LINEAR ALGEBRA

线性代数

主编 ◎ 邓臻 韩淑芹 郑素华

中國海洋大學出版社
CHINA OCEAN UNIVERSITY PRESS

线性代数

主　编　邓　臻　韩淑芹　郑素华

副主编　陈红燕　姜翠萍　鹿泉育

编　委　曾　钰　韩晓艳　占　飞

戚永委

中国海洋大学出版社

·青岛·

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 邓臻主编 . —青岛：中国海洋大学出版社，2014. 1

ISBN 978-7-5670-0547-1

Ⅰ . ①线… Ⅱ . ①邓… Ⅲ . ①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ . ① O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 020259 号

出版发行	中国海洋大学出版社		
社　　址	青岛市香港东路 23 号	**邮政编码**	266071
出 版 人	杨立敏		
网　　址	http://www. ouc-press. com		
电子信箱	hpjiao@hotmail.com		
订购电话	0532 - 82032573（传真）		
责任编辑	矫恒鹏	**电　　话**	0532 - 85902349
印　　制	日照报业印刷有限公司		
版　　次	2014 年 2 月第 1 版		
印　　次	2014 年 2 月第 1 次印刷		
成品尺寸	170 mm × 230 mm		
印　　张	8. 5		
字　　数	176 千		
定　　价	19. 00 元		

前 言 Preface

本书是编者根据多年的教学实践，按照新形势下培养应用型人才的需求而编写，可作为高等院校理工类与经管类各专业“线性代数”课程的试用教材和教学参考书.

本书共五章：行列式、矩阵、向量组的线性相关性、矩阵的特征值与特征向量、二次型. 各章配有难易适中的习题，题型包括：单项选择题、填空题、计算题以及证明题；书末附有习题答案.

本书对传统教材中的一些内容作了适当的精简和合并，在多数难理解的概念前都增添了实例引入，并适当降低了理论深度，加强应用能力的培养，既可以保证基本的教学要求，又可以适应新社会的发展需要，更便于教学.

目 录 Contents

第1章

行列式

解方程是代数中的基本问题，在中学数学中，主要求解一元一次方程、二元一次和三元一次方程组.在线性代数中，主要讨论一般的多元一次方程组，即线性方程组.

本章引进行列式求解线性方程组.

行列式是线性代数中的一个重要概念，它广泛应用于数学、工程技术及经济学等众多领域.行列式的概念始于三百多年以前，首先引入这一概念的是日本数学家关孝和.目前形式的行列式记号则是1841年英国数学家凯莱(Cayley)首次给出的.

本章从实际问题入手表明学习行列式这一数学工具的必要性，进而引入其概念，讨论其性质，并介绍其常用的计算方法和技巧.

本章是学习线性方程组和以后各章相关内容的基础.

§1.1 从货物交换问题谈起

诺贝尔经济学奖获得者列昂惕夫(Leontief)曾考虑如下的一个经济学模型.在一个原始部落，根据分工，人们分别从事3种劳动：农田耕作(记为F)、农具与工具的制作(记为M)，以及织物的编织(记为C).人们之间的贸易是实物交易，农夫们将每年收获的一半留给自己，并分别拿出$\frac{1}{4}$给工匠们和织布者们；而工匠们却平均分配他们制作的用具给每个组；织布者们则留下$\frac{1}{4}$的衣物给自己，并拿出$\frac{1}{4}$给工匠

们、$\frac{1}{2}$给农夫们. 此交易系统也可以用表给出，见表 1-1.

表 1-1

	F	M	C
F	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
M	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
C	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

随着社会的发展，实物交易的形式变得十分不方便，于是部落决定用货币进行交易. 假设没有资本和负债，那么如何给每类产品定价，使其公正地体现旧有的实物交易系统呢？

令 x_1 为农作物的价值，x_2 为农具及工具的价值，x_3 为织物的价值，那么由表 1-1 的第 1 行，农夫们生产的价值应等于他们交换到的产品(包括留给自己的)价值，即有

$$x_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3.$$

同理可得，工匠们和纺织者们生产与交换的价值方程为

$$x_2 = \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3,$$

$$x_3 = \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3.$$

整理得如下方程组：

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0, \\ \frac{1}{4}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 0, \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{3}{4}x_3 = 0. \end{cases}$$

因此，该问题可归结为一个**三元一次线性方程组**的求解问题.

大量的社会经济现象的研究最终都可以归结为形如上述的 **n 个方程 n 个未知数的齐次线性方程组**(右边常数项全部为零)或**非齐次线性方程组**(右边常数项至少有一个非零)的求解. 因此，对此类方程组的求解就十分重要而有意义.

在中学数学里，我们曾用加减消元法求解如下的二元一次线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，该方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1}$$

对三元一次线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \neq 0$ 时，该方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22}a_{33} + b_2a_{13}a_{33} + b_3a_{12}a_{23} - b_1a_{23}a_{32} - b_2a_{12}a_{33} - b_3a_{13}a_{22}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}}, \\ x_2 = \dfrac{b_1a_{31}a_{23} + b_2a_{11}a_{33} + b_3a_{21}a_{13} - b_1a_{21}a_{33} - b_2a_{13}a_{31} - b_3a_{23}a_{11}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}}, \\ x_3 = \dfrac{b_1a_{21}a_{32} + b_2a_{31}a_{12} + b_3a_{11}a_{22} - b_1a_{22}a_{31} - b_2a_{11}a_{32} - b_3a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}}. \end{cases} \tag{2}$$

当未知数个数和方程个数增加时，用加减消元法得到的类似(1)式、(2)式的公式将更加复杂. 这就需要研究上面(1)式、(2)式所包含的规律，为此我们引入行列式的概念.

§1.2 行列式的概念

1.2.1 二阶、三阶行列式

定义 1.1 将 2^2 个数排列成 2 行 2 列：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

称为**二阶行列式**，记作 D. 式中数 $a_{ij}\ (i = 1,2; j = 1,2)$ 称为行列式的**元素或元**，其第一个下标 i 称为**行标**，表示该元素位于行列式的第 i 行，第二个下标 j 称为**列标**，表示该元素位于行列式的第 j 列. 行列式中元素 a_{ij} 也称为 (i,j) **元**.

上述二阶行列式的定义，可用**对角线法则**来记忆. 参看图 1-2，把 a_{11} 到 a_{22} 的实

联线称为**主对角线**，a_{12} 到 a_{21} 的虚联线称为**副对角线**，于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

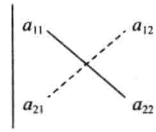

图 1-2

有了二阶行列式的定义，二元一次线性方程组的解(1)可以方便地用下式表示：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D}, \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D}. \end{cases} \tag{3}$$

其中

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

这里的 D 称为方程组的**系数行列式**，D_j 则是用常数列替代 D 中第 j 列元素所得到的行列式.

例 1 计算 $D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}$

解 $D_1 = 3 \times (-1) - 2 \times (-2) = 1, D_2 = a^2 - b^2.$

定义 1.2 将 3^2 个数排列成 3 行 3 列：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

称此为**三阶行列式**.

三阶行列式遵循图 1-3 所示的对角线法则：三条实线看作是平行于主对角线的联线，三条虚线看作是平行于副对角线的联线，实线上三元素的乘积冠正号，虚线上三元素的乘积冠负号.

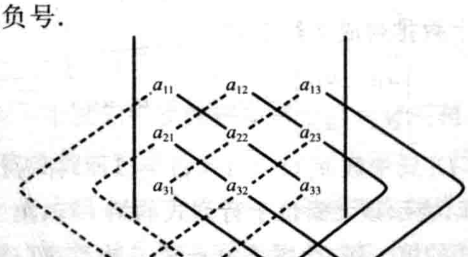

图 1-3

同理，有了三阶行列式的定义，三元一次线性方程组的解(2)可以方便地用下式表示：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D}, \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D}, \\ x_3 = \dfrac{D_3}{D}. \end{cases} \tag{4}$$

其中

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

例 2 计算 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ 的值.

解

$$D = 1\times5\times9 + 2\times6\times7 + 3\times4\times8 - 3\times5\times7 - 2\times4\times9 - 1\times6\times8 = 0.$$

例 3 解方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = -3, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9, \end{cases}$

解 先计算系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1\times3\times3 + 1\times(-1)\times2 + (-2)\times(-2)\times(-1)$$

$$- (-2)\times3\times2 - 1\times(-2)\times3 - 1\times(-1)\times(-1)$$

$$= 20 \neq 0$$

同理可计算

$$D_1 = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 9 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 20, D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 40,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 60,$$

再代入(1.4)式得：$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$. 经检验是原方程组的解.

以上讨论启发我们考虑：对四元及以上的 n 元线性方程组，是否有类似的求解方法，即用 n 阶行列式求解. 答案是肯定的.

为了引入 n 阶行列式的概念，我们先讨论排列的性质.

1.2.2 全排列及其逆序数

定义 1.3 把 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 排成一列，叫作一个 **n 级全排列**(简称**排列**).

例如，1234 是一个四级排列，45321 是一个五级排列，而三级排列有：123，213，132，312，231，321，总共是 $3! = 6$ 个.

显然，n 级排列的总个数为 $n!$.

规定由小到大的次序为**标准次序**. 由小到大的排列称为**标准排列**，也称为**自然排列**.

例如，$123\cdots n$ 即为一 n 级自然排列.

定义 1.4 在一个排列中，如果两个数的先后次序与标准次序不同，就称为一个**逆序**，一个排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 中所有逆序的总数叫作该排列的**逆序数**，记为 $\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)$.

若 $\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)$ 为奇数，则称排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为**奇排列**，若 $\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)$ 为偶数，则称排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ **为偶排列**. 自然排列的逆序数为 0，也归入偶排列.

例如，三级排列中，123，312，231 为偶排列；213，132，321 为奇排列.

易知，所有的 n 级排列中，奇排列和偶排列各占一半.

例 4 求排列 6743215 的逆序数，并指明其奇偶性.

解 在排列 6743215 中：

6 排在首位，逆序数为 0；

7 是最大数，逆序数为 0；

4 的前面比 4 大的数有两个：6，7，故逆序数为 2；

3 的前面比 3 大的数有三个：6，7，4，故逆序数为 3；

2 的前面比 2 大的数有四个：6，7，4，3，故逆序数为 4；

1 的前面比 1 大的数有五个：6，7，4，3，2，故逆序数为 5；

5 的前面比 5 大的数有两个：6，7，故逆序数为 2；

于是，$\tau(6743215) = 0+0+2+3+4+5+2 = 16$，即为偶排列.

例 5 求 n 级排列 $n(n-1)\cdots 1$ 的逆序数.

解 $\tau(n(n-1)\cdots 1) = 0+1+2+\cdots+(n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

1.2.3 n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义，先来研究三阶行列式的结构.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

容易看出：

(1) 展开式中共有 3! 项，且每项都是不同行、不同列的 3 个元素的乘积. 如果将每项的第一个下标(行标)按自然顺序排列，则任一项可用 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 表示，$p_1p_2p_3$(列标排列)是 1,2,3 的某一排列，显然这样的排列的总个数恰为 3! 个；

(2) 展开式中所有项都带符号，一半正，一半负. 带正号的列标排列依次是：123,231,312，为偶排列；而带负号的列标排列依次是：321,213,132，为奇排列. 因此各项所带的正负号可以表示为 $(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}$.

于是三阶行列式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3} (-1)^{\tau(p_1p_2p_3)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

$\sum\limits_{p_1p_2p_3}$ 表示对 1,2,3 的所有排列求和.

仿此，可以把行列式推广到 n 阶的情形.

定义 1.5 将 n^2 个数排列成 n 行 n 列：

$$D = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

称为 **n 阶行列式.**

n 阶行列式的展开式中共有 $n!$ 项，每一项都是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积，每一项的行标都按照自然排列，于是列标排列的逆序数确定该项的正

负号.

按此定义的二阶、三阶行列式,与用对角线法则定义的二阶、三阶行列式,显然是一致的. 当 $n=1$ 时,一阶行列式 $D=|a_{11}|=a_{11}$,注意不要与绝对值记号相混淆.

例 6 五阶行列式的展开式有多少项? 判断 $a_{31}a_{43}a_{21}a_{52}a_{55}$ 及 $a_{12}a_{23}a_{54}a_{31}a_{45}$ 是否为五阶行列式的项,如果是,确定其正负号.

解 五阶行列式的展开式共有 $5!=120$ 项.

因为 $a_{31}a_{43}a_{21}a_{52}a_{55}$ 中的 a_{52} 及 a_{55} 都是第 5 行的元素,所以它不是展开式中的项. 而 $a_{12}a_{23}a_{54}a_{31}a_{45}=a_{12}a_{23}a_{31}a_{45}a_{54}$ 取自于不同的 5 行和不同的 5 列,因此是展开式中的项,且 $\tau(23154)=3$,故取负号.

例 7 由行列式的定义容易证得,n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

其中未写出的元素都为 0.

其中第一式左端称为**对角行列式**.

例 8 证明**上(下)三角形行列式**的值等于主对角线上各元素的乘积,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证 以下三角形为例,

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{np_n}.$$

要取第一行 $a_{1p_1}\neq 0$ 的元素,则取 $p_1=1$;要取第二行 $a_{2p_2}\neq 0$ 的元素,则取

$p_2=1$ 或 2,但已取 $p_1=1$,且使 $p_1\neq p_2$,所以取 $p_2=2$. 同理可推得 $p_j=j,j=3,\cdots,n$,即 D 中仅有一项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\neq 0$,所以

$$D=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

§1.3 行列式的性质

用定义计算 n 阶行列式,就得求 $n!$ 项 n 个元素乘积的代数和,计算量比较大,因此我们有必要讨论行列式的计算方法. 本节先研究行列式的运算性质,然后利用其性质给出一种简便的计算方法.

性质 1 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称 D^T 为 D 的**转置行列式**,有 $D=D^T$.

本性质不予证明.

以二阶行列式为例,$D=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$,其转置行列式 $D^T=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=ad-cb$. 显然,有 $D=D^T$.

由此性质知,行列式中的行与列具有同等的地位;行列式的性质中凡是对行成立的对列也同样成立,反之亦然.

性质 2 互换行列式的两行(列),行列式变号.

本性质不予证明.

以二阶行列式为例,$D=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$,交换第 1,2 行,得 $D_1=\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}=cb-da$,显然,有 $D=-D_1$.

推论 如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式等于零.

性质 3 用数 k 乘以行列式的某一行(列)的所有元素,等于用数 k 乘此行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = kD.$$

证 由行列式的定义，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots ka_{ip_i}\cdots a_{np_n}$$

$$= k\sum_{p_1\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n} = kD.$$

推论 1 行列式某一行(列)的所有元素的公因子 k 可以提到行列式记号的外面.

推论 2 行列式中如果有两行(列)元素对应成比例，则此行列式等于零.

性质 4 若行列式的某一行(列)的元素皆为两数之和，则此行列式可以拆分为两个行列式之和. 例如，

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 5 把行列式某一行(列)的各元素的 k 倍加到另一行(列)的对应元素上去，行列式的值不变.

例如将第 j 行的 k 倍加到第 i 行上，有