面向21世纪高职高专系列规划教材

高等数学

徐文智　等编著

西安电子科技大学出版社
XIDIAN UNIVERSITY PRESS

面向21世纪高职高专系列规划教材

高等数学

徐文智 等编著

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书主要介绍高等数学的基础知识。全书共9章，主要内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程、空间解析几何与向量代数及多元函数微积分。

本书内容全面，通俗易懂，所选取的例题与实际应用联系紧密，注重微积分知识在各个专业领域内的应用和拓展。

本书可作为高职高专院校各个专业的通用教材，也可作为工程技术人员的参考用书。

★ 本书配有电子教案，需要者可登录出版社网站，免费下载。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/徐文智等编著. —西安：西安电子科技大学出版社，2010.9

面向21世纪高职高专系列规划教材

ISBN 978-7-5606-2474-7

Ⅰ.①高… Ⅱ.①徐… Ⅲ.①高等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第176546号

策　　划　杨丕勇

责任编辑　段　蕾　杨丕勇

出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071

网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com

经　　销　新华书店

印刷单位　西安文化彩印厂

版　　次　2010年9月第1版　　2010年9月第1次印刷

开　　本　787毫米×960毫米　1/16　印张16.5

字　　数　322千字

印　　数　1～3000册

定　　价　23.00元

ISBN 978-7-5606-2474-7/O·0107

XDUP 2766001-1

本书编写委员会

主　编　徐文智　王凌云

副主编　王　晨　蔺守臣

参　编　杨向斌　代　瑛　徐　静　田　军

张崇巍　何　鹏　顾斌元

前　言

高职高专教育的主要目的是培养生产一线的应用型、技术型、管理型人才，因此高职高专教材也应该适应当前教学需要，由以前的侧重理论教学向注重实际应用方向过渡，从而更好地为高职高专院校各个专业学生的专业需要提供基础理论支持。出于这样的考虑，我们组织甘肃林业职业技术学院数学教研组具有丰富教学经验的一线教师，结合高职高专院校农林、工程、信息等专业对高等数学教学的实际需求编写了本书。

本书具有以下几个特点：

(1) 为了更好地适应高职高专院校学生对高等数学知识的需求，以及他们对高等数学知识的接受能力，本书以够用、适用为原则编写而成，尽量避免提及难度较大的理论知识，注重理论联系实际，以培养学生“学以致用”的能力。

(2) 本书引入了大量应用型例题，把高等数学的基本理论知识与学生所学专业密切联系起来，激发学生对高等数学的学习兴趣，提高学生使用高等数学知识来解决具体问题的意识和能力。

(3) 为了让学生更加容易理解和掌握基本理论知识，本书在定理的证明、例题的求解过程中加入了大量详细的思路分析过程，力求做到通俗易懂。

(4) 本书在注重数学逻辑体系完整的前提下，突出重点、难点，注意培养学生的逻辑思维能力、空间想象能力和数学应用能力。

(5) 本书在编写过程中不仅注重基本知识的完整性，还把一些能够举一反三的问题留给学生自己来解决，以发挥学生学习的自主性和创造性。

全书共9章，主要内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微积分等。本书的总课时为120～140学时。

本书由徐文智、王凌云主编。本书第1、2、3、4、7、9章分别由甘肃林业职业技术学院王凌云、田军、代瑛、张崇巍、徐静、何鹏编写，第5、6章由杨向

斌、徐文智、蔺守臣合作编写，第8章由甘肃林业职业技术学院王晨、代瑛和武威第八中学顾斌元合作编写。

由于编者水平有限，加之时间仓促，疏漏和不当之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编　者

2010年6月

目　录

第1章　函　　数

本章将在中学数学已有函数知识的基础上，进一步系统地介绍函数的概念、函数的性质以及函数的运算。

1.1　函数的概念及其运算

1.1.1　函数的概念

1. 函数的定义

定义 1.1　给定两个非空的实数集 A、B，存在某一确定的对应法则 f。若任取 A 内的一个元素 x，通过确定的对应法则 f，在 B 中有确定的一个元素 y 与它相对应，则称具有此种属性的对应法则 f 是定义在 A 上的函数，表示为

$$f: x \to y \quad 或 \quad f: A \to B \quad 或 \quad y = f(x)$$

其中：集合 A 称为函数 f 的定义域；A 中的任意 x 通过对应法则 f 所对应的 y，表示为 $f(x)$，称为函数 f 在点 x 处的函数值；全体函数值

$$f(A) = \{y \mid y = f(x),\ x \in A\} \subseteq B$$

称为函数 f 的值域。若把 x 看做在 A 中所有值的变量，y 看做在 B 中取值的变量，则称 x 为函数 f 的自变量，y 为函数 f 的因变量。

注：（1）在函数的研究中，若涉及的变量只有两个，即一个自变量与一个因变量，则称这种函数为一元函数，故上面给出的就是一元函数的定义。研究具体问题时涉及的变量往往不止两个，处理的方法是将要研究的变量以外的变量看做常量，这种方法称为控制变量法。例如研究物体的长度与电阻之间的关系时，可暂时把物体的材料、横切面积、温度等其它变量都看做常量。一元函数是利用控制变量法研究具体问题时常用的函数。

（2）对应法则 f 是研究具体问题时涉及到的变量之间的规律，即事物本身所具有的各量之间的关系。例如暂把物体的材料、横切面积、温度等其它变量看做常量，f 就是物体的长度 L 与它的电阻 R 之间的相互依存关系。据试验可知 $\dfrac{R}{L}$ 是常数，即 L 与 R 之间是正比

关系，$R=f(l)=kL$，$L\geqslant 0$。对应法则 f 和定义域 A 是函数的两个基本要素；值域 $f(A)$ 是具体问题的结果变量的范围，不是函数的基本要素，而是由 f 与 A 所限定的范围，称之为复合要素。

(3) 对应法则不一定是函数。例如 $A=\mathbf{N}$，$B=\mathbf{N}$，f：$x\to 2x-1$ 或 $y=f(x)=2x-1$，当 $x=0$ 时，$f(0)=2\times 0-1=-1$，而 -1 不在 B 中，就是说在 A 中有点 $x=0$ 时，通过对应法则 f 在 B 中没有确定的元素 y 与它对应，这与函数 f 的本质相矛盾，故 f 只是对应法则，而不是函数。相反，函数一定是对应法则。

2. 相同函数的定义

定义 1.2 设 $y=f(x)$，$x\in A_1$ 与 $y=\varphi(x)$，$x\in A_2$ 是两个函数。若 $A_1=A_2$，且任取 $x\in A_1$（或 A_2）时，总有 $f(x)=\varphi(x)$，则称函数 $y=f(x)$，$x\in A_1$ 与函数 $y=\varphi(x)$，$x\in A_2$ 是相同函数。

注：(1) 定义域不相同的两个函数，一定不是相同的函数。例如 $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$ 是不同的函数，因为它们的定义域不同。定义域相同的两个函数也不一定是相同的函数。例如 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 就是不相同的函数。

(2) 相同函数的定义中，并没有要求对应法则必须相同，而是要求任取 $x\in A_1$（或 A_2）时它们所对应的函数值相等，即 $f(x)=\varphi(x)$，所以对应法则不相同的两个函数，可能是相同的函数，也可能不是相同的函数。例如：$y=\ln x^3$ 与 $y=3\ln x$ 是对应法则不相同的两个函数，但它们是相同的函数；$y=x^2$ 与 $y=x^2(x\in\mathbf{R}^+)$ 是两个不相同的函数。

(3) 要判断两个函数是否为相同的函数，必须从定义出发，而不能只从形式上看问题。

3. 分段函数

定义 1.3 设 a 与 b 是两个任意实数，且 $a<b$，则把符合 $a<x<b$ 条件的实数 x 组成的集合称为 a 与 b 的开区间，表示为 (a, b)；把符合 $a\leqslant x\leqslant b$ 条件的实数 x 组成的集合称为 a 与 b 的闭区间，表示为 $[a, b]$；把符合 $a\leqslant x<b$ 或 $a<x\leqslant b$ 条件的实数 x 组成的集合称为 a 与 b 的半开半闭区间，表示为 $[a, b)$ 或 $(a, b]$。开区间、闭区间、半开半闭区间统称为 a 与 b 的区间。

定义 1.4 设 a 是一个任意实数，若任取 $\delta>0$，则把符合 $|x-a|<\delta$ 条件的实数 x 组成的集合称为 a 的 δ 实心邻域，表示为 $U(a, \delta)$；把符合 $0<|x-a|<\delta$ 条件的实数 x 组成的集合称为 a 的 δ 去心邻域，表示为 $U(\hat{a}, \delta)$。

注：(1) 由 $|x-a|<\delta$ 可推出 $a-\delta<x<a+\delta$，由 $0<|x-a|<\delta$ 可推出 $a-\delta<x<a$ 和 $a<x<a+\delta$，所以邻域是区间的一种特殊情况。

(2) 一般来说，δ 是很小的正数，故邻域中的 x 离 a 很近。

(3) 讨论离 a 很近的 x 所对应的 y 值的变化情况，就要用到 a 的邻域。

定义 1.5 设 $y=f(x)$ 是定义在 A 上的函数，且 A 是一个区间，若把定义域 A 分成 n

个小区间，在每一个小区间上用不同的解析式来表示相应的规律，则称这样的函数是定义在 A 上的分段函数，一般表示为

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & x\in I_1 \\ f_2(x) & x\in I_2 \\ \quad\vdots & \\ f_n(x) & x\in I_n \end{cases}$$

且 $A=I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_n$。

注：(1) 分段函数是由 n 个关系式分段来表示的一个函数，而不是 n 个函数。

(2) 定义域 A 是各个小区间的并集。

(3) $x\in A$ 时，只能有一个函数值 $f(x)$ 与之对应，而不能有 n 个。

【例 1.1】 晶体物质的温度随加热时间的变化而变化的问题就可以用分段函数来表示。

$$C(t)=\begin{cases} k_1 t & t\in[0,\ t_1] \\ k_2 t & t\in(t_1,\ t_2] \\ k_3 t & t\in(t_2,\ t_3] \end{cases}$$

其中：C 表示晶体物质的温度；k_1、k_2、k_3 表示不同的系数；$[0,\ t_1]$这段时间晶体是固体状态；$(t_1,\ t_2]$这段时间是晶体由固体向液体发生物态变化的一个过程；$(t_2,\ t_3]$这段时间晶体是液态。具体变化关系如图 1-1 所示。

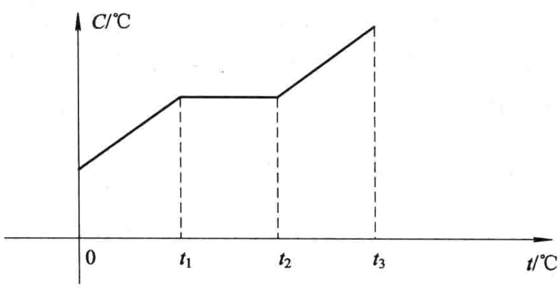

图 1-1　晶体物质的温度随加热时间的变化

【例 1.2】 定义在$[0,\ 1]$上的狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases} 1 & x\in[0,\ 1]\text{ 且 }x\text{ 为有理数} \\ 0 & x\in[0,\ 1]\text{ 且 }x\text{ 为无理数} \end{cases}$$

不是分段函数，因为这个函数把 x 定义为 $x\in[0,\ 1]$上的有理数与 $x\in[0,\ 1]$上的无理数两部分，但并不是定义在了两个区间上。所以分成不同的部分与分成不同的区间是两个不同的概念，分成不同的区间就是分成不同的部分，分成不同的部分不一定是分成不同的区间。

1.1.2 函数的运算

1. 函数的四则运算

设 $y_1=f_1(x)$，$x\in A_1$ 与 $y_2=f_2(x)$，$x\in A_2$ 是两个函数，$A=A_1A_2$。

(1) 若任取 $x\in A$，通过对应法则 f_1 与 f_2 所得函数值 $f_1(x)$与 $f_2(x)$的和与 x 相对应，则在 A 点定义了一个异于 $f_1(x)$，$x\in A_1$ 与 $f_2(x)$，$x\in A_2$ 的新函数，把这个新函数称为 $y_1=f_1(x)$，$x\in A_1$ 与 $y_2=f_2(x)$，$x\in A_2$ 两个函数组成的和函数，表示为 f_1+f_2：$x\rightarrow y$，$x\in A$，或 $y=f_1(x)+f_2(x)$，$x\in A$。

(2) 若任取 $x\in A$，通过对应法则 f_1 与 f_2 所得的函数值 $f_1(x)$与 $f_2(x)$的差与 x 相对应，则在 A 上定义了一个异于 $f_1(x)$，$x\in A_1$ 与 $f_2(x)$，$x\in A_2$ 的新函数，把这个新函数称为 $y_1= f_1(x)$，$x\in A_1$ 与 $y_2=f_2(x)$，$x\in A_2$ 两个函数的差函数，表示为 f_1-f_2：$x\rightarrow y$，$x\in A$，或 $y=f_1(x)-f_2(x)$，$x\in A$。

(3) 若任取 $x\in A$，通过对应法则 f_1 与 f_2 所得的函数值的积与 x 相对应，则在 A 上定义了一个异于 $f_1(x)$，$x\in A_1$ 与 $f_2(x)$，$x\in A_2$ 的新函数，把这个新函数称为 $y_1=f_1(x)$，$x\in A_1$ 与 $y_2=f_2(x)$，$x\in A_2$ 两个函数组成的积函数，表示为 $f_1\cdot f_2$：$x\rightarrow y$，$x\in A$，或 $y=f_1(x)\cdot f_2(x)$，$x\in A$。

(4) 从 A 中除去使 $f_2(x)=0$ 的 x 组成的集合用 A^* 表示。若任取 $x\in A^*$，通过对应法则 f_1 与 f_2 所得函数值的商与它相对应，则在 A^* 上定义了一个异于 $f_1(x)$，$x\in A_1$ 与 $f_2(x)$，$x\in A_2$ 的新函数，把这个新函数称为 $y_1=f_1(x)$，$x\in A_1$ 与 $y_2=f_2(x)$，$x\in A_2$ 两个函数组成的商函数，表示为$\dfrac{f_1}{f_2}$：$x\rightarrow y$，$x\in A^*$，或 $y=\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$，$x\in A^*$。

以上四种异于 $f_1(x)$，$x\in A_1$ 与 $f_2(x)$，$x\in A_2$ 的新函数，称为函数 $f_1(x)$，$x\in A_1$ 与 $f_2(x)$，$x\in A_2$ 的四则运算。

注：(1) $f_1(x)$，$x\in A_1$ 与 $f_1(x)$，$x\in A$ 可能是不相同的函数，$f_2(x)$，$x\in A_2$ 与 $f_2(x)$，$x\in A$ 也可能是不相同的函数，其函数的四则运算实际上是由 $f_1(x)$，$x\in A$ 与 $f_2(x)$，$x\in A$ 所组成的，但习惯上我们称为是由 $f_1(x)$，$x\in A_1$ 与 $f_2(x)$，$x\in A_2$ 所组成的，它们之间可以自动调整，不必加以说明。

(2) 函数四则运算的结果仍是一个函数，但此函数的定义域 A(或 A^*)与 A_1、A_2 不相同，一般来说有 $A\subseteq A_1$(或 A_2)或 $A^*\subseteq A_1$(或 A_2)。

(3) 新函数的对应法则分别是由 f_1 与 f_2 的和、差、积、商而来的，实质上是当 x 取相同的值时，由函数值的和、差、积、商而来的。