

微分方程复域 定性理论

盛立人 著

安徽大学出版社

微分方程复域定性理论

盛立人 著



安徽大学出版社

微分方程复域定性理论

盛立人 著

安徽大学出版社出版发行

(合肥市肥西路3号 邮码 230039)

肥西县印刷有限责任公司印刷 新华书店经销

开本 $850 \times 1168 \frac{1}{32}$ 印张 8.5 字数 200 千

1998年9月第1版 1998年9月第1次印刷

印数 1200 册

特约编辑 胡茂林 责任编辑 张青棋 封面设计 孟献辉

ISBN 7-81052-061-X/O·9 定价 15.00 元

如有印装质量问题,请与出版社联系调换

**Théorie qualitative
des
équations différentielles
dans
le domaine complexe**

PAR

Sheng Liren

Librairie Université du Anhui

A mon ami et professor

Jean Martinet

et sa femme vivante

Michel Martinet

谨以此书献给我的朋友和老师

J. 马廷尼

和他的未亡人

M. 马廷尼

序

法国 J. Martinet 教授是当代著名的微分方程与奇点理论专家. 他和中国常微界在 Hilbert 第十六问题上有共同爱好. 我们的同志在 1957-1980 年间对实二次多项式系统的定性理论方面做了许多工作, 而以极限环的 $(3, 1)$ 分布的具体举例为最高峰, 它推动了国外数学家对 H. Dulac 于 1924 年发表的 140 页长文(文中证明任一实多项式微分系统的极限环个数必为有限)发生兴趣, 发现其中论证有错误, 并最终由法国和前苏联两个学派各自独立地给以修补, Martinet 就是法国学派四人中之一.

由于我们在实二次系统是否存在极限环 $(2, 2)$ 与 $(4, x)$ 分布等问题遇到了困难, 对于在实域中解决 Hilbert 第十六问题失去信心, 于是在 1985 年秋南京大学和安徽大学联合邀请 Martinet 教授来华讲学四个月. 主要讲授微分方程复域定性理论, 同时对前述两个学派的工作也做了一些简要的介绍, 并留下手写的讲稿. 令人非常遗憾的是他回国以后便忙于其它工作, 对这个讲稿整理了一部份; 及至 1988 年发现已得了不治之症, 1989 年不幸辞世!

盛立人同志曾于 1982-1984 年间在法国 Strasbourg 大学访问进修了两年, 和 Martinet 与 Godbillon 教授(先 Martinet 数月谢世)都有深厚的友谊, 并长期从事常微复域定性理论的研究工作. 现在他写的这本书内容丰富; 除了 Godbillon 的叶层理论和 Marti-

net 讲稿中的内容以外,还加进了 Yoccoz 和 Ecalle 对 Dulac 定理的新证明,又改写 Il'yashenko 在 CP^2 的向量场的研究工作.此外还补充了一个重要的附录.可以说他已为国内同志学习复域常微分方程定性理论铺平了一条大道.

我衷心希望这本书的出版发行能引起国内数学界,特别是微分方程界的同志们底重视,使我国在这个重要的数学领域早日赶上并达到国际水平.

叶彦谦

于南京大学数学系

1998 年 2 月

前言

一

1988年前后,四位法国数学家 J. Ecalle, J. Martinet, J.-P. Ramis 及 R. Moussu 和一位前苏联数学家 Y. H. Il'yashenko 分别在西欧和东欧的两个地方宣布,对于六十多年前法国数学家 H. Dulac 得到的 [Da]:

“Dulac 定理:多项式微分系统仅有有限个极限环”,
他们成功地给出了新的证明. 由于这个一直没有找到正确证明的结果多年来都为数学家不断引用,所以上述宣布立即受到世界数学界的广泛关注. 更因为他们不约而同采用了纯复域的解析方法,因此这项工作的另一个意义是:曾被微分方程专家们反复强调的,对实域结果关注其复域背景的观点,又一次得到确认.

Dulac 定理的两个新证明(至少其中的一个)比 Dulac 的原证还要长上几倍, Il'yashenko 甚至把它写成一部近三百页的书:《极限环的有限性》1992 [II1]. 然而,无论从哪方面来讲, Il'yashenko 的这本书都应视为是对古典定性理论及复域常微分方程的一项重要推进.

除此书外,有关复域定性理论的资料,近年来就见得很少了. 对于 Il'yashenko 的书,与其说他给出了几何方法,毋宁说是给出了(拟)解析方法. 由于主题仅限于 Dulac 的有限性定理,故不能当作一本入门书来看待. 另一方面, Peteovsky - Landis 于 1955 年发

表的著名论文《论方程 $dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$ 极限环的个数, P 与 Q 为二次多项式》[PL], 虽然其结果后来被(中国数学家有关 $(3, 1)$ 分布的著名反例)证明是不确的[Ye], 但文中营造的许多基本概念(如复环等)仍被认为具有重要的指导意义. 特别是后来被 Il'yashenko 用来讨论 CP^2 上的全纯场[II2], 得到了许多重要结果. 祇是就理论而言, 尚缺乏系统的陈述, 令初学者难于入手. 倘使能把两者的工作结合起来重新整理, 或许有可能给出一个完整的复相空间理论. 但看来需要一位高手来完成此事.

J. Martinet 于 1985 年来华讲学四个月, 形成了一份讲稿; 无论从行文和内容来说都是一本很适合初学者的入门材料. 在叶彦谦先生的促进下, 当时已决定请他回国整理, 寄来定稿在中国出版. 不幸的是 J. Martinet 竟于 1988 年际患不治之症, 1991 年谢世, 此书就此夭折, 而他在南京大学和安徽大学的演讲, 竟也成了绝唱!

作者列举上述各类著作的异同, 主要目的是坚持认为, 出版一本系统的, 有关复域定性理论的书是一樁情理之中的事情.

关于此事, 国内外的一些常微大师们其实很早就意识到了. 叶彦谦先生与作者多次谈及, 希望二次系统能尽早进入复域, 以便从更深的层面重现已被中国数学家们获得的丰富多彩的实域结果, 并从中发现一些与实域本质不同的现象. 此外, 秦元勋先生稍早一些在西北大学出版的书, Arnold 稍晚一些的书《常微分方程—动力体系 I》[Ar2], 以及上面列举的各种著作, 都可以看作是大师们努力从复几何方面寻求解结构的宣言书.

二

作者愿意追随前辈们的足迹, 因此多年来即期望整理出版一

本这样的系统的书. 不用说, 做这件事最好的蓝本, 当推 J. Martinet 的讲稿了, 但作者在整理这份稿子时, 发现困难不小; 这是因为: 第一, 由于讲学时间的限制, 他的原稿写得过于简略. 特别是正文中经常引用的诸如叶层(Foliation), 同迹(Holonomy)等一些概念, 对初学者可能带来一些困难. 第二, 也是最主要的, 那时 J. Martinet 和他的同事们的重要工作还未完成(那是两年后的事了). 此外, 这些年来有关理论也在不断推进. 因此使之成书, 还需要做一些延伸和改写的工作, 对此, 作者却一点把握也没有, 此事终于给耽搁下来.

但是去年一件小事却使作者重又燃起了对于成书的热情; 在法国数学家, 1994 年菲尔茨奖得主, J. C. Yoccoz 的论文菜单里, 作者发现他曾为他的四位同胞的至今未发表的证明(他们仅在 C. R. Acad. Sci. 上发表了两个摘要)[EMMR], 用他自己的观点给了一个简述[Yo], 而这再一次表明了他对 Ecalle 等人的工作的重视程度. 缘于此, 出于对我的朋友和老师 J. Martinet 的怀念, 我的成书之念变得格外强烈. 最后, 在叶彦谦老师和学长罗定军教授的鼓励下, 才下定决心动起手来开始整理原稿.

经过反复考虑, 现在采用下面方式来安排本书内容. 第一章介绍叶层的基本理论. 由于复相曲线在全局上不具有 Fibration 结构, 但却具有叶结构, 因此, 用叶层作为以后讨论的基本工具是合适的. 我们利用的材料是田村一郎的书[Ta]和 C. Godbillon 的未完成多卷本[Go].

第二章讲述复积分曲线的基本理论. 本章以 J. Martinet 的讲稿为主干线, 其内容从最简单的复二维线性场讲起, 一直延伸到复 Hopf 分枝和鞍—结点的分类. 章末的材料实际上是 J. Martinet 和 J.-P. Ramis 两人到那时为止的最前沿工作[MR].

第三章详细讨论 Dulac 的有限环定理. 由于 J. Martinet 等的完全证明到今天都一直没有发表(Ecalle 后来在世界数学会议上

作过一个一小时的报告,但内容偏于他的 Résurgente 函数,涉及 Dulac 定理的证明不多).作者因此为本章内容提供这么几个材料:其一是作者过去的一份讲稿,旨在介绍本问题的来胧去脉,以及外国学者讨论不多的初等方法.其中特别介绍经过中国学者改写的 Bamón 关于二次系统 Dulac 定理的证明;其二是 Il'yashenko 书中的部分材料,以及法国学派的一些观点;其三是 J. C. Yoccoz 对 Ecalte 等四人所给的那个证明的一个缩写.

第四章里,一方面结合 Petrovsky - Landis 的工作和 Il'yashenko 关于 CP^2 上的研究工作,设法用叶层及同迹理论写成一张复相空间基本概念的菜单.另一方面则证明 Il'yashenko 得到的几个足以刻划 RP^2 与 CP^2 本质不同的重要结果;但这些证明更现实的意义或许是为复相空间理论的使用提供一个合适的舞台.

在最后的附录里,我们介绍 Moussu 有关首次积分的重要工作(同迹群计算和爆炸法)以及巴西数学学派的重要工作.这个附录本身对于复相空间理论,以及前此讨论内容的理解,将是重要的.

可以列入复定性理论的材料还有很多(例如前述 Arnold 的书许多结果),限于本书的篇幅和作者的能力,我们也就这样界定了本书的范围了.

三

本书的另一层意义是,用以纪念法国前国民教育委员会执行主席,法国 Strasbourg 大学近代数学研究所前所长 J. Martinet 教授和他在微分方程及微分几何方面作出的杰出贡献.

再一次感谢叶彦谦先生和罗定军教授,感谢他们在本书准备和撰写过程中自始至终的关注,支持和帮助.

还应当向韦穗教授,吴先良教授和邱连刚付教授的大力支持表示我由衷的感谢,没有他们的远见和热心张罗,本书的出版将是难以想象的。

胡茂林博士为本书的校刊付出了大量的时间和精力,使本书得以如期出版,在此应当特别表示感谢。

安大出版社的各位负责同志,在市场经济与纯学术著作出版尚未协调运行的今天,能不计盈利,毅然支持本书出版,令人感动。谨陈数语,以申谢意。

盛立人谨识

1998年元月。

目 次

第一章 叶层与叶结构	1
§ 1 基本定义	1
§ 2 例子	3
§ 3 同迹与同迹群	6
1. 局部微分同胚芽群	6
2. 叶的拓扑性质	7
3. 叶层的局部邻域链	9
4. 同迹	10
§ 4 复叶层	12
§ 5 Godbillion - Vey 不变量	15
第二章 积分因子理论	19
§ 1 引言	19
1. 非奇情形	19
2. 叶层, 叶与同迹	21
§ 2 一些例子	24
1. 线性方程	24
2. Dulac 方程	27
3. 鞍-结点	28
4. 共振鞍点	30
§ 3 初等奇点的分界线	31
1. 线性微分形的分类	31
2. 初等奇点与分界线	33

3. 初等奇点的分界线·····	35
§ 4 Dulac 的形式正则形 ·····	37
1. 预备性结果·····	38
2. 非共振情形·····	39
3. (r, s) ——阶积分因子 ·····	42
4. Siegel 共振情形 ·····	44
5. Poincaré – Dulac 共振: 非退化情形 ·····	49
6. Poincaré – Dulac 共振: 退化情形 ·····	52
§ 5 初等奇点解析分类·····	54
1. 非共振形(小分母理论)·····	55
2. Siegel 共振形: Poincaré – Liapunov 定理 ·····	57
3. Poincaré – Dulac 共振形 Dulac 定理 ·····	63
4. Siegel – Brjuno 定理 ·····	64
§ 6 复域中的 Hopf 分枝 ·····	71
1. 预备工作 问题及结论·····	71
2. 主要结果·····	73
3. 关于拟共振的注·····	75
§ 7 渐近理论的一般结果·····	76
1. 基本定义 Borel – Ritt 定理·····	76
2. 一个重要的同构·····	80
3. 又一个重要的同构·····	83
§ 8 鞍结点的解析分类·····	87
1. 扇形同痕·····	88
2. 解析鞍结点的综合之例·····	92
3. 鞍—结点分析·····	96
4. 一些推论 ·····	101

第三章 多项式微分系统极限环的有限性问题	105
§ 1 引言 有限性猜测	105
1. 前言	105
2. 几个定义	107
3. Dulac 原文的评估	111
§ 2 修正的 Dulac 定理	113
1. 消奇定理	113
2. 几何引理	115
3. 正则型	115
4. Dulac 对应律—非退化情形	117
5. Dulac 对应律—退化情形	118
6. 定理的证明	120
7. Il'yashenko 的怪例	121
§ 3 从 Dulac 对应律到环的有限性	123
1. 精确化	124
2. 几个有限性定理	129
3. Il'yashenko 定理	131
4. 注记	137
§ 4 Yoccoz 关于 Ecalle 等人工作的陈述	141
1. Dualc 群与 Il'yashenko 群	142
2. Dualc 定理的最终证明	149
3. 重求和方法	163
§ 5 初等方法	171
1. Bamón 的工作	171
2. 二边形定理	174
第四章 复射影平面上的全纯微分方程	179
前言	179

§ 1	复相空间的基本概念	180
1.	复方程的几个基本定义	181
2.	复环的实化	183
3.	普适性	185
§ 2	关于伪群的预备知识	187
1.	标号群	187
2.	方程与单一群的拓扑等价性	188
3.	单一变换的伪群	189
4.	保角变换的伪群	191
§ 3	解的稠密性定理	193
1.	定理的陈述	193
2.	预备工作	194
3.	定理的证明	196
§ 4	同调无关的复环	198
1.	定理的陈述	198
2.	可数个同调无关环的构造	199
3.	定理的证明	201
§ 5	代数 Pfaff 方程	205
1.	引言	205
2.	代数 Pfaff 形	207
3.	Jacobi 方程	210
4.	代数解	212
§ 6	结构稳定性若干问题	215
附录	首积分与同迹 指数公式	219
§ 1	首积分与同迹	219
1.	主要定理	219
2.	同迹群的计算	222