否定词研究

余俊伟 著

中国社会科学出版社

否定词研究

余俊伟 ● 著

中国社会科学出版社

图书在版编目(CIP)数据

否定词研究/余俊伟著.—北京:中国社会科学出版社 2014.4
ISBN 978-7-5161-4315-5

Ⅰ.①否… Ⅱ.①余… Ⅲ.①否定(哲学)—研究 Ⅳ.①B024.8

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 106520 号

出 版 人 赵剑英
责任编辑 吴丽平
责任校对 董晓月
责任印制 戴 宽

出 版 中国社会科学出版社
社 址 北京鼓楼西大街甲 158 号(邮编 100720)
网 址 http://www.csspw.cn
中文域名:中国社科网 010-64070619
发 行 部 010-84083685
门 市 部 010-84029450
经 销 新华书店及其他书店

印 刷 北京君升印刷有限公司
装 订 廊坊市广阳区广增装订厂
版 次 2014 年 4 月第 1 版
印 次 2014 年 4 月第 1 次印刷

开 本 880×1230 1/32
印 张 6.125
插 页 2
字 数 154 千字
定 价 29.00 元

凡购买中国社会科学出版社图书,如有质量问题请与本社联系调换
电话:010-64009791

中国人民大学科学研究基金资助（批准号12XNJO24)

前　言

本书很大篇幅采用形式语言来讨论否定词。形式语言是19世纪德国数学家弗雷格为了清晰准确地阐明其关于数学基础领域里的主张而创造出来的。现代逻辑亦是伴随着形式语言的发明而诞生。此时便有了对“否定”一词的逻辑记法。今天流行的记法是“¬”与“~”。由于对数学基础问题的理解不同，对蕴涵的理解不同，对推理的理解不同等等这些原因，产生了诸多与经典逻辑相抗衡的非经典逻辑。它们都使用形式语言表达。在此过程中，人们进一步发展了形式方法，对形式语言本身的研究也成了一个重要领域。对形式语言的解释，即为语言符号指定所指，通常称为形式语义学，便是非常重要的一个方面。

对否定符号最简单的形式语义解释是经典的，否定真得到假，反之亦然。但是由于经典逻辑的某些推理的刻画难以令人满意，人们便从直觉或其他角度出发，例如，认为不能从前提推出不相干的结论，不能从矛盾推出一切，等等，从语法角度划出一类认可的推理模式。这种考虑其实将除了真假以外的其他更多因素考虑进来了，例如，意义关联、时序先后、认知能力、情趣偏好，等等。在经典的解释下好的推理模式与这些认可的推理模式并不吻合。人们试图构造更复杂的数学结构，以便在这类结构上解释推理模式所得到的好的（“好的”一词正

是依据这类框架来精确定义的）模式恰好就是原先我们认可的。复杂通常表现为在结构中增加若干参考系数。这也是人们在考虑推理时关注了更多因素的表现。参考系数多了，很自然使得原先由真至假、由假至真的简单通道变得非常迂回，以致否定不再像我们平常所理解的否定，否定符号不再像是通常理解的“不”、“非”这些否定词了。

尽管早期我们谈论否定词都具有非常具体的背景，依附于特定的逻辑观念之下，如经典逻辑、直觉主义逻辑、相干逻辑等，而随着形式化方法越来越成熟——到今天可以说达到登峰造极的地步，人们往往可以不明确地指明一种逻辑背景来谈语言中的某个否定词，只要对它的解释带有对立的意味，就可称其为否定词。这时的形式化研究愈发显得令人眼花缭乱。此时的研究其实都是对形式语言的探究，而形式语言表达的东西（语义解释）与研究之初的直观背景或某具体学科的关联已经不明显了，至多只是对某类抽象而又极特别的数学结构的描述而已。这时，如果人们追问，此时研究的否定词到底是什么？我们或许可以这样回答：这种研究是从逻辑的角度，使用高度形式化的方法对矛盾对立关系开展的理论探索，是人们把握矛盾对立关系的一种手段，只是因为使用了大量的符号，故与通常手段相比更具特色。但是，它也属于人类探索矛盾对立的过程。我们希望这种形式化的研究方法对此领域的研究有所裨益。

本书受中国人民大学科学研究基金（批准号 12XNJ024）资助，特此致谢！

限于作者水平，书中疏漏不当之处难免，敬请读者批评指正。

余俊伟

2014 年 1 月 5 日

目　录

第一章

直觉主义逻辑

古希腊亚里士多德创建三段论，开创了逻辑学。近代弗雷格发明了概念文字，创立现代逻辑，逻辑学由此获得了全新的面貌。但这二者都属经典逻辑，它们都承认三大基本规律：同一律、矛盾律及排中律。后面两条都与否定密切相关。人们质疑实质蕴涵而发展出各种蕴涵，创立了各种非经典逻辑。这些逻辑系统，除了对蕴涵符号作不同于经典的解释外，很多也对否定作了不同于经典的诠释。从否定词的角度分析非经典逻辑，比较它们之间的异同，是理解非经典逻辑的一种手段，比较经典逻辑与非经典逻辑的一个视角，值得尝试。

第一节　经典否定简述

逻辑研究人们思维中的推理行为，侧重于考察推理前提与其结论间的真假关系。为研究人们的推理行为，需要对推理做进一步的抽象，选取与推理密切相关的语词（联结词）来考虑，其中一个语词就是否定词。

人们在思考问题、进行推理中，对已有的信息进行加工，做

出鉴别、判断、取舍，否定是一个极为重要的环节。举一个简单的例子，人们起初认为鲸是鱼，但是通过后来考证获得的信息表明，鲸具有哺乳动物的根本特征，因而人们否定了以前的观点，认为鲸并不是鱼。这是思维领域中的最常见的否定行为。就真假关系来说，在原来的句子“鲸是鱼”和“鲸并不是鱼”之间，“不”起到了关键性的作用，体现在：前者为真，则后者为假；后者为真，则前者为假。至此，我们其实已经得到了经典否定——布尔否定。这是最为正统的，也是与人们的一般直觉最相吻合的对否定的理解。它有以下几个特点：第一，矛盾律对其成立：p和非p不能同时成立，即$\sim(p\wedge\sim p)$；第二，排中律对其成立：p与非p至少有一个成立，即$(p\vee\sim p)$；第三，从矛盾可以（在系统中）推出一切。

对以上经典否定的三个特点的质疑就获得了形态众多的其他类型的否定，我们统称为非经典否定。当然，以上三者也略有区别。从表面上看，前两者仅与否定相联系，而后者还与推出这一概念相关联，可以说是经典否定与经典蕴涵——实质蕴涵一起导致的结果。人们对实质蕴涵不满意，从而构造出相干逻辑。在相干逻辑中，相干蕴涵的确弱于经典蕴涵，但同时其中的相干否定也弱于经典否定。

的确，在一个具体的逻辑系统里，联结词彼此相关联。谈论否定一般都牵涉其他联结词，因此，本书前四章基本上将否定放在一些具体的系统里来考察。

第二节　直觉主义逻辑中的否定

说到直觉主义逻辑，不能不说到数学哲学中的直觉主义流

派。20 世纪初，由于集合论领域里悖论的发现，导致了第三次数学危机。在解决这次危机过程中形成了逻辑主义、形式主义和直觉主义三大数学流派。直觉主义流派由荷兰数学家布劳维尔（Brouwer，1881—1966）于 1907 年创立，代表人物还有海丁（A. Heyting）等。直觉主义逻辑就是他们在重构数学而使用的逻辑。这一逻辑体现了他们所承认的一些证明方法和规则。直觉主义流派的一个重要观点是强调构造性。“存在必须被构造。”逻辑方面的一个重要体现就是不承认排中律。

在直觉主义者看来，排中律（p 或者 ~p）是通过有限的场合获得的，只适合于有限的场合。把它推广到无限的场合就可能会出问题。例如，设 p 为：π的十进制展开小数有连续 6 个 5 出现。可以设想，如果π是一个有限小数，哪怕是小数点后有 2^{50} 位，至少从理论上讲可以逐个对每位数进行考察，最终可以得到确切的答案。但π是一个无限不循环小数，到现在为止，我们还没有发现π的十进制展开小数有连续 6 个 5 出现，也无法断言（因为无规律可循）今后会出现，而且同样也无法断定就一定不会出现连续 6 个 5。所以，排中律无效。

因此，如下的定义在直觉主义者看来也是不允许的。

定义自然数集合 N 上的一个函数 f 如下：对任意自然数 x，

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{如果}\pi\text{的十进制展开小数有连续 6 个 5 出现}\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

因为如上所述，f 的值究竟是 1 还是 0 是无法确定的，这样一个定义就不是构造性的，不被直觉主义者承认。

另一个例子是关于证明的实例。

定理：存在无理数 a，b 使得 a^b 是有理数。

证明：假设不存在这样的无理数，于是对任意无理数 a，b 都有 a^b是无理数。这样，取 $a=b=\sqrt{2}$，据假设$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$是无理数。而再据假设，$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$仍是无理数。但是，$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=2$。矛盾。因此假设不成立，即存在无理数 a，b 使得 a^b是有理数。

这个证明是非构造性证明。尽管它证明了有这样的无理数存在，但它既没有告诉我们这样的确切的无理数是什么，也没有告诉我们一种办法一定可以找到这样的无理数。

从方法上讲它使用的是反证法，而这是直觉主义数学不承认的方法。

从以上的分析中可以看出，直觉主义逻辑不再把命题解释为不真即假，因此为直觉主义寻找一个合适的解释非常关键。一般人们对直觉主义采取可证性的解释。在这种解释下，一个命题 p 就是 p 的一个证明，因此 p 为真的含义就是，p 有一个构造性证明。$p\wedge q$ 指 p 有一个构造性证明，q 也有一个构造性证明。$p\vee q$ 指 p 有一个构造性证明或者 q 有一个构造性证明。$p\rightarrow q$ 指存在一个构造性证明，它和 p 的一个构造性证明一起可以获得 q 的一个构造性证明。$\neg p$ 指存在一个构造性证明，它表明 p 的构造性证明是不存在的，或者表述为，存在一个构造性证明，它表明，从 p 的证明出发会得到矛盾。

以下是直觉主义逻辑的严格表述。

形式语言：

可数无穷多个命题变元 p，组成原子公式集，记为Φ。公式构成如下：

$$p \mid \neg A \mid A\wedge B \mid A\vee B \mid A\rightarrow B$$

分别称为原子公式、否定式、合取式、析取式、蕴涵式、尽

管前面给出了非形式的解释，但是我们还需要为形式语言提供一个严格的语义解释。在众多的解释中，克里普克语义解释是最符合直观的。

1.2.1 定义（直觉主义框架） 一个直觉主义框架（简称框架）F 是一个二元组$\langle W, R\rangle$，其中 W 是一非空集，R 是 W 上的一个偏序。■

1.2.2 定义（赋值） 令 $F=\langle W, R\rangle$是一框架$\langle W, R\rangle$，其上的一个赋值 V 是一个从Φ到 $P(W)$上的映射，满足如下条件（V 的遗传性）：对任意 $p\in\Phi$，w_1、$w_2\in W$，如果 w_1Rw_2 且 $w_1\in V(p)$，则 $w_2\in V(p)$。■

1.2.3 定义（直觉主义模型） 一个直觉主义模型（简称模型）M 是一个三元组$\langle W, R, V\rangle$，其中$\langle W, R\rangle$是一框架，V 是其上的一赋值。■

我们可以把一个框架的第一个元素 W 理解为由一些时刻组成的集合。时刻之间可能存在某种先后关系，令 R 为这种关系，可以把 w_1Rw_2理解为 w_2不迟于 w_1。要注意的是，框架定义中对 R 设定并不要求任意两个时刻之间都可比较出这种先后关系。有些时刻之间有这种关系，有些时刻之间并没有先后关系，无法比较。这种理解下，时间就不是一维的，而是呈分枝状。我们还可以把 $w\in V(p)$理解为 p 在时刻 w 得到了证明，可以把赋值定义中 V 的遗传性要求理解为，一旦某个原子命题在某一时刻得证，则其在随后的每一时刻都应被视为成立。由于直觉主义逻辑的数学背景，最好是把命题理解为数学命题。可以把整个语义解释理解为随着时间的推移，得证的数学命题越来越多，而且数学命题一旦得证，在以后的时间人们都应视其得证。接下来我们的工作是，首先要将得证这一非形式概念精确化，并推广到非原子公式上，其次要注意，上述对遗传性的要求只是限于原子公式，一个

自然的想法是，以上分析应该对非原子公式也是成立的。所以我们还希望能够在精确的语义背景下证明这一点。

1.2.4 定义（满足） 令 $M=\langle W, R, V\rangle$是一模型，A 是任意一公式，w 是 W 中的一点，归纳定义 A 在 M 中的 w 上被满足（记为：M，$w\vDash A$）如下：

（1）M，$w\vDash p$ 当且仅当 $w\in V(p)$，

（2）M，$w\vDash A\wedge B$ 当且仅当 M，$w\vDash A$ 并且 M，$w\vDash B$，

（3）M，$w\vDash A\vee B$ 当且仅当 M，$w\vDash A$ 或者 M，$w\vDash B$，

（4）M，$w\vDash A\rightarrow B$ 当且仅当对任意 $w'\in W$，如果 wRw' 且 M，$w'\vDash A$，则 M，$w'\vDash B$，

（5）M，$w\vDash\neg A$ 当且仅当对任意 $w'\in W$，如果 wRw'，则 M，$w'\vDash A$ 不成立。

如果 M，$w\vDash A$ 不成立，记为 M，$w\nvDash A$。■

1.2.5 定理（满足的遗传性） 令 $M=\langle W, R, V\rangle$是一模型，A 是任意一公式，w 是 W 中的一点，M，$w\vDash A$。对任意 $w'\in W$，如果 wRw'，则 M，$w'\vDash A$。

证明：施归纳于 A 的结构。A 为原子公式，据赋值定义即得。

A 为合取式、析取式易得。

A 为蕴涵式 $B\rightarrow C$。如果 M，$w\vDash B\rightarrow C$ 且 wRw'。任取 $w'\in W$ 且 $w'Rw'$，据框架定义，R 是传递的，所以 wRw'，据满足定义有，如果 M，$w'\vDash B$，则 M，$w'\vDash C$。据满足定义有 M，$w'\vDash B\rightarrow C$。

A 为否定式$\neg A$。类似蕴涵式情形，略。■

由此定理，可以认为，这一套形式语义确实非常符合前面的非直观形式的分析。这也是它比较流行的主要原因之一。我们再来分析否定式在经典逻辑与直觉主义逻辑之间的差别。就经典逻辑来说，一个否定式成立当且仅当其所否定的公式不成立，根本

不涉及其他因素。为对比直觉主义逻辑，我们可以这样来理解。经典逻辑考虑的范围只是当前时刻，在框架上就体现为只含一个点，或者是有多个点，但彼此并没有关联。考虑到框架中的 R 满足自返性，在这种情形下，定义 1.2.4 中的第（4）、（5）就退化成：

（4′）M，$w \vDash A \rightarrow B$　当且仅当　如果 M，$w \vDash A$，则 M，$w \vDash B$，

（5′）M，$w \vDash \neg A$　当且仅当 M，$w \vDash A$ 不成立。

于是框架就成了多余的了，去掉这种伪装，这就成了经典逻辑下的语义了。

1.2.6　定义（真与有效）　令 A 为一公式，F 为一框架，M 为其上的一个模型。如果 A 在 M 中的任意一点被满足，就称 A 在 M 中为真，记为 $M \vDash A$。如果 A 在 F 上的任意一模型中为真，则称 A 在 F 上有效，记为 $F \vDash A$。如果 A 在任意框架上都有效，则称 A 是有效的，记为$\vDash A$。■

就是否符合直观来看，这套直觉主义形式语义学是很成功的。它刻画了人们，尤其是数学领域当中人们认识的过程。但是，对于逻辑学家来说，还有一个重要的问题有待解决，这就是，这套理论是否是可有穷公理化的？即是否能从有穷多条公理（模式）通过有限多条规则获得与语义下的全部有效式？答案是肯定的。历史上有很多这样的公理系统，其中最早的是由海延给出的，称为海延命题演算。我们下面给出较为流行的一种，称其为 IP 演算系统。

公理模式：

（IP1）$A \rightarrow (B \rightarrow A)$

（IP2）$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

（IP3）$A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$

(IP4) $A \wedge B \to A$

(IP5) $A \wedge B \to B$

(IP6) $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$

(IP7) $A \to A \vee B$

(IP8) $B \to A \vee B$

(IP9) $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$

(IP10) $\neg A \to (A \to B)$

推理规则（MP）：从 A 和 $A \to B$ 可得 B

(IP1) 至 (IP8) 构成了正逻辑公理系统。

(IP9) 的直观含义是，如果从 A 的构造性证明出发，既得到 B 的构造性证明，也得到$\neg B$ 的构造性证明，但是因为，$\neg B$ 是说 B 的构造性证明是不存在的，这就导致矛盾，因此，A 的构造性证明是不存在，即$\neg A$。这即是说，归谬法在直觉主义中是成立的。

(IP10) 的直观含义即为从矛盾可以推出一切。

1.2.7 定义（语法后承） 如果存在一有穷公式系列 $A_0, \cdots, A_{n-1}$ $(=A)$ $(n \geq 1)$，使得对于每个 i，A_i或者是公理，或者属于Γ，或者是根据在其前面的公式 A_j，A_k运用 MP 规则得到的，则称 A 是从Γ可推演的，亦称 A 是Γ的语法后承，记为$\Gamma \vdash_{IP} A$，或者简记为$\Gamma \vdash A$。■

如果$\Gamma \vdash A$ 不成立，简记为$\Gamma \nvdash A$。

易证 $\vdash A \to A$。

1.2.8 定理（演绎定理） 如果Γ, $A \vdash B$，则$\Gamma \vdash A \to B$。

证明：同经典逻辑。■

1.2.9 定理（可靠性定理） 若$\Gamma \vdash C$，则$\Gamma \vDash C$。

证明：施归纳于从Γ到 C 的推演长度 n。当 $n=1$ 时，C 有两种情况：或者为公理，或者属于Γ。我们有以下断定：

断定如果 C 是公理，则$\models$C。

假设 C 不是有效的，则存在一个框架 K 及 K 上的一个模型 M 使得

$V(C,w)=0$。（$*$）

我们仅证 C 为公理模式（1）（9）（10）的情况。

如果它属公理模式 $A\rightarrow(B\rightarrow A)$，则（$*$）为 $V(A\rightarrow(B\rightarrow A),w)=0$。则据定义 1.2.4 存在 W 中的一个元素 w_1 满足：wRw_1 并且

1. $V(A, w_1)=1$

2. $V(B\rightarrow A, w_1)=0$

由 2 再据定义 1.2.4 可得 W 中的一个元素 w_2 满足：w_1Rw_2 并且

$V(B, w_2)=1$

$V(A, w_2)=0$

但根据满足的遗传性由 w_1Rw_2 和 1 又可得 $V(A, w_2)=1$。因此假设不成立。

如果它是公理模式（9）$(A\rightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg A)$，则（$*$）为 $V((A\rightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg A),w)=0$。据定义 1.2.4 存在 W 中的一个元素 w_1 满足：wRw_1 并且

1. $V(A\rightarrow B, w_1)=1$

2. $V((A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg A, w_1)=0$

由 2 再据定义 1.2.4 可得 W 中的一个元素 w_2 满足：w_1Rw_2 并且

3. $V(A\rightarrow\neg B, w_2)=1$

4. $V(\neg A, w_2)=0$

由 4 据定义 1.2.4 可得 W 中的一个元素 w_3 满足：w_2Rw_3 并且

5. $V(A, w_3)=1$

据 3、w_2Rw_3 和满足遗传性得