Math

# 微积分

主编／徐春平
主审／龚友运

1．教材内容实行“案例驱动”，从实际经济管理问题出发，引出并讲清概念；
2．叙述简明、通俗易懂、由浅入深、循序渐进，遵循“数学为体，经济为用”的原则；
3．例题、练习、习题的选取体现经济管理类不同专业的经济数学应用的特点；
4．每章末的习题分为A、B两组，A组为基本题，B组为提高题，并附本章知识要点。

中国人民大学出版社

Math

# 微积分

主编／徐春平
主审／龚友运

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

微积分/徐春平主编．—北京：中国人民大学出版社，2014.5
ISBN 978-7-300-19192-8

Ⅰ.①微…　Ⅱ.①徐…　Ⅲ.①微积分　Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 074591 号

**微积分**

主编　徐春平

主审　龚友运

Weijifen

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **出版发行** | 中国人民大学出版社 | | | |
| **社　　址** | 北京中关村大街 31 号 | **邮政编码** | 100080 | |
| **电　　话** | 010－62511242（总编室） | | 010－62511770（质管部） | |
| | 010－82501766（邮购部） | | 010－62514148（门市部） | |
| | 010－62515195（发行公司） | | 010－62515275（盗版举报） | |
| **网　　址** | http://www.crup.com.cn | | | |
| | http://www.ttrnet.com(人大教研网) | | | |
| **经　　销** | 新华书店 | | | |
| **印　　刷** | 北京诚顺达印刷有限公司 | | | |
| **规　　格** | 185 mm×260 mm　16 开本 | **版　　次** | 2014 年 6 月第 1 版 | |
| **印　　张** | 18.25 | **印　　次** | 2014 年 6 月第 1 次印刷 | |
| **字　　数** | 414 000 | **定　　价** | 38.00 元 | |

# 前　言

经济学的许多研究方法都依赖于数学思维（如经济指标分析、金融市场风险评估、效益的合理分配、生产成本控制等），许多重要的结论也来源于数学的推导。同时，数学在经济学中的应用也日益广泛（如统计、税收、金融证券、保险、贸易和生产等）。大多数经济理论都是建立在数学的理论和方法之上的，经济学只有成功地运用数学，才能达到真正完善的地步。因此，在经济学与数学相互交叉的这个跨学科领域里，数学知识的应用越来越普遍。

经济数学通常包含微积分、线性代数、概率论与数理统计、程序设计、西方经济学、数学模型、计量经济学、金融经济学、金融投资数量分析、风险管理、经济预测与决策、信息系统分析与设计、大系统分析等多门课程。

根据教育部颁布的经济管理类专业核心课程“经济数学基础”教学大纲的要求，以及经济类、管理类本科生的培养规格、后续课程和工作实践的需要，结合独立本科院校教学改革的要求，广州商学院（原华南师范大学增城学院）具有丰富教学经验的老师编写了这套大学本科经济应用数学系列教材，第一批推出的有《微积分》、《线性代数与概率统计》两本。

我们编写的这套教材，吸取了众多同类教材的一些优点，并且具有以下特点：

(1) 适合于大学独立本科院校经济类各专业的学生使用。

(2) 在编写过程中，力求做到以培养“厚基础、宽口径、重应用、强技能、高素质”的高级应用型人才为目标。教材内容实行“案例驱动”，也就是从实际经济管理问题出发，引出概念，并讲清概念，同时注意将建立经济问题的数学模型的思想渗透到教材中。

(3) 叙述简明、通俗易懂、由浅入深、循序渐进，遵循“数学为体，经济为用”的原则。

(4) 例题、练习、习题的选取体现经济管理类不同专业的经济数学应用的特点，并且适当选取了经济数学模型实例。

(5) 每章末的习题分为（A）、（B）两组，其中（A）组为基本题，（B）组为提高题，并附本章知识要点。

(6) 每章的阅读材料，简介数学简史或名人轶事，强调知识背景的介绍。

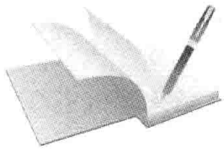
本书介绍了微积分的基本知识及在经济分析中的应用。全书共分六章，包括：函数、极限与连续，导数及其应用，不定积分及其应用，定积分及其应用，多元函数微积分及其应用，微分方程初步。带“*”的内容供选学，每章末附有本章知识要点、习题及阅读材料，书末附有简易积分表、计量经济学软件包 EViews 简介、练习和习题参考答案以及参考文献。

本教材获广州商学院教材立项资金资助，由广州商学院长期在教学第一线的教师徐春平担任主编，由龚友运担任主审，潘丽华参加了编写工作。

在编写过程中，我们参考了一些同类教材，并选用了其中某些例题、习题，在此一并表示感谢。由于作者水平有限，加之时间比较仓促，对于书中存在的不足之处，欢迎读者提出宝贵的意见。

**编　者**

# 目　录



# 第一章　函数、极限与连续

函数是研究客观世界变化规律的最基本、最重要的数学工具之一，也是描述变量之间相互依赖关系的一种数学模型．在社会生活的许多方面都广泛地用到函数，如力学、社会学、经济学（如成本、收益、利润、需求等）等方面．为系统学习，本章将首先复习函数的基础知识，然后学习极限的概念、讨论极限的性质和运算法则，以及连续函数的概念与性质等，为后续的学习打下基础．

## 第一节　函　数

**【引例 1.1.1】**　小麦的市场定价问题

根据统计研究结果，1993 年美国的小麦需求量（记为 $Q_D$ ）和供给量（记为 $Q_S$ ）都大致可以表示为小麦价格 $p$ 的函数，其中需求曲线 $Q_D = 3\ 385 - 279p$ ，供给曲线 $Q_S = 1\ 728 + 228p$ ，式中，价格 $p$ 以美元／蒲式耳为单位，数量以百万蒲式耳／年为单位．如果美国的农民部门要强制性制定小麦的市场价格，那么定价多少最合适呢？

作为管理部门，当然是希望保持市场稳定．当市场平衡时最稳定，此时需求量等于供给量，即 $Q_D = Q_S$ ，亦即 $3\ 385 - 279p = 1\ 728 + 228p$ ，容易解得市场价格 $p = 3.27$（美元／蒲式耳）．

**【引例 1.1.2】**　某化工公司月产量与月份的关系问题

某化工公司统计去年农用化肥月生产量如表 1—1 所示．

**表 1—1**

| 月份 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 月产量（万吨） | 5.1 | 5.2 | 5.6 | 6.2 | 5.9 | 5.5 | 5.8 | 5.0 | 6.1 | 5.4 | 4.2 | 4.1 |

从表 1—1 可以看出，过去一年该公司月产量 $x$（万吨）与月份 $t$ 之间有着确定的对应关系．当月份 $t$ 在 1 至 12 之间每取一整数值时，便得出月产量 $x$ 的唯一确定的对应值．

**【引例 1.1.3】** 某一天的温度变化问题

图 1—1 是气温自动记录仪描出的某一天的温度变化曲线，它给出了气温 $T$ 与时间 $t$ 之间的依赖关系．时间 $t$（小时）的变化区域是 $0 \leqslant t \leqslant 24$，当 $t$ 在这个范围内任取一值时，从图中的曲线可找出气温的对应值．例如 $t = 14$ 时，$T = 25$ ℃，为一天中的最高温度．

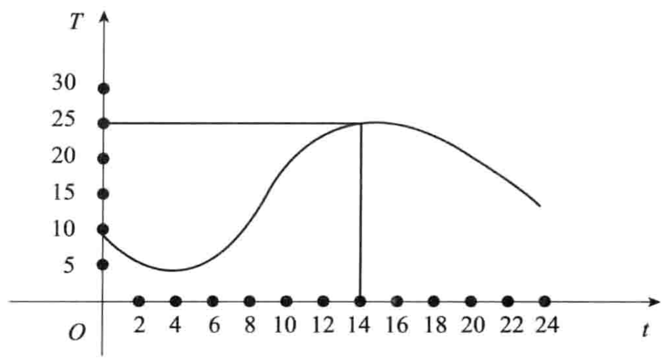



**图 1—1**

上述几个引例所描述的问题虽各不相同，但却有共同的特征：它们都表达了两个变量之间的相互依赖关系，当一个变量在它的变化区域中任取一定值时，另一个变量按一定法则就有一个确定的值与之对应．把这种确定的依赖关系抽象出来，就是函数的概念．

## 一、函数

### 1. 函数的定义

**定义 1.1.1**

**设 $x$ 和 $y$ 为两个变量，$D$ 为一个给定的数集，若对于每一个 $x \in D$，按照一定的法则 $f$，变量 $y$ 总有唯一确定的数值与之对应，就称 $y$ 为 $x$ 的函数，记为 $y=f(x)$．数集 $D$ 称为该函数的定义域，$x$ 叫做自变量，$y$ 叫做因变量，$f$ 叫做这个函数的对应法则．**

实数集 $D$ 是自变量 $x$ 的取值范围，它叫做函数 $y=f(x)$ 的定义域，函数 $y=f(x)$ 在定义域内的任意一点都有定义．

对于 $x = x_0 \in D$，通过对应法则 $f$ 可以得到 $y$ 的值 $y_0$，称 $y_0$ 为函数 $y=f(x)$ 在 $x = x_0$ 时的**函数值**，可以表示为 $y_0 = f(x_0)$ 或者 $y_0 = y|_{x=x_0}$．所有函数值组成的集合 $\boldsymbol{W}$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的**值域**．

在函数的定义中，要注意以下几点：

(1) 定义中并没有要求自变量变化时函数值一定要取不同的值，只要对于自变量 $x \in D$，都有确定的 $y \in W$ 与它对应即可．因此，常量 $y = c$ 也符合函数的定义，因为当 $x \in \mathbf{R}$ 时，所对应的 $y$ 值都是确定的常数 $c$．

(2) 函数通常还可用 $y=g(x), y=F(x), s=u(t), \cdots$ 表示．

(3) 若对每一个 $x \in D$，只有唯一的一个 $y$ 值与之对应，就称函数 $y=f(x)$ 为**单值函数**；若对每一个 $x \in D$，有不止一个 $y$ 值与之对应，可以扩充定义称它为**多值函数**，如：$x^2+y^2=1, x^2-y^2=1$ 等．本书若不特别声明，只讨论单值函数．

(4) 对数集 $D$ 中任一固定的 $x$，依照法则有一个数 $y$ 与之对应，以 $x$ 为横坐标、$y$ 为纵坐标在坐标平面上就确定了一个点．当 $x$ 取遍 $D$ 中的每一数时，便得到一个点集 $C=\{(x,y)\,|\,y=f(x), x\in D\}$，我们称之为函数 $y=f(x)$ 的图形．换言之，当 $x$ 在 $D$ 中变动时，点 $(x,y)$ 的轨迹就是函数 $y=f(x)$ 的图形．

函数有两个基本要素：定义域和对应法则，我们说两个函数是同一个函数是指它们的定义域和对应法则都一样．

**例 1**　判断函数 $y=x$ 与函数 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 是否为同一个函数．

**解**　不是．因为函数 $y=x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，而函数 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，两者显然不相同．

**例 2**　判断函数 $y=2^{x^2}$ 与函数 $y=(2^x)^2$ 是否为同一个函数．

**解**　不是．因为这两个函数的定义域虽然相同，均为 $(-\infty,+\infty)$，但是它们的对应法则不同，函数 $y=(2^x)^2=2^{2x}=4^x\neq 2^{x^2}$．

**例 3**　判断函数 $y=|x|$ 与函数 $y=\sqrt{x^2}$ 是否为同一个函数．

**解**　是．它们的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$，函数 $y=\sqrt{x^2}=|x|$，故对应法则也一样．

**2. 函数的定义域**

对于函数的研究，都是在函数的定义域内进行的，因此，对函数进行相关的讨论和计算之前，确定函数的定义域成为首要任务．如果函数有实际背景，即变量 $x$ 和变量 $y$ 有实际意义，应该优先考虑其实际意义对于其取值范围的限定；如果函数没有实际背景，则应该直接从函数关系式出发，求得使函数关系式有意义的自变量 $x$ 的取值范围，即函数的**自然定义域**．

求无实际背景的函数的定义域，常常有以下几种情况：

(1) 函数表达式中含有分式，则分式分母不为 0；

(2) 函数表达式中含有偶次根式，则被开方的式子非负；

(3) 函数表达式中含有对数式，则真数大于 0；

*(4) 函数表达式中含有反正（余）弦式，则正（余）弦值在 $-1$ 和 1 之间．

**例 4**　求函数 $y=\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{4-x^2}$ 的定义域．

**解**　由函数表达式得：$1-x\neq 0$ 且 $x^2\leqslant 4$，即 $x\neq 1$ 且 $-2\leqslant x\leqslant 2$，所以函数的定义域为 $D=[-2,1)\cup(1,2]$．

**例 5**　求函数 $y=\ln\dfrac{1}{x^2-2x-3}$ 的定义域．

**解**　由函数表达式得：$x^2-2x-3>0$，解得 $x<-1$ 或 $x>3$，所以函数的定义域为 $D=(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$．

**3. 函数的表示法**

表示函数关系的方法通常有三种：解析法、列表法和图像法．三种表示函数的方法各有优缺点．

（1）**解析法**：即借助于数学表达式来表示两个变量之间的函数关系．用解析法简单明了，但在求函数值时有时较复杂，上述例题和引例 1.1.1 均为解析法．

（2）**列表法**：即把函数自变量的取值和其相对应的函数值用一个表格来表示，引例 1.1.2 用的就是列表法．用这种表示函数的方法查询函数值更方便，但由于很多函数的自变量取值无法全部列出而导致函数值不完备，且从表中不能直接看出变量间的对应规律，所以局限性较大．

（3）**图像法**：引例 1.1.3 用的是图像法．图像法形象直观，易于研究函数的性态，但函数值不精确．

函数的三种表示方法各有其优缺点，经济应用数学中常使用解析法．有时，根据不同的问题与需要，可以灵活地采用不同的表示方法．在实际中，经常把这三种方法结合起来使用，即由已知的函数解析式，列出自变量与对应的函数值的表格，再画出它的函数图形.

**4. 函数的几个简单性质**

（1）奇偶性．

### 定义 1.1.2

**给定函数 $y=f(x)$（$x\in D$），$D$ 为关于原点对称的数集，如果对任意的 $x\in D$，有：**

**(1) 若 $f(-x)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数．**

**(2) 若 $f(-x)=-f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为奇函数．**

由函数奇偶性的定义可知：两个偶函数的和为偶函数；两个奇函数的和为奇函数；两个偶函数的积为偶函数；两个奇函数的积也为偶函数；一个奇函数和一个偶函数的积为奇函数．

对于偶函数，由于 $f(-x)=f(x)$，因此，偶函数的图形关于 $y$ 轴对称．同理，奇函数的图形关于原点对称．

例如，函数 $y=x^2$ 为偶函数，如图 1—2 所示．

同样地，不难验证奇函数的图形关于原点对称．设 $y=f(x)$ 为奇函数，任取函数图形上一点 $A(x_0,y_0)$，其关于原点对称的点 $A'(-x_0,-y_0)$ 也在函数图形上．例如，函数 $y=x^3$ 为奇函数，如图 1—3 所示．

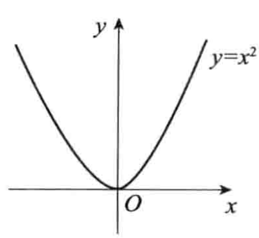



**图 1—2**

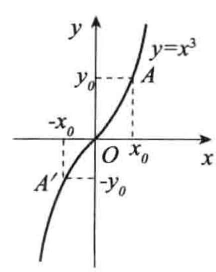



**图 1—3**

**例 6** 判断函数 $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ 的奇偶性.

**解** 函数定义域为 $D=(-1,1)$，关于原点对称. 对任意的 $x\in D$，有

$$f(-x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\ln\frac{1-x}{1+x}=-f(x),$$

所以函数 $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ 为奇函数.

(2) 单调性.

## 定义 1.1.3

**在数集上的函数 $y=f(x)$，定义域为 $D$，区间 $I\subset D$，若对于任意 $x_1$，$x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 上是单调增加的；若对于任意 $x_1$，$x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 上是单调减少的.**

单调增加函数的图形是沿 $x$ 轴正向逐渐上升的，单调减少函数的图形是沿 $x$ 轴正向逐渐下降的. 区间 $I$ 称为函数 $y=f(x)$ 的单调递增（减）区间，统称为单调区间. 例如，函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调增加的；又如，函数 $y=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的，在 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的，因而在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调的.

(3) 有界性.

## 定义 1.1.4

**函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D$，区间 $I\subset D$，如果存在常数 $M>0$，对于区间 $I$ 上所有的 $x$ 对应的函数值 $f(x)$，都有不等式 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 上有界；如果对于一个无论值多么大的常数 $M>0$，在区间 $I$ 内总存在点 $x$，使得 $|f(x)|>M$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 上无界.**

从直观上来看，函数 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 上有界，是指区间 $I$ 上函数图形在介于直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间的区域内；函数在区间 $I$ 上无界，是指区间 $I$ 上，在 $y$ 轴正、负两个方向上函数图形至少沿一个方向可以延伸到无限远.

例如，函数 $y=\sin x$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上为有界函数，可以取常数 $M=1$，函数图形分布在直线 $y=1$ 和 $y=-1$ 之间的区域内，如图 1—4 所示.

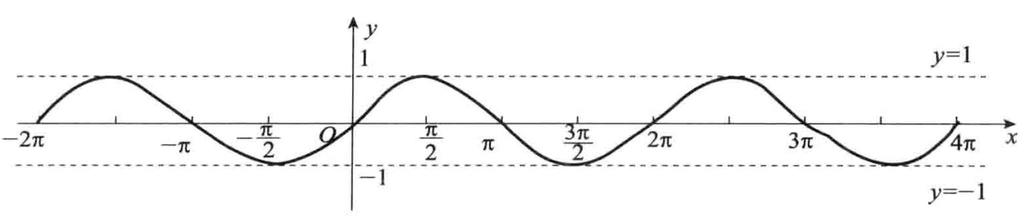



**图 1—4**

自然对数函数 $y=\ln x$ 在区间 $(0,1]$ 上无界，其函数图形在 $(0,1]$ 上沿 $y$ 轴负方向可以延伸到无限远，如图 1—5 所示.

**注意** 当函数有界时，对所有的 $x \in I$，使得 $|f(x)| \leqslant M$ 成立的常数 $M$ 的值并不是唯一的．例如上述的函数 $y = \sin x$，我们取 $M = 2$ 或其他任何大于 1 的正数均可．

(4) 周期性．

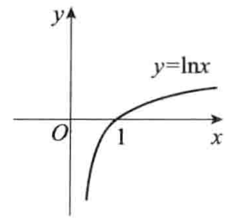



图 1—5

**定义 1.1.5**

**函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D$，若存在非零常数 $T$，对于任意 $x \in D$，使得 $(x \pm T) \in D$，且 $f(x \pm T)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数，符合上述条件的常数 $T$，叫周期函数 $y=f(x)$ 的周期．**

例如，函数 $y = \sin x$，$y = \cos x$ 是周期为 $2\pi$ 的周期函数，函数 $y = \tan x$，$y = \cot x$ 是周期为 $\pi$ 的周期函数．

**注意** (1) $T$ 为 $f(x)$ 的周期，由定义知 $2T, 3T, 4T, \cdots$ 也都是 $f(x)$ 的周期，故周期函数有无穷多个周期，通常说的周期是指最小正周期（基本周期）.

(2) 周期函数在每一个周期 $[a+kT, a+(k+1)T]$（$a$，$k$ 为任意常数）上，有相同的形状．

## 二、基本初等函数与初等函数

### 1. 基本初等函数

通常把幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**.

(1) **幂函数**：形如 $y = x^{\mu}$（$\mu$ 为常数）的函数．

(2) **指数函数**：形如 $y = a^x$（$a$ 为常数，$a > 0$，且 $a \neq 1$）的函数．

(3) **对数函数**：指数函数 $y = a^x$ 的反函数，记为 $y = \log_a x$（$a$ 为常数，$a > 0$，且 $a \neq 1$）；特别地，当 $a = \mathrm{e}$ 时，函数记为 $y = \ln x$，称为自然对数函数．

(4) **三角函数**：

正弦函数 $y = \sin x, x \in (-\infty, +\infty)$

余弦函数 $y = \cos x, x \in (-\infty, +\infty)$

正切函数 $y = \tan x, x \neq n\pi + \frac{\pi}{2} (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

余切函数 $y = \cot x, x \neq n\pi (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

(5) **反三角函数**：

反正弦函数 $y = \arcsin x, x \in [-1,1]$，$y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

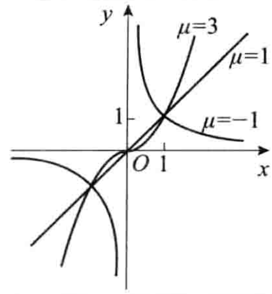
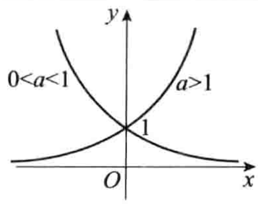
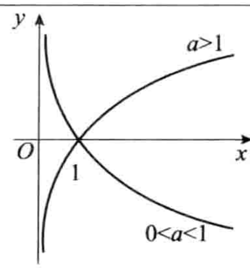
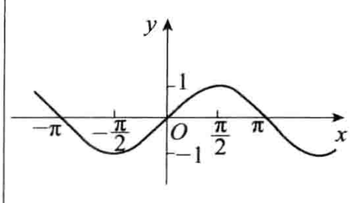
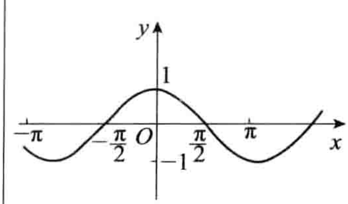
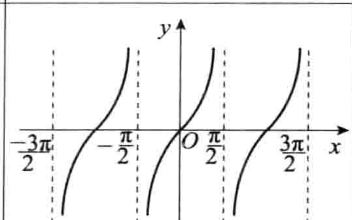
反余弦函数 $y = \arccos x, x \in [-1,1]$，$y \in [0, \pi]$

反正切函数 $y = \arctan x, x \in (-\infty, +\infty)$，$y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

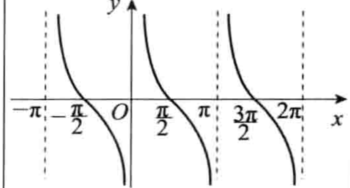
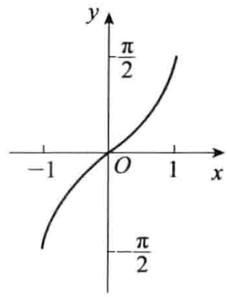
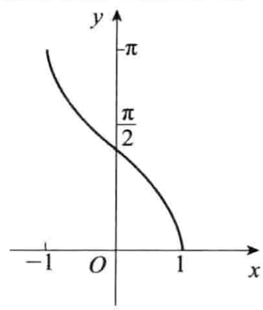
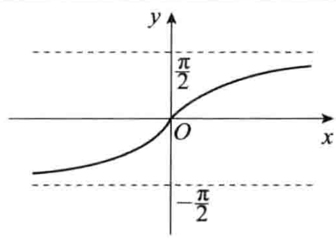
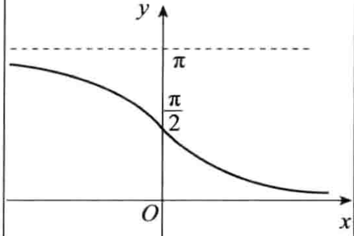
反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x, x \in (-\infty, +\infty)$，$y \in (0, \pi)$

以上函数的定义域、值域、图形和性质如表 1—2 所示．

**表 1—2**

| 函数 | 函数表达式 | 定义域、值域 | 图　形 | 性　质 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 幂函数 | $y=x^{\mu}$<br>（$\mu$ 为常数） | (1) 当 $\mu$ 为非负整数时，定义域为 $(-\infty,+\infty)$.<br>(2) 当 $\mu$ 为负整数时，定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.<br>(3) 当 $\mu$ 为其他有理数时，定义域要根据具体情况而定.<br>(4) 当 $\mu$ 为无理数时，规定其定义域为 $(0,+\infty)$. |  | 不论 $\mu$ 取何值，图形经过 $(1,1)$ 点；当 $\mu>0$ 时，图形经过 $(0,0)$ 点，函数在 $(0,+\infty)$ 内单调增加；当 $\mu<0$ 时，图形不经过 $(0,0)$ 点，函数在 $(0,+\infty)$ 内单调减少. |
| 指数函数 | $y=a^{x}$<br>（$a$ 为常数，$a>0$，且 $a\neq 1$） | $x\in(-\infty,+\infty)$，<br>$y\in(0,+\infty)$ |  | 图形总在 $x$ 轴上方，且过 $(0,1)$ 点．当 $a>1$ 时，$y=a^{x}$ 单调增加；当 $0<a<1$ 时，$y=a^{x}$ 单调减少. |
| 对数函数 | $y=\log_{a}x$<br>（$a$ 为常数，$a>0$，且 $a\neq 1$） | $x\in(0,+\infty)$，<br>$y\in(-\infty,+\infty)$ |  | 图形经过 $(1,0)$，当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少. |
| 三角函数 | 正弦函数<br>$y=\sin x$ | $x\in(-\infty,+\infty)$，<br>$y\in[-1,1]$ |  | 奇函数，周期为 $2\pi$，在 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ 内单调增加，在 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$ 内单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$. |
| | 余弦函数<br>$y=\cos x$ | $x\in(-\infty,+\infty)$，<br>$y\in[-1,1]$ |  | 偶函数，周期为 $2\pi$，在 $[2k\pi,2k\pi+\pi]$ 内单调减少，在 $[2k\pi-\pi,2k\pi]$ 内单调增加 $(k\in\mathbf{z})$. |
| | 正切函数<br>$y=\tan x$ | $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，<br>$y\in(-\infty,+\infty)$ |  | 奇函数，周期为 $\pi$，在 $\left[k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ 内单调增加 $(k\in\mathbf{Z})$. |

续前表

| 函数 | 函数表达式 | 定义域、值域 | 图形 | 性质 |
|---|---|---|---|---|
| 三角函数 | 余切函数 $y=\cot x$ | $x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$，$y\in(-\infty,+\infty)$ |   | 奇函数，周期为 $\pi$，在 $[k\pi,k\pi+\pi]$ 内单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$. |
| 反三角函数 | 反正弦函数 $y=\arcsin x$ | $x\in[-1,1]$，$y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ |   | 奇函数，在 $[-1,1]$ 内单调增加. |
| | 反余弦函数 $y=\arccos x$ | $x\in[-1,1]$，$y\in[0,\pi]$ |   | 非奇非偶函数，在 $[-1,1]$ 内单调减少. |
| | 反正切函数 $y=\arctan x$ | $x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ |   | 奇函数，在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加. |
| | 反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ | $x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in(0,\pi)$ |   | 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调减少. |

**2. 复合函数**

**定义 1.1.6**

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 $D$，函数 $u=u(x)$的值域为 $M$，若集合 $D\cap M\neq\phi$，则称

**函数 $y=f(u(x))$ 为变量 $x$ 的复合函数，其中变量 $x$ 为自变量，变量 $y$ 为因变量，变量 $u$ 称为中间变量.**

例如，$y=u^2$，$u=\sin x$，则把 $u=\sin x$ 代入函数 $y=u^2$，得到函数 $y=\sin^2 x$ 即为 $x$ 的复合函数.

需要注意的是，并不是任意两个函数都可以复合得到复合函数，只有函数 $y=f(u)$ 的定义域与函数 $u=u(x)$ 的值域有交集时才可以复合.

利用复合函数的概念，一个较复杂的函数可以看成几个简单函数复合而成，简单函数是指基本初等函数或由常量与基本初等函数经过四则运算而得到的函数.

**例 7** 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$，求复合函数 $f(f(x))$ 的表达式.

**解** $f(f(x))=\dfrac{1}{(f(x))^2+1}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)^2+1}=\dfrac{(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2+1}$.

在微积分运算中，通常已知复合函数 $y=f(u(x))$，要判别它是由哪两个简单函数 $y=f(u)$ 和 $u=u(x)$ 复合而成的，即分解复合函数.

**例 8** 分解复合函数 $y=\ln^2 x$.

**解** 这个函数中最后的数学运算是求表达式 $\ln x$ 的平方，因而设中间变量 $u=\ln x$，所以复合函数 $y=\ln^2 x$ 分解为 $y=u^2$ 和 $u=\ln x$.

**例 9** 分解复合函数 $y=e^{x^2}$.

**解** 这个函数中最后的数学运算是求以 e 为底的幂，所以设中间变量 $u=x^2$，复合函数 $y=e^{x^2}$ 分解为 $y=e^u$ 和 $u=x^2$.

有些复合函数分解之后仍是复合函数，还可以继续分解. 例如，函数 $y=\sqrt{2^{\cos x}}$，可以分解为 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=2^{\cos x}$，函数 $u=2^{\cos x}$ 仍为复合函数，可继续分解为 $u=2^v$ 和 $v=\cos x$. 因此，函数 $y=\sqrt{2^{\cos x}}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=2^v$ 和 $v=\cos x$ 这三个函数复合而成的，并且有两个中间变量 $u$ 和 $v$.

有关复合函数，还常常会遇到下面类型的问题.

**例 10** 已知复合函数 $f(\sqrt{x})=\sin x$，则函数 $f(x)=$ ________.

**解** 在这里，已经给了中间变量 $u=\sqrt{x}$，故设 $u=\sqrt{x}$，则 $x=u^2$，所以 $f(u)=\sin u^2$，函数 $f(x)=\sin x^2$.

**例 11** 已知函数 $f(x)$ 的定义域为闭区间 $[1,3]$，则复合函数 $f(2x-3)$ 的定义域 $D=$ ________.

**解** 由题意知 $1\leqslant 2x-3\leqslant 3$，解得 $2\leqslant x\leqslant 3$，所以复合函数 $f(2x-3)$ 的定义域 $D=[2,3]$.

**3. 初等函数**

**定义 1.1.7**

**由常数与基本初等函数经过有限次的四则运算或复合运算得到的函数，且这个函数用一个数学表达式表示，则称这样的函数为初等函数.**

由定义知，分段函数不是初等函数. 但分段函数在各个分段区间上的对应法则均为初