冯由玲 著

抽象空间中线性时标动力学方程的研究

清华大学出版社

冯由玲 著

抽象空间中
线性时标动力学方程的研究

清华大学出版社
北 京

内容简介

德国数学家 Hilger 于 1988 年在其博士论文中创立了时标上的微积分理论，将微分方程与差分方程统一并推广到时标动力学方程的理论框架上。线性时标动力学方程在信息、控制、电力系统、经济以及生物学等许多领域都有应用。现有关于时标动力学方程的研究中，多数研究对象为纯量方程或低维向量方程，由于抽象(包括高维)空间中的动力学方程更具有一般性，因此关于时标动力学方程的研究更具有理论及应用研究价值。本书是作者几年来科研成果的总结，主要研究抽象空间中时标动力学方程的相关问题。全书共分 5 章，讨论了矩阵代数以及 Banach 代数中线性时标动力学方程的解、Banach 空间中线性时标动力学方程解的存在唯一性等问题。作者从泛函分析的视角，利用算子的 Riesz 函数演算及谱理论等工具展开研究，具有一般性，这里的抽象空间将通常的 n 维欧式空间涵盖进来，将低维的结果推广到高维，为从事于该领域研究的学者提供一定的借鉴意义。本书最后一部分是对复时标上解析函数进行了初步的研究，主要考虑了复时标上解析函数与经典解析函数之间的关系，得到了几类复时标上解析函数的局部开拓条件，并且对单项式在复时标上的解析性进行讨论。

本书结构合理，写作思路清晰，论证严谨明晰，数学推导逻辑严密，研究成果涉及面广。既适合数学与应用数学、基础数学及相关专业的师生使用，也适合从事微分方程、差分方程及时标动力学方程研究的学者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

抽象空间中线性时标动力学方程的研究 / 冯由玲 编著. —北京：清华大学出版社，2014

ISBN 978-7-302-36955-4

I. ①抽… II. ①冯… III. ①抽象空间—线性—时标—动力学方程—研究 IV. ①O313

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 136395 号

责任编辑：王桑娉 易银荣
封面设计：牛艳敏
版式设计：方加青
责任校对：曹 阳
责任印制：刘海龙

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 **邮 编**：100084
社总机：010-62770175 **邮 购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市金元印装有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：169mm×230mm **印 张**：8.25 **字 数**：103 千字
版 次：2014 年 8 月第 1 版 **印 次**：2014 年 8 月第1次印刷
定 价：58.00 元

产品编号：058442-01

前　言

人们在研究微分方程和差分方程时发现，二者有很多类似的研究方法及性质。时标微积分把对微分方程和差分方程的研究统一并推广到时标动力学方程的框架下进行，不仅可以避免对微分方程和差分方程的重复研究，又可以揭示微分方程和差分方程的本质区别。不仅如此，时标动力学方程还具有很强的应用价值，在信息、控制、电力系统、经济以及生物学等领域都有广泛的应用。例如，一类种群的数量在一个季节是连续变化的，而在另一个季节由于它们的卵处于休眠状态，这时种群的数量为零。在新的季节来临时，卵就会被孵化变成新的生命，形成一个不交叠的种群数量关系。描述这类具有冬眠（或蛰伏）特性的种群数量随季节变化的规律时，在时标上建立动力学模型更能反映实际情况。近年来，时标微积分理论一直备受关注，取得了大量的研究成果。现有关于时标动力学方程的研究中，多数研究对象为纯量方程或低维向量方程。抽象（包括高维）空间中的动力学方程更具有一般性，因此研究价值更大。

本书是作者几年来科研成果的总结，主要研究抽象空

间中时标动力学方程的相关问题。全书共分5章，讨论矩阵代数以及 Banach 代数中线性时标动力学方程的解、Banach 空间中线性时标动力学方程解的存在唯一性等问题。作者从泛函分析的视角，利用算子的 Riesz 函数演算及谱理论等工具展开研究，具有一般性。这里的抽象空间将通常的 n 维欧式空间涵盖进来，将低维的结果推广到高维，为从事于该领域研究的学者提供一定的借鉴意义。本书最后一部分对复时标上的解析函数进行了初步的研究。具体内容如下：

（1）对于常系数线性矩阵时标动力学方程，我们将时标动力学方程的解（也就是广义矩阵指数函数）的计算转化为对应的纯量齐次时标动力学方程求解问题，得到了常系数线性矩阵时标动力学方程解的显式表达式及算法。

（2）对于时变的线性时标动力学方程，我们将时标上的广义实值指数函数推广到一般的 Banach 代数中。在一定条件下证明，我们定义的广义指数函数恰为有单位元的交换 Banach 代数中的线性时标动力学方程的解。

（3）在 Banach 空间中，我们考虑了线性时标动力学方程解的存在唯一性。找到了一个算子类，并且在某些条件下是保证线性系统解的存在唯一性不依赖于具体时标的最大算子类。在 Hilbert 空间中刻画算子类的闭包和内部，描述了该算子类的大小。

（4）我们考虑了复时标上函数的解析性与经典的复平面上函数解析性之间的关系，得到了几类复时标上解析函数的局部开拓条件，还对单项式在复时标上的解析性进行了讨论。

本书是在国家自然科学基金项目（项目编号：11326103，11271150）、吉林省教育厅“十二五”科学技术研究项目（项目编号：2013215）、吉林财经大学2013年专著出版资助计划的资助和支持下完成的。值此专著完成之际，诚挚感谢吉林大学数学研究所纪友清教授多年来对我的指导和帮助。

由于作者水平有限，书中难免有考虑不周和疏漏之处，诚请广大读者批评指正。

冯由玲

2014年3月于长春

目　录

中英文摘要

在本书中，总以 $\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$、$\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{N}$ 分别表示实数域、复数域、整数集和自然数集；$\mathcal{X}$(或 $\mathcal{H}$) 表示复 Banach(或 Hilbert) 空间。$\mathcal{B}(\mathcal{X})$(或 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$) 表示 $\mathcal{X}$(或 $\mathcal{H}$) 上全体有界线性算子全体构成的集合。M_m 表示 m 阶的复矩阵代数。$\mathbb{T}$ 表示时标，即实数轴 $\mathbb{R}$ 上的非空闭子集。

时标上的分析理论创立于 1988 年，由德国数学家 Hilger 在其博士论文[51]中提出的。时标分析理论将连续与离散的分析理论整合并统一到同一框架，同时将经典的微积分理论拓广到一般的时标上来。Hilger[51,52]定义函数 $f:\mathbb{T}\to\mathcal{X}$ 的 Δ 导数将通常的导数和向前差分统一起来。当 $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ 为实数轴时，Δ 导数即为通常的导数 f'；当 $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ 时，Δ 导数即为通常的向前差分。因此，时标上的微积分将微分方程与差分方程统一并推广到时标动力学方程理论框架。近年来，时标动力学方程受到国内外众多学者的关注[23,26,18,79,20]。2002 年，Atici 和 Guseinov[9]将 Δ 导数中的前跃算子 σ 换成后跃算子 ρ，得到了∇导数的定义并且研究了时标上的∇动力学方程。

线性微分方程和差分方程出现在数学的许多领域及其应用当中，比如描述许多力学系统、电路回路系统、生物系统等模型[23,79,10]。因此时标上的线性动力学方程具有重要的理论及实际意义。

本书主要研究时标上的线性动力学方程，分别在矩阵代数、抽

象的 Banach 代数及 Banach 空间中考虑线性时标动力学方程解的算法、显式表达及解的存在唯一性等相关问题。另外还研究了复时标上的解析函数理论。

考虑时标 $\mathbb{T}$ 上的线性动力学方程

$$\begin{cases} X^{\Delta}(t) = A(t)X(t) \\ X(s) = I \end{cases} \tag{0.1}$$

其中 $A(\cdot)$ 、$X(\cdot)$ 为 $\mathbb{T}$ 到 M_m 上的矩阵值函数。

当 $\mathbb{T}=\mathbb{R}$（或 $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$），$A(\cdot)$ 为常值函数时，方程（0.1）解的结构一直受到人们的关注[88,65,78,49,5,83,92]。近些年来，随着时标动力学方程理论的蓬勃发展和应用的需要，人们对方程（0.1）解的结构和算法的研究也取得了一些成果。

1990 年，Hilger[52] 标 $\mathbb{T}$ 到 $\mathbb{R}$ 上的广义 Δ 指数函数即为方程（0.1）对应纯量方程的解。

2001 年，Bohner 和 Peterson[23] 直接将矩阵方程（0.1）的唯一解定义为时标上的矩阵指数函数，记为 $e_A(\cdot,s)$。他们将 Putzer 算法[88] 推广到求解广义常矩阵指数函数。后来，Harris 算法及 Leonard 算法也被推广到广义常矩阵指数函数的计算[15,95,96]。

2007 年，Verde - Star[92] 用初等方法和算子恒等式求解常系数线性矩阵微分方程，得到了矩阵指数函数 e^{At} 的显式表达式。

本书在第 2 章中考虑方程（0.1）的求解问题，推广了 Verde - Star[92] 的方法。下面介绍时标动力学方程（0.1）的求解方法及解的结构。

设 ω 是能被 A 的极小多项式整除的首一多项式，即

$$\begin{cases} \omega(t) = b_0 t^{n+1} + b_1 t^{n} + b_2 t^{n-1} + \cdots + b_{n+1} \\ \omega(A) = 0 \end{cases} \tag{0.2}$$

其中 $b_0 = 1$。

称初值问题

$$\omega(D)f(t)=0,D^kf(0)=0(0\leqslant k\leqslant n-1),D^nf(0)=1 \quad (0.3)$$

的解为与 ω 相伴的动态解，其中 D 代表 Δ 导算子。

定义 $\omega_k(x)=b_0x^k+b_1x^{k-1}+\cdots+b_k(0\leqslant k\leqslant n+1)$ 为 ω 的 Horner 多项式。我们利用与 ω 相伴的动态解将方程（0.1）的解表示成矩阵 A 的多项式。

定理 0.1 设 A 为 m 阶常矩阵。ω 同（0.2），$\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_n$ 为 ω 的 Horner 多项式，$f(t)$ 是与 ω 相伴的动态解。则方程（0.1）的解（即广义矩阵指数函数）为

$$e_A(t,0)=\sum_{j=0}^{n}A^{n-j}\omega_j(D)f(t) \quad (0.4)$$

或

$$e_A(t,0)=\sum_{j=0}^{n}\omega_j(A)D^{n-j}f(t) \quad (0.5)$$

可见，广义矩阵指数函数的系数完全由与 ω 相伴的动态解决定。为引入与 ω 相伴的动态解公式，先做一些准备工作。

定义时标 $\mathbb{T}$ 上的基本广义指数多项式为

$$g_{a,k}(t)=\psi_{a,k}(t)e_a(t,0),\ a\in\mathbb{C},\ k\in\mathbb{N}$$

其中 $e_a(t,s)$ 是时标动力学方程

$$x^{\Delta}(t)=ax(t),\ x(s)=1,\ a\in\mathbb{C}$$

的解。

$$\psi_0(t)=1,\psi_{a,k+1}(t)=\int_0^t e_a(\tau,\sigma(\tau))\psi_{a,k}(\tau)\Delta\tau,a\in\mathbb{C},\ k\in\mathbb{N}$$

定义可交换的卷积运算 $*$ 为

$$g_{a,k}*g_{b,m}=\sum_{j=0}^{k}C(a,j,b,m)g_{a,k-j}+\sum_{j=0}^{m}C(b,j,a,k)g_{b,m-j},a\neq b \quad (0.6)$$

其中

$$C(a,j,b,i)=(-1)^jC_{j+i}^j(a-b)^{-j-i-1},a\neq b,i,j\in\mathbb{N}$$

$$g_{a,k} * g_{a,m} = g_{a,1+k+m}, a \in \mathbb{C}, k,m \in \mathbb{N} \tag{0.7}$$

下面介绍动力学方程（0.3）解公式。

定理0.2 设ω同（0.2），令

$$f_{\omega} = g_{a_0,m_0} * g_{a_1,m_1} * \cdots * g_{a_r,m_r} \tag{0.8}$$

则f_{ω}是与ω相伴的动态解。

将（0.8）带入（0.4）或（0.5）即为广义常矩阵指数函数的明确表达式。

对于时标上线性常矩阵∇动力学方程的求解问题，我们可以得到与方程（0.1）平行的结论。

当$A(t)$不是常值函数时，方程（0.1）解的结构比较复杂。在本书的第3章中，我们对一般的$A(t)$考虑$e_A(\cdot,s)$的表达式，将广义实值指数函数的定义推广到Banach代数中。

设$\mathfrak{B}$为复数域$\mathbb{C}$上的Banach代数，$A \in \mathfrak{B}$，定义A的谱为$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}: A - \lambda I$在$\mathfrak{B}$中不可逆$\}$。设函数$A:\mathbb{T} \to \mathfrak{B}$右稠连续，我们在一定的谱条件下定义了算子值函数$A(\cdot)$的柱面变换。

若G是主对数函数Logz的单值解析分支（解析区域为负实轴割破的复平面）。若函数$A(\cdot)$的谱满足条件

$$(S): \bigcup_{\mu(\tau)>0,\tau\in\mathbb{T}} \{1 + \mu(\tau)\lambda \mid \lambda \in \sigma(A(\tau))\} \subset G$$

则定义函数$A(\cdot)$的柱面变换为

$$\xi_{\mu(\tau)}(A(\tau)) = \begin{cases} \dfrac{Log(I + \mu(\tau)A(\tau))}{\mu(\tau)}, \mu(\tau) > 0 \\ A(\tau), \mu(\tau) = 0 \end{cases}$$

进而利用柱面变换引入Banach代数中Δ指数函数的概念。

定义0.1 设$\mathfrak{B}$为有单位元的Banach代数，$\mathbb{T}$为时标，函数$A:\mathbb{T} \to \mathfrak{B}$（或$\mathfrak{B}$的子代数）。若函数$A(\cdot)$右稠连续且满足谱条件$(S)$，定义函数$A(\cdot)$的$\Delta$指数函数为

$$e_A(t,s) = exp\left\{\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(A(\tau))\Delta\tau\right\}, s,t \in \mathbb{T} \qquad (0.9)$$

利用 Riesz 函数演算及谱映射定理可以验证定义 0.1 的合理性。我们定义的 Δ 指数函数 $e_A(t,s)$ 恰为有单位元的交换 Banach 代数中方程（0.1）的解，这推广了纯量方程的结果。

定理 0.3 设 $\mathfrak{B}$ 是有单位元的交换 Banach 代数（或其交换子代数），I 为 $\mathfrak{B}$ 中的单位元。若 $A(\cdot)$ 为 $\mathbb{T}$ 到 $\mathfrak{B}$ 上的右稠连续函数且满足谱条件（S），则 $y(t) = e_A(t,s)$ 是方程（0.1）的唯一解。

另外，我们还考虑了 Banach 代数中的∇指数函数，得到了与 Δ 指数函数平行的结论。

在本书的第 4 章中，我们考虑了 Banach 空间中的线性动力学方程

$$y^{\Delta}(t) = A(t)y, y(s) = y_0 \qquad (0.10)$$

其中，$A:\mathbb{T} \to \mathcal{B}(\mathcal{X})$，$y:\mathbb{T} \to \mathcal{X}$。

我们从算子值函数 $A(\cdot)$ 的值域角度出发，研究解的存在唯一性。定义 $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ 中的算子类 $\mathcal{U}:=\{A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}): \sigma(A) \cap \mathbb{R}^- = \varnothing\}$，其中 $\sigma(A)$ 为算子 A 的谱。则 $\mathcal{U}$ 是在一定条件下，保证系统（0.10）解的存在唯一性不依赖于具体时标的最大算子类。

定理 0.4 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ 中满足下面条件的最大的算子类。

(G)：对任意的时标 $\mathbb{T}$，若算子值函数 $A(\cdot):\mathbb{T} \to \mathcal{U}$ 按强算子拓扑右稠连续，则齐次方程（0.10）必存在唯一的全局解。

然后我们在 Hilbert 空间中刻画算子类 $\mathcal{U}$ 的闭包和内部，描述算子类 $\mathcal{U}$ 的大小。

设 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，$\mathcal{N}(A)$ 和 $\mathcal{R}(A)$ 分别表示 A 的核空间和 A 的值域。称 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一个 **semi-Fredholm** 算子，如果 $\mathcal{R}(A)$ 是闭的，而且 $\mathrm{nul}A$ 和 $\mathrm{nul}A^*$ 中至少有一个是有限的，其中 $\mathrm{nul}A:=\dim\mathcal{N}(A)$，$\mathrm{nul}A^*:=\dim\mathcal{N}(A^*)$；此时 $\mathrm{ind}A:=\mathrm{nul}A-\mathrm{nul}A^*$ 称为 A 的指标。算

子 A 的 Wolf 谱 $\sigma_{lre}(A)$ 定义为 $\sigma_{lre}(A):=\{\lambda\in\mathbb{C}:A-\lambda$ 不是 semi-Fredholm 算子$\}$，称 $\rho_{s-F}(A):=\mathbb{C}\setminus\sigma_{lre}(A)$ 为 A 的 semi-Fredholm 域。对任意的 $-\infty\leqslant n\leqslant\infty$，记 $\rho_{s-F}^{(n)}(A):=\{\lambda\in\rho_{s-F}(A):\mathrm{ind}(A-\lambda)=n\}$。用 $\overline{\mathcal{U}}$ 表示集合 $\mathcal{U}$ 的闭包，$\mathcal{U}^{\circ}$ 表示 $\mathcal{U}$ 的内部。

定理 0.5 设 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$，则有

(i) $T\in\overline{\mathcal{U}}$ 当且仅当对任意 $\lambda\leqslant 0$，或者 $\lambda\in\sigma_{lre}(T)$ 或者 $\lambda\in\rho_{s-F}^{(0)}(T)$；

(ii) $T\in\mathcal{U}^{\circ}$ 当且仅当 $\sigma(T)\cap[\mathbb{R}^{-}\cup\{0\}]=\varnothing$。

可见算子类 $\mathcal{U}$ 有内点，因此含有较多的算子。作为推论，当 $\mathcal{B}(\mathcal{H})=M_m$ 为矩阵代数时，$\overline{\mathcal{U}}=M_m$。

我们还讨论了线性∇动力学方程解的存在唯一性问题，得到了与 Δ 动力学方程平行的结论。

2006 年，Bohner 和 Guseinov[19] 将连续和离散复分析理论推广到时标上来。他们定义了复时标 $\mathbb{T}_1+i\mathbb{T}_2$ 上的 Δ 解析函数（其中 $\mathbb{T}_1$，$\mathbb{T}_2$ 为任意时标），将第一类离散和半离散解析以及经典解析的概念统一并推广到时标框架下。2007 年，Sinan[63] 将文献［19］的结果推广到∇解析函数的情形。

本书在第 5 章考虑复时标上函数的 Δ 和∇解析性与经典解析性之间的关系，得到了几类复时标上 Δ 和∇解析函数的局部开拓条件，并且对单项式 $p_n(z)=z^n$ 在复时标上的 Δ 和∇解析性进行了讨论。

设 $f:\mathbb{T}_1+i\mathbb{T}_2\to\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{T}_1+i\mathbb{T}_2$ 上的 Δ（或∇）解析的函数，对 $z_0=x_0+iy_0\in\mathbb{T}_1^k+i\mathbb{T}_2^k$，若存在复平面上的邻域 $U_\delta(z_0)$ 及 $U_\delta(z_0)$ 内的解析函数 $g(z)$，使得对任意的 $z\in U_\delta(z_0)\cap(\mathbb{T}_1^k+i\mathbb{T}_2^k)$，都有 $g(z)=f(z)$ 和 $g'(z)=f^{\Delta}(z)$（或 $g'(z)=f^{\nabla}(z)$）同时成立，则称 $g(z)$ 为函数 $f(z)$ 在 z_0 点的一个局部解析开拓。若对任意 $z_0\in\mathbb{T}_1^k+i\mathbb{T}_2^k$，$f(z)$ 都存在局部解析开拓，则称 $f(z)$ 在 $\mathbb{T}_1+i\mathbb{T}_2$ 上存在局部解

析开拓。

我们对一类复时标上 Δ 解析函数得到了局部解析开拓的充要条件。

定理 0.6 设 $\mathbb{T}_1 = [a,b]$ 为 $\mathbb{R}$ 上的闭区间（可以是 $[a,+\infty)$，$(-\infty,b]$ 或 $(-\infty,+\infty)$）；$\mathbb{T}_2 = \{y_k\}_{k=1}^{N}$ 为 $\mathbb{R}$ 中不含聚点的至多可数集合，其中 $2 \leqslant N \leqslant +\infty$，记 $\Gamma_k = [a,b) + i\{y_k\}$（$N < \infty$时，$k = 1,2,3,\cdots,N-1$；$N = \infty$时，$k = 1,2,3,\cdots$）。设函数$f:\mathbb{T}_1 + i\mathbb{T}_2 \to \mathbb{R}$ 在 $\mathbb{T}_1 + i\mathbb{T}_2$ 上 Δ 解析，且 $f|_{\Gamma_k} = u(x,y_k) + iv(x,y_k)$。则$f|_{\Gamma_k}$ 的实部 $u(x,y_k)$ 与虚部 $v(x,y_k)$ 在 (a,b) 内实解析，当且仅当$f(z)$ 在 Γ_k 上存在唯一的局部解析开拓（$N < \infty$时，$k = 1,2,3,\cdots,N-1$；$N = \infty$ 时，$k = 1,2,3,\cdots$）。

我们对单项式 $p_n(z) = z^n$ 在复时标上的 Δ 和∇解析性进行讨论，得到以下结果。

定理 0.7 设 $\mathbb{T}_1,\mathbb{T}_2$ 为 $\mathbb{R}$ 上的两个时标。对任意给定的自然数 $n \geqslant 3$，若 $\mathbb{T}_1$ 中存在右散点，$\mathbb{T}_2$ 中至少存在 n 个右稠点，则单项式 $p_n(z) = z^n$ 在 $\mathbb{T}_1^k + i\mathbb{T}_2^k$ 上存在不 Δ 解析的点。

定理 0.8 当 $n = 3$ 时，设 $\mathbb{T}_1,\mathbb{T}_2$ 为 $\mathbb{R}$ 上的时标，并设 X_1,X_2 分别为 $\mathbb{T}_1,\mathbb{T}_2$ 中全体右散点组成的集合，则 $p_3(z) = z^3$ 在 $X_1 + iX_2$ 上至多存在一个 Δ 解析点 $z_0 = x_0 + iy_0$，且满足 $\sigma_1(x_0) = -2x_0$；$\sigma_2(y_0) = -2y_0$。

定理 0.9 当 $n = 4$ 时，设 $\mathbb{T}_1,\mathbb{T}_2$ 为 $\mathbb{R}$ 上的时标，若 $\mathbb{T}_1$ 中存在右散点，$\mathbb{T}_2 = \{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ 是以 y_0 为极限的单调上升（或下降）数列。则 $p_4(z) = z^4$ 在 $\mathbb{T}_1^k + i\mathbb{T}_2^k$ 上存在不 Δ 解析的点。

对于∇解析函数，我们得到了与 Δ 解析函数平行的结论。

关键词：

时标，线性动力学方程，指数函数，Banach 代数，解析函数

Abstract

Throughout this paper, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}$ and $\mathbb{N}$ denote the real numbers, the complex numbers, the integers and the natural numbers respectively. We denote by $\mathcal{X}$ a real or complex Banach space, $\mathcal{H}$ a complex separable infinite dimensinal Hilbert space. Let $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ (or $\mathcal{B}(\mathcal{H})$) denote the algebra of all bounded linear operators on $\mathcal{X}$(or$\mathcal{H}$). Let $\mathbb{T}$always denote a times scales which is defined asan arbitrary nonempty closed subset of$\mathbb{R}$.

The theory of time scales was introduced by Hilger in his 1988 PhD dissertation[51]. The calculus of time scales unifies and extends the fields of discrete and continuous calculus. The delta derivative defined by Hilger[51,52] is equal to f' (the usual derivative) if $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, and it is equal to Δf (the usual forward difference) if $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$. So the study of dynamical equations on time scales allows a simultaneous treatment of differential and difference equations. And this field has attracted many researchers' attention[23,26,18,79,20]. In 2002, Atici and Guseinov[9] defined the nabla derivative by replacing the forward jump operator σ by backward jump operator ρ and researched the ∇dynamical equations on time scales.

It is well known that linear systems of differential or difference equations are applied to many fields, such as mechanic systems, electric cir-

cuit and biological systems[23,79,10]. So it is meaningful to research the linear dynamical systems on time scales both in theory and applications.

For linear dynamical equations on time scales, we mainly consider the explicit formula of solutions in matrix algebra and Banach algebra, and explor the existence and uniqueness of solutions in Banach space.

Let us consider a linear system

$$\begin{cases} X^{\Delta}(t) = A(t)X(t) \\ X(s) = I \end{cases} \tag{0.1}$$

where $A(\cdot)$, $X(\cdot)$ are functions from a time scale $\mathbb{T}$ to M_m.

In the case that $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ and $A(\cdot) = A$, the study of the explicit constructions of solutions to equation (0.1) has attracted many researchers' attention[88,65,78,49,5,83,92]. With the development of dynamical equations on time scales, some results have been obtained in calculating the solutions of equation (0.1) on general time scales.

In 1990, Hilger[52] defined a generalized exponential function on time scale and verified that it is the solution to the scalar form of equation (0.1) in the field of real numbers.

For matrix equation (0.1) in M_m, Bohner and Peterson[23] defined the solution to equation (0.1) as the generalized matrix exponential function directily. They solved the exponential of a constant matrix on time scales by Putzer algorithm[88]. Then Harris algorithm and Leonard algorithm which were introduced firstly to calculate the matrix exponential e^{At} were extended to calculate the exponential of a constant matrix on time scales[15,95,96].

In 2007, Verde - Star[92] introduced an elementary method to solve linear matrix differential and difference equations and obtained explicit