大专
理科
教材

中学数学研究和教学法

初等几何

Chudeng Jihe

河南教育出版社

大专理科教材

初等数学研究与教学法

初 等 几 何

河南省高等学校教材编写组编

河 南 教 育 出 版 社

大专理科教材
初等数学研究与教学法
初 等 几 何
河南省高等学校教材编写组编
责任编辑 张国旺

河 南 教 育 出 版 社 出 版
河南第一新华印 刷 厂 印 刷
河 南 省 新 华 书 店 发 行

850×1168毫米 32开本 10.125印张 249千字
1987年6月第1版 1987年6月第1次印刷
印数 1—65,040册
统一书号7356·367定价 1.80元

前　言

“初等数学研究与教学法”是高师院校数学系（科）的一门重要专业课。它是在学生掌握了一定的高等数学理论知识的基础上，继“心理学”、“教育学”之后而开设的。通过教学使学生掌握中学数学教学所必需的初等数学的基础知识、基本技能以及数学思想和方法；并具有分析和处理中学数学教材、掌握教学规律、采用相应教学方法的能力。

本课程包括“初等数学研究”和“中学数学教学法”两部分．而各校近年来在选用教材时，除其第二部分多数采用同一版本（指“十三院校协编组”编出的“中学数学教材教法‘总论’”）标准基本一致外，对其第一部分却取材不一，要求也大不相同。根据这一情况，我们特参照部颁师范专科学校试用教学大纲，又充分考虑到师范本科教学的需要，编出本课程中第一部分“初等数学研究”的试用教材。为了便于配套使用，仍沿用“初等数学研究与教学法”这一整体名称，而在其下注明“初等代数”或“初等几何”，谨在此说明。本书可供高师院校数学系（科）教学用，也可作为中学数学教师的参考书。

本书立足于中学教材，从中学教学的需要出发，把初等数学的一些基本问题分别组成若干专题，并综合为“初等代数（包括初等函数）”和“初等几何（包括制图基本知识）”．力求做到：在内容上适当延伸和充实；在理论、观点和方法上予以提高。特别注意培养学生分析问题和解决问题的能力。且为了适应教学的不同需要，还编入一些选学内容（书中用※号标出）。

本书的编写工作是在河南省教育委员会的直接领导、组织和河南教育出版社的大力支持下完成的。这是一套集体的创作，集中了各方面的智慧。编写时曾广泛征求了一些教师的意见；初稿形成后又分别在开封师专、南阳师专等校试用；并通过反复修订最后成书。

本书分两册出版，其中，“初等代数”由河南师大李新田、杨志青，许昌师专宋芳启，开封师专吴松远，南阳师专蒋达基等同志执笔；“初等几何”由河南师大郭绥青、黄其俸，南阳师专张广新等同志执笔。并分别由宋芳启、郭绥青两同志进行了整理、统编。最后，由主编杨志青同志作统一审定。

由于时间仓促，书中难免存在缺点和错误，请读者批评指正。

编　者

1985.10.

目　　录

绪　论

一　初等几何研究的对象和目的

中学里的平面几何和立体几何，我们通常把它们称为初等几何。

初等几何研究的对象是什么？恩格斯在《反杜林论》中指出："…纯数学研究的对象是现实世界的空间形式和数量关系。"而初等几何所研究的对象主要是现实世界的空间形式。

空间形式是指物体的形状、大小和相互位置的关系。因此，我们说初等几何是研究物体的形状、大小和相互位置关系的一门科学。

当我们只研究物体的形状和大小而不研究其它性质（如物理性质和化学性质）时，我们就把这个物体叫做几何体，或简称为体。

点、直线、平面、体或者它们的集合都叫做几何图形。点、直线、平面都是几何图形的元素。

如果图形上所有的点都在同一平面内，这个图形就叫做平面图形；如果图形上所有的点不全在同一平面内，这个图形就叫做空间图形。

平面几何是研究平面图形的性质的，它包括相交线、平行线、三角形、四边形、多边形、面积、相似形和圆的内容；立体几何是研究空间图形的性质的，它包括直线、平面和它们的相互位置关系，以及柱、锥、台、球的性质和它们的表面积、体积等内容。

初等几何则将它们揉为一体，分别组成七个专题：几何量的计算、几何题的证明、初等变换、轨迹、作图、立体图形的一些性质和制图进行论述。

中学几何的教学主要是根据部颁《中学数学教学大纲》的要求来进行的。在大纲中指出："中学数学的教学目的是：使学生切实学好从事现代化生产和进一步学习现代科学技术所必需的数学基础知识，培养学生的正确迅速的运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力，以逐步形成运用数学来分析、解决实际问题的能力。在数学教学中，要结合教学内容向学生进行思想教育，激励学生为实现社会主义现代化学好数学的热情，培养学生的科学态度和辩证唯物主义世界观"。这就是我们的教学目的。结合初等几何的具体情况，第一、应使学生系统地掌握平面图形和空间图形的性质，并能运用这些性质熟练地解决一些实际问题；第二、在教学过程中，逐步培养学生的逻辑思维能力、空间想象能力和实事求是的科学态度以及辩证唯物主义世界观；第三、结合教学内容介绍我国古代在几何学上的伟大成就，培养学生的民族自豪感和热爱祖国、热爱社会主义的思想，为实现社会主义四个现代化学好初等几何。

二　古代几何简史

相传古代埃及的尼罗河每年泛滥，淹没了两岸的耕地和房屋，水退之后，人们必须设法测量以划定耕地和房屋的疆界，在这实际需要中，测量土地的方法自然就应运而生。"几何学"这个名词，是我国明朝徐光启（1526—1633年）译的，这个词的原义无论在拉丁文或希腊文中都含有"测地术"的意思。这说明上述的传说是相当可靠的。

大约在公元前1700年，埃及人阿默斯（Ahmes）手抄了一本书，后人称为《阿默斯手册》，里面载有许多关于面积的测量方法和关于金字塔的几何问题，这个手抄本是世界上最古老的数学书。

后来希腊和埃及通商，于是几何知识才逐渐传入希腊。希腊的许多数学家对这些知识进行了研究，特别是欧几里得(Euclid，约公元前330—275年）对几何学有很大的贡献，他搜集了当时所有已知的初等几何材料（包括他自己的发现），编成《几何原本》十三卷（后人又续了两卷，共十五卷）。这本书最突出的一点是它选择了在长期实践中经过证实而为人们所公认的一些几何知识作为公理或公设，应用逻辑推理的方法，有步骤地来论证其他几何命题。这样就将长期积累的丰富而散漫的几何材料整理为一本系统严明的读本，成为人类历史上的一部科学巨著。因而后人就把这部著作誉为几何学的经典著作，甚至有将“欧几里得”用作几何学的代名词。而且人们一直把这种体系的几何学称为“欧几里得几何学。”

欧氏《几何原本》虽然是一种擅几何学权威达二千多年之久的古代杰作，但是，由于历史的局限性，它并不是毫无缺点的。它的主要缺点在于它的公理（包括公设）是不完善的，因而在进行论证时不得不借助于直观。后来逐渐为其他数学家所弥补，特别是德国数学家希尔伯特（Hilbert，1862—1943年）于1899年发表了著名论文《几何基础》，才使初等几何的公理体系得以完成。通常我们把这个公理体系叫做希尔伯特公理体系。

希尔伯特的公理体系是完善的，它不借助于直观而纯用逻辑推理可以推得欧氏几何中所有的事实。但是，根据这个公理体系逐步去推演欧氏几何中熟知的几何事实却是一项相当繁重的工作，这就不利于中学学生对几何知识的学习，因而现行中学几何课本不采用希尔伯特的公理体系，仍采用欧氏体系来编写。

我国对于几何的研究也具有几千年的历史，并有很多伟大的成就。早在新石器时代的陶器花纹中就有平行线、折线、三角形、菱形、圆、长方形等，这些事实说明，早在六千年以前，我们的祖先已经能够绘制初等平面几何中的大多数直线图形。我国战国

时代的墨家学派著有《墨子》一书（墨子，名翟，约公元前480—390年），它包括丰富的科学知识．在《墨经》部分中载有给几何概念所下的定义．如“中，同长也，”这是对线段中点的定义，“中”即线段的中点，“同长”是说中点到线段两个端点的距离相等．“圜，一中同长也，”“圜”就是圆，这是关于圆的定义．“一中”是说有一个中心，“一中同长”是说到一个中心有相等距离的点所构成的图形．“方，柱隅四讙也，”这是关于正方形的定义．“方”是指正方形，“柱”就是边，“隅”就是角，讙（读如权）有相等的意思，这就是说，正方形的四边四角各相等．此外，《墨经》还有关于点、线、面、体的说明，以及它们之间的关系．

我国最早的数学书《周髀算经》和《九章算术》对几何内容都有记载．《周髀算经》是约在公元前一世纪左右，西汉初的作品，但是它包含了很早以前的史料．《周髀算经》中载有“圆径一而周三，”这是说圆周率 π 等于3，我们称为古率．还载有商高答周公问，说“……故折矩以为句广三，股修四，径隅五．既方其外，半之一矩，环而共盘，得三、四、五．两矩共长二十有五，是谓积矩．故禹之所以治天下者，此数之所由生也．”这就是说在禹治天下时就有了“勾三股四弦五”这个勾股定理的特例，还说：“平矩以正绳，偃矩以望高，覆矩以测深，卧矩以知远．环矩以为圆，合矩以为方．”这是长期测量工作的经验总结．前四句说明了矩在测量中的四种用途，后两句指出了矩的性能．该书还载有陈子(约公元前7—6世纪）答荣方问，说：“求邪（斜）至日者：以日下为句、日高为股，句股各自乘，并而开方除之，得邪至日”(图1)。此乃测日法．就是

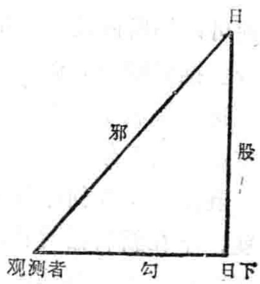

图1“邪至日”图

邪至日（弦）$=\sqrt{勾^2+股^2}$

这里所用之勾股定理已不限于3、4、5或它们的倍数，而是推广到了一般情形。可见我国对“直角三角形勾股平方的和等于弦的平方”的研究比希腊毕达哥拉斯（Pythagoras，约公元前582—493年）还早，因此，我们把上面的定理称为勾股定理。

《九章算术》成书于什么时候，目前众说纷纭，多数认为在西汉末期到东汉初期之间，也有认为早到西汉中期的。《九章算术》的内容很丰富，它包括了算术、代数、几何等我国当时数学的全部内容。就几何内容而言，有面积和体积的计算，勾股定理及其应用。面积有正方形（方田）、长方形（直田）、三角形（圭田）、梯形（邪田、箕田）、圆（圆田）、弓形（弧田）等面积的计算。体积有立方体、长方体、楔形平截体、圆柱、正方台、圆台、四角锥、圆锥、长方体的斜截体（堑堵）、底为直角三角形，一棱垂直于一锐角顶点的三棱锥（鳖臑）、楔形体（羡除）等体积计算。勾股定理在《九章算术》中用得很广，而且是先讲了勾股定理及其变形，然后才讲应用，这已注意到了逻辑性。定理及其变形的叙述如下：

“勾股各自乘，并而开方除之，即弦。”

“又股自乘，以减弦自乘，其余开方除之，即勾。”

“又勾自乘，以减弦自乘，其余开方除之，即股。”

这三句话相当于下面三个公式：

$$c=\sqrt{a^2+b^2},\ a=\sqrt{c^2-b^2},\ b=\sqrt{c^2-a^2}.$$

这三个公式至今还在应用着。

我国历代都有不少数学家对几何进行了卓有成效的研究。如东汉的张衡（公元78—139年）、东汉末至三国时代的赵君卿、魏晋时代的刘徽、南北朝时的祖冲之（公元429—500年）等都有伟大的功绩。赵君卿对《周髀算经》进行了深入的研究，并写了

《勾股方圆图》，是我国数学史上极有价值的文献。在我国第一次明确给出了勾股定理的理论证明。刘徽曾创“割圆术，”将π求到3.14，并把它化为$\frac{157}{50}$。后人把3.14或$\frac{157}{50}$叫做徽率。祖冲之求得 $3.1415926<\pi<3.1415927$。他又定$\pi=\frac{22}{7}$，后人称为约率；又定 $\pi=\frac{355}{113}$，后人称为密率。“密率”是数学史上的卓越成就。在外国一直到十六世纪才由德国的渥脱（Otto）等重新求得，比祖冲之晚了一千多年。祖冲之把一个尚未完全知道的数值（π）进行了范围的限定，这在当时来说确实是一种创举。祖暅是祖冲之之子，在其父研究球体积的计算的成就基础上，提出了“幂势既同，则积不容异”的原理。其中“势”是高，“幂”是面积，意思是说两个高相等的立体在任意等高处的截口的面积如果总成对相等，则它们的体积就不能两样。这和意大利数学家卡瓦利里(Cavalieri，公元1598—1647年）在他的名著《连续不可分量几何》中提出的“二同高的立体，若在任意相同高处截取的面积相同，则体积相等”是一致的。但“祖暅原理”却提早了一千二百多年，并且祖暅还利用了这个原理，巧妙地求出了现在仍为世人使用的球体体积公式

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3(V\text{表示圆球的体积，}r\text{为半径})。$$

其他各朝代均有不少数学家对几何进行过深入的研究，这里就不再一一叙述了。

三　中学几何的逻辑结构

现行初中《几何》是在全日制初中课本（试用本）的基础上修改而成的，共分两册。第一册分五章：第一章基本概念；第二

章相交线、平行线；第三章三角形；第四章四边形；第五章面积、勾股定理，供初中二年级用。第二册分三章：第六章相似形；第七章圆；第八章简单的视图，供初中三年级用。

这次修改的原则是：在原试用本的基础上，适当减轻分量、降低难度、减缓坡度，力图使教材符合教学规律，便于教，便于学，解决好几何入门问题。

根据上述原则，在教材体系上仍采取扩大公理的做法。具体地说，就是对公理体系只保证相容性，而不要求独立性。

至于连续公理、顺序公理这一类讲起来繁难而学生又体会不到提出它们的必要，并且从直观上看是比较明显的公理，课本中不再明确提出，直接根据图形来处理。譬如，以线段AB为边作一个等边三角形。首先以A为圆心，AB为半径画圆；再以B为圆心，BA为半径画圆，两圆相交于C，连AC、BC，则$\triangle ABC$就是所求作的等边三角形（图2）。

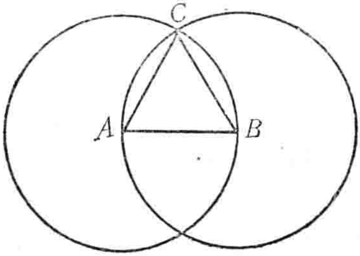

图 2

这样讲中学生易于接受，就是凭直观来理解。如果要讲所画圆的连续性，以后再说所画的圆才相交，学生很可能认为没有讲的必要。因此，教材体系也是不完善的。

又如，在一条直线上有三个已知点A、B、C，这三个点中必有一个介于另两个点之间。这是显然的事实，学生易于接受。如果再逻辑地证明这一事实，学生必然会觉得这是多余的。

还有一些存在与唯一性定理，如线段的中点、角的平分线等的存在与唯一性定理，课本中也不再出现，让学生直观、承认。这是因为，如果逻辑地证明一条线段有一个中点，而且只有一个中点；一个角有一条平分线，而且只有一条平分线，学生也会认

为这是显然的事实，没有证明的必要.

课本中一些比较繁难的定理扩大为公理的有："两点之间线段最短；""同位角相等，两直线平行；"全等三角形的判定"边角边、""角边角"以及"矩形的面积等于底乘高"等. 又有一些暂时证明比较困难，而以后证明比较容易的定理暂不证明，留待以后解决. 如"垂直线段最短，"全等三角形的判定"边边边"定理等.

对初中《几何》这样的编排，主要是降低了几何入门教学的难度，为提高教学和学习质量创造了条件. 这是符合中学实际与学生年龄特征的. 但是，从逻辑结构上讲，它仍然是沿用了欧氏几何的不完备的公理体系.

习 题 一

1.初等几何研究的对象是什么？学习的目的主要有哪些？

2.几何学的产生与发展的情况怎样？最突出的成就是什么？我国古代在几何方面有哪些杰出的贡献？

3.中学几何教材为啥采取扩大公理体系的办法？它的优点是啥？

4.你认为中学几何的教材教法应作哪些改革？怎样才能更切合中学的实际？

第一章　几何量的计算

在平面几何中所谈到的角、线段、弧以及圆、多边形所围成的封闭图形都是有大小可以度量的，这些几何图形的上述属性称为几何的量（以后简称为量）．如线段、弧的量是长度，角的量是角度，圆或多边形所围成的封闭图形的量是面积．本章主要是研究这些几何量的计算问题．

一　线段的度量

线段的量是用数来表示的，怎样用数来表示？这就涉及到线段的度量问题和线段的可公度与不可公度的问题．现在我们就来研究这些问题．

1.线段度量的根据

阿基米德公理　在长短不同的两条线段中，无论较长的线段怎样长，较短的线段怎样短，我们总可以在较长的线段上连续截取较短的线段，并且截到某一次以后，就得出下面两种情形中的一种：或者没有剩余，或者得到一条短于较短线段的剩余线段．

阿基米德(Archimedes，公元前287—212年)是希腊数学家．

这个公理换句话说就是：已知两条线段 a 和 b，并且$a>b$，那么我们总可以求出一个整数 m，使$mb\leqslant a$，并且 $(m+1)b>a$，就是使$mb\leqslant a<(m+1)b$．

2.两条线段的公度　两条线段如果各含有第三条线段的整数倍而没有剩余，那么第三条线段就叫做这两条线段的公度．

例如，线段a、b、u(a、$b>u$)，用u去量a得整数m倍，量b得整数n倍，都没有剩余，也就是说，线段a、b都可以分别用线段u的m倍和n倍来表示，即$a=mu$，$b=nu$，我们就说线段u是线段a、b的公度，线段a、b就叫做有公度线段.

如果线段u是线段a、b的公度，那么$\frac{1}{2}u$、$\frac{1}{3}u$、……也必然是a、b的公度. 因此，两条线段如果有某一个公度，它们就一定有无数个公度，而在这无数个公度中必定有一个最大的公度，但没有最小的公度.

如果两条线段有公度，那么最大的一个公度叫做这两条线段的最大公度.

3.求两条线段最大公度的定理

定理1 在两条线段中，如果较长的线段含有较短线段的整数倍而没有剩余，那么较短的线段就是这两条线段的最大公度.

设线段a含有线段b的整数倍而没有剩余，因为线段b含有它自身的1倍，所以线段b是线段a和线段b的公度. 其次，线段b不可能含有任何比自己更长的线段的整数倍，所以线段b就是线段a和线段b的最大公度.

定理2 在两条线段中，如果较长的线段含有较短的线段的整数倍而有剩余，那么这两条线段的最大公度（如果存在的话）就是较短线段和剩余线段的最大公度.

设线段a含有线段b的整数倍和剩余r. 例如，线段a含有线段b的3倍和剩余r（图1-1），那么

$$a=3b+r.$$

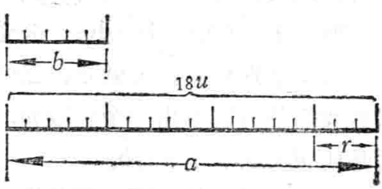

图 1—1

如果线段b和线段r各含有某一线段u的整数倍而