)$1274i56k9$ 成偶排列;

(2) $1i25k4897$ 成奇排列.

3.计算 n 级排列 $n(n-1)\cdots21$ 的逆序数,并讨论它的奇偶性.

4.设 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)=k$,求 $\tau(p_n\cdots p_2p_1)$.

§3 n 阶行列式的定义与性质

一、n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义,先来研究三阶行列式的结构.三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

容易看出:

(1) 上式右边的每一项都恰是三个元素的乘积,这三个元素位于不同的行、不同的列.因此,上式右端的任一项除正负号外可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$.这里第一个下标(行标)排成自然顺序 123,而第二个下标(列标)排成 $p_1p_2p_3$,它是 1,2,3 三个数的某个排列.这样的排列共有 6 种,对应上式右端共含 6 项.

(2) 各项的正负号与列标的排列对照.

带正号的三项列标排列是 123,231,312;

带负号的三项列标排列是 132,213,321.

经计算可知前三个排列都是偶排列,而后三个排列都是奇排列.因此各项带的正负号可以表示为 $(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}$,其中 $\tau(p_1p_2p_3)$ 为列标排列的逆序数.

总之,三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2p_3}(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中,$\sum\limits_{p_1p_2p_3}$ 表示对 1,2,3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 求和.

仿此,可以把行列式推广到一般情形.

定义 3.1 设有 n^2 个数,排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix},$$

其 n 阶行列式记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

简记作 $\det(a_{ij})$，它表示如下形式的代数和：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}.$$

这里，$\sum\limits_{p_1 p_2 \cdots p_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数的所有排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 求和，共有 $n!$ 项.

按此定义的二阶、三阶行列式，与§1 中用对角线法则定义的二阶、三阶行列式，显然是一致的.当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$，注意不要与绝对值记号相混淆.

例 1　证明 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n,$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n,$$

其中未写出的元素都是 0.

证　第一式左端称为对角行列式，其结果是显然的，下面只证第二式.

在第二式左端，λ_i 为行列式的 $(i, n-i+1)$ 元，故记 $\lambda_i = a_{i,n-i+1}$，则按行列式定义，

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\tau[n(n-1)\cdots 21]} a_{n1} a_{2,n-1} \cdots a_{n1} = (-1)^{\tau[n(n-1)\cdots 21]} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n,$$

而 $\tau[n(n-1)\cdots 21] = 0+1+2+\cdots+(n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$，故第二式成立.

主对角线以下(上)的元素都为零的行列式称为上(下)三角形行列式，它的值与对角行列式一样.

例 2　证明下三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

证　当 $j>i$ 时，$a_{ij}=0$，故 D 中可能不为 0 的元素 a_{ip_i}，其下标应有 $p_i \leqslant i$，即 $p_1 \leqslant 1, p_2 \leqslant 2, \cdots, p_n \leqslant n$.

在所有排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 中，能满足上述关系的排列只有自然排列 $12\cdots n$，所以 D 中可能不为 0 的项只有一项，故

$$D = (-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

下面给出 n 阶行列式定义的等价形式.

在行列式的定义中,为了决定每一项的正负号,我们把 n 个元素按行指标排起来.事实上,数的乘法是交换的,因而这 n 个元素的次序是可以任意写的.一般地,n 级行列式中的项可以写成

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}, \tag{1}$$

其中,$i_1i_2\cdots i_n$,$j_1j_2\cdots j_n$ 是两个 n 级排列.利用排列的性质,不难证明(1)的符号等于

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}. \tag{2}$$

事实上,为了根据定义来决定(1)的符号,就要把这 n 个元素重新排一下,使它们的行指标成自然顺序,也就是排成

$$a_{1j_1'}a_{2j_2'}\cdots a_{nj_n'}. \tag{3}$$

于是它所带的符号是

$$(-1)^{\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')}. \tag{4}$$

现在来证明,(2)与(4)是一致的.我们知道,由(1)变成(3)可以经过一系列元素的对换来实现,每作一次对换,元素的行指标与列指标所成的排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 就都同时作一次对换,也就是 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$与 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$同时改变奇偶性,因而它们的和

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)$$

的奇偶性不改变.也就是说,对(1)作一次元素的对换不改变(2)的值.因此,在一系列对换后,有

$$\begin{aligned}&(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}\\&\quad=(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')}=(-1)^{\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')}.\end{aligned}$$

这就证明了(2)与(4)是一致的.

例如,$a_{23}a_{34}a_{12}a_{41}$ 是四阶行列式中一项,$\tau(2314)=2$,$\tau(3421)=5$,于是它的符号应为$(-1)^{2+5}=-1$.如按行指标排列起来,就是 $a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$,$\tau(2341)=3$,因而它的符号也是$(-1)^3=-1$.

按(2)来决定行列式中每一项的符号的好处在于,行指标与列指标的地位是对称的. 因而为了决定每一项的符号,我们同样可以把每一项按列指标排起来,于是定义又可写成:

定理 3.1 $$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

二、行列式的性质

记 $$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},D^T=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},$$

行列式 D^T 称为D 的转置行列式.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

证 记 $D=\det(a_{ij})$,得转置行列式

$$D^T=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 D^T 的(i,j)元为 b_{ij}，则 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$.按定义，

$$D^T=\sum_{p_1p_2\ldots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\ldots p_n)}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum_{p_1p_2\ldots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\ldots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}.$$

而由定理 3.1，有

$$D=\sum_{p_1p_2\ldots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\ldots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn},$$

故 $D^T=D$.

由此性质可知，行列式中的行与列具有同等的地位，行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立；反之亦然.

性质 2 互换行列式的两行(列)，行列式变号.

证 设行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式 $D=\det(a_{ij})$ 对换 $i,j(i<j)$ 两行得到的，即当 $k\neq i,j$ 时，$b_{kp}=a_{kp}$；当 $k=i$ 或 j 时，$b_{ip}=a_{jp}$，$b_{jp}=a_{ip}$，于是

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n} \\ &= \sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\ &= \sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n} \\ &= -\sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n} \\ &= -D, \end{aligned}$$

其中第四步利用了对换改变排列奇偶性的结论.

以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示第 i 列.交换 i,j 两行记作 $r_i\leftrightarrow r_j$，交换 i,j 两列记作 $c_i\leftrightarrow c_j$.

推论 1 如果行列式有两行(列)完全相同，则此行列式等于零.

证 把这两行互换，有 $D=-D$，故 $D=0$.

性质 3 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式.

第 i 行(或列)乘以 k，记作 $r_i\times k$ (或 $c_i\times k$).

推论 2 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式记号的外面.

第 i 行(或列)提出公因子 k，记作 $r_i\div k$(或 $c_i\div k$).

性质 4 行列式中如果有两行(列)的对应元素成比例，则此行列式等于零.

性质 5 若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和，例如第 i 列的元素都是两数之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式不变.

例如，以数 k 乘第 j 列加到第 i 列上（记作 c_i+kc_j），有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_i+kc_j}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i}+ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i}+ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni}+ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i\neq j).$$

（以数 k 乘第 j 行加到第 i 行上，记作 r_i+kr_j）

以上诸性质请读者证明之.

上述性质 5 表明：当某一列(或行)的元素为两数之和时，行列式关于该行(或列)可分解为两个行列式之和.若 n 阶行列式每个元素都表示成两数之和，则它可分解成 2^n 个行列式之和.例如，二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b+y \\ c & d+w \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & b+y \\ z & d+w \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & y \\ c & w \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & b \\ z & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}.$$

性质 2,3,6 介绍了行列式关于行和列的三种运算，即 $r_i\leftrightarrow r_j$，$r_i\times k$，r_i+kr_j 和 $c_i\leftrightarrow c_j$，$c_i\times k$，c_i+kc_j，利用这些运算可简化行列式的计算，特别是利用运算 r_i+kr_j（或 c_i+kc_j）可以把行列式中许多元素化为 0.计算行列式常用的一种方法就是利用运算 r_i+kr_j 把行列式化为上三角形行列式，从而算得行列式的值.请看下例.

例 3 计算

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

解

$$D\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2}-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}\xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1}-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&-8&4&-6\\0&16&-2&7\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-8r_2]{r_3+4r_2}\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&8&-10\\0&0&-10&15\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+\frac{5}{4}r_3}\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&8&-10\\0&0&0&\frac{5}{2}\end{vmatrix}=40.$$

上述解法中，先用了运算 $c_1\leftrightarrow c_2$，其目的是把 a_{11} 换成 1，从而利用运算 $r_i-a_{i1}r_1$，即可把 $a_{i1}(i=2,3,4)$ 变为 0.如果不先作 $c_1\leftrightarrow c_2$，则由于原式中 $a_{11}=3$，需用运算 $r_i-\frac{a_{i1}}{3}r_1$ 把 a_{i1} 变为 0，这样计算时就比较麻烦.第二步把 r_2-r_1 和 r_4+5r_1 写在一起，这是两次运算，并把第一次运算结果的书写省略了.

例 4 计算

$$D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}.$$

解 这个行列式的特点是各列 4 个数之和都是 6.先把第 2,3,4 行同时加到第 1 行，提出公因子 6，然后各行减去第一行：

$$D\xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4}\begin{vmatrix}6&6&6&6\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\xlongequal{r_1\div 6}6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=48.$$

例 5 计算

$$D=\begin{vmatrix}a&b&c&d\\a&a+b&a+b+c&a+b+c+d\\a&2a+b&3a+2b+c&4a+3b+2c+d\\a&3a+b&6a+3b+c&10a+6b+3c+d\end{vmatrix}.$$

解 从第 4 行开始，后行减前行，

$$D\xlongequal[r_2-r_1]{\substack{r_4-r_3\\r_3-r_2}}\begin{vmatrix}a&b&c&d\\0&a&a+b&a+b+c\\0&a&2a+b&3a+2b+c\\0&a&3a+b&6a+3b+c\end{vmatrix}$$