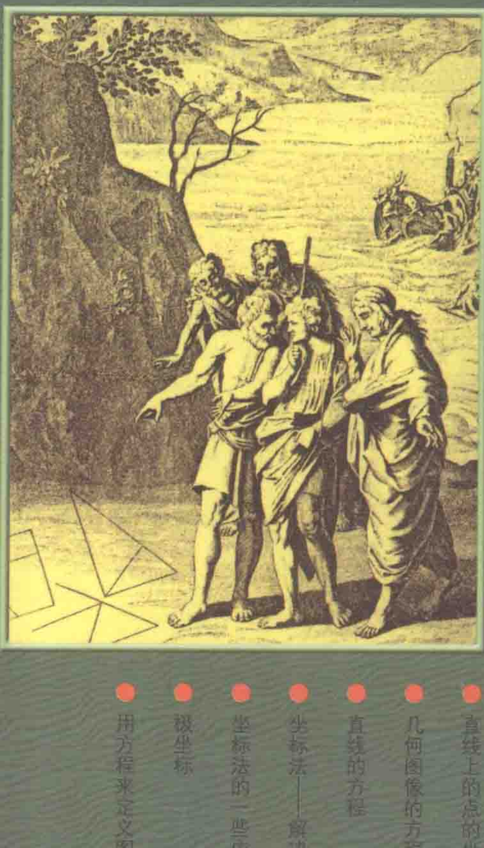
坐标法

《数学中的小问题大定理》丛书（第五辑）



方运加 编译

- 直线上的点的坐标
- 几何图像的方程
- 直线的方程
- 坐标法——解决几何问题的工具
- 坐标法的一些应用
- 极坐标
- 用方程来定义图像的例子

哈尔滨工业大学出版社

《数学中的小问题大定理》丛书（第五辑）

坐标法

方运加 编译

◎直线上的点的坐标
◎几何图像的方程
◎直线的方程
◎坐标法——解决几何问题的工具
◎坐标法的一些应用
◎极坐标
◎用方程来定义图像的例子

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

作者以通俗易懂的语言阐述了坐标的概念,从一些简单的几何问题入手,讲述了利用坐标法分析问题与解决问题的基本方法,对比了坐标法、代数方法与几何方法在解题思路、方法的不同特点.在介绍一些基础性的以及若干较复杂但饶有趣味的问题在应用坐标法解题的过程中,使读者清楚地看到坐标概念是代数学与几何学结合的桥梁与一个学科分支——解析几何学——的产生和发展的必然性,并了解它成为强有力的数学工具的基本内涵.

本书是读者学习解析几何以及高等数学的一本启蒙书,它无论在学习与掌握坐标法还是在建立新的数学观念方面,以及对中学生的数学素养的提高,都会起到良好的作用.本书对大学、专科学校学生也有参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

坐标法/方运加编译.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2013.12

ISBN 978-7-5603-4532-1

Ⅰ.①坐… Ⅱ.①方… Ⅲ.①坐标-普及读物 Ⅳ.①O182-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 300134 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 齐新宇
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16 印张 5 字数 65 千字
版　　次 2013 年 12 月第 1 版 2013 年 12 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-4532-1
定　　价 28.00 元

◎前 言

将代数学应用到几何图像的各种性质的研究在几何学的发展中起着重要的作用,并逐渐发展成为一个独立的学科分支——解析几何学.解析几何学的产生是与它的基本方法的发现紧密相关的,这个基本方法就是坐标法.

所谓一个点的坐标,就是用来确定该点在一条已知直线上、在一个已知平面上或是在某个空间中的位置的一组数值.如果我们知道地球表面上的点的地理坐标——经度和纬度,那么这个点在地球上的位置就被确定了.

为了得到一个点的坐标,必须先选择好度量的基准,然后据此进行测量.对于地理坐标的情况,赤道和零度经度线就是度量的基准.

如果给定了度量的基准,并且指出了求得一个点的坐标的方法,则我

们说一个坐标系统已经建立.

用方程来定义几何图像是坐标法的一个特有的性质,并用代数的工具来进行几何研究和解决几何问题.

将代数特色引入几何研究中,坐标法将代数学的最重要的特点——解决问题的方法的通用性——传输给几何学.在算术和初等几何中,通常人们为解决每一个问题去寻找一个特殊的解决方法,而在代数与解析几何中,则是对所有的问题建立通用的方法,使得它们能够容易地应用于任何一个问题.可以说,解析几何相对于初等几何所处的地位,就像代数学相对于算术那样处于同样的地位.坐标法的基本重要性在于,为了求解问题,将代数的许多方法传输给几何学,因而有了更普遍的方法.然而,必须敬告读者,不要完全拒绝使用初等几何学的方法,因为在一些场合,它能够帮助我们获得更好的解法,它比用坐标法得到的解法更简捷.坐标法的另一个显著的特征是:应用它使我们不需要将复杂空间的形状用图形表示出来.

在坐标概念的实际应用中,当作一个点来看待的物体的坐标只能近似地给出.一个物体的给定的坐标,它的含义是:由这些坐标描述的这个点,或者对应于这个物体中的某个点,或者它充分靠近这个物体.

由于本书的性质及篇幅的限制,使得我们只能讲述坐标法的基本知识和它的最简单的应用.我们将很注重用方程来描述几何图像的问题,它对于初学者来说会有许多困难.这个问题将通过广泛地求解问题来加以阐述.

目录

直线上的点的坐标

第1章

引进坐标的最简单的情形是在一条直线上确定一个点的位置. 我们就从这种情形开始讲述坐标法.

我们在一条直线上任取两个不同的点 O 和点 E(如图1),并令线段 OE 的长度为单位长①.

图1

我们认为,直线 OE 上的每一个点都对应于一个数,它被称为给定点的坐标,并由下述方法确定:直线 OE 上的点 P,如果它与点 E 在点 O 的同

① 点 O 和点 E 可以选择使得线段 OE 的长度等于已知的单位长度的点,例如1 cm.

侧，那么它的坐标就是正数并且等于线段 OP 的长度；如果它与点 E 在点 O 的异侧，则它的坐标就是负数，它的绝对值等于线段 OP 的长度；点 O 的坐标等于零.

如果这些规则被满足，则我们称直线 OE 为数轴或坐标轴，点 O 称为坐标原点. 数轴上坐标为正的点的部分称为它的正的部分，或简称正轴；数轴上坐标为负的点的部分称为它的负的部分，或简称负轴.

在已知数轴上的每个点都有确定的坐标；在同一数轴上的不同的两个点，它们的坐标是不同的. 另一方面，每个实数是已知数轴上一个确定的点的坐标. 例如，点 E 的坐标是 $+1$，而 -1 是点 E 关于点 O 的对称点的坐标. 符号 $E(1)$，$A(-2\frac{1}{3})$，$B(x)$，$C(x_1)$，$D(x_2)$，$\cdots$ 的含义是数值 1，$-2\frac{1}{3}$，x，x_1，x_2 分别是点 E，A，B，C，D 的坐标.

沿着数轴从点 O 指向点 E 的方向称为数轴方向，它通常用一个箭头表示（图 1）.

第2章 平面上的点的坐标

在已知平面上，我们作两个互相垂直的数轴，使得它们的交点为坐标原点 O(图 2)，我们分别称 Ox 轴，Oy 轴为 x 轴和 y 轴，它们所在的平面称为 xOy 平面①. 我们认为，两坐标轴上的长度单位是一样的.

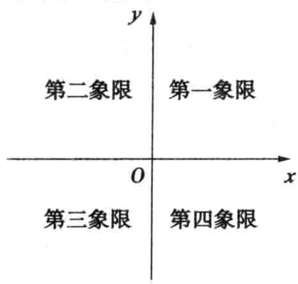


图 2

① Ox 轴，Oy 轴也同样称为坐标轴.

坐标轴 Ox 和 Oy 将平面 xOy 分为四个象限,按照坐标轴的方向,按顺序给每个象限一个名称(如图 2).

现在,我们考虑在 xOy 平面上任意一点 P,从这个点分别到 Ox 轴和 Oy 轴引垂线得到垂足 P_x 和 P_y,即它在这两个数轴上的正投影(图 3). 我们用 x 表示 Ox 轴上点 P_x 的坐标,用 y 表示 Oy 轴上点 P_y 的坐标,数值 x 和 y 称为点 P 的坐标,并用符号 $P(x,y)$ 记之,这样的坐标称为笛卡儿直角坐标①.

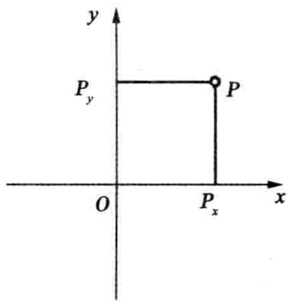


图 3

因此,平面上一点 P 的坐标的确定问题就转化为两个点(P_x 和 P_y) 在数轴上坐标的确定问题.

点 P_x 的坐标 x 称为点 P 的横坐标,点 P_y 的坐标 y 称为点 P 的纵坐标. 如果点 P 在 Ox 轴上,则它的纵坐标等于零;如果点 P 在 Oy 轴上,则它的横坐标等于零. 点 O 的横坐标与纵坐标都等于零.

图 4 中表示的是一个点根据它在象限中的位置确定坐标的符号,左边的是横坐标的符号,右边的是纵坐标的符号.

---

① 用 17 世纪著名的哲学家、数学家雷尼 · 笛卡儿的名字命名.

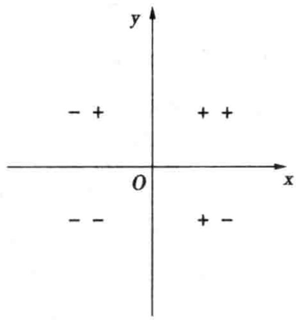


图 4

现在，我们来看看点 P，如果它的坐标 x，y 为已知，如何来确定它的位置. 我们根据它的横坐标在 Ox 轴上作点 P_x，根据纵坐标在 Oy 轴上作点 P_y（见图 5）；从点 P_x 作 Ox 轴的垂线，从点 P_y 作 Oy 轴的垂线，它们的交点就是所要求的点 P.

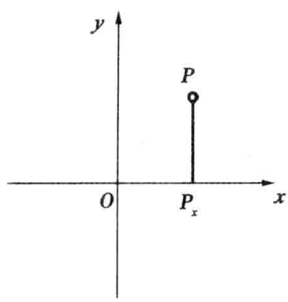


图 5

上面的作法可按下述方式修改（参阅图 5）：我们先确定点 P_x，然后经它作 Ox 轴的垂线，并在垂线上截取线段 P_xP 使得它的长度等于坐标 y 的绝对值，如果

$y>0$,则从点 P_x 向上截取;如果 $y<0$,则向下方截取①;如果 $y=0$,点 P 就和点 P_x 重合.

从基本结构上可以说,一个点的坐标指示了从原点到给定点的一条路径:知道了点 P 的横坐标 x,我们就可以找到这条路径的 OP_x 部分,而当知道了点 P 的纵坐标 y 时,我们就可以找到它的第二部分 P_xP.

顺便说说,坐标的概念不是数学家发现的,它来源于实际,当数学家还不知道坐标的概念的时候,坐标系统的原始形态已为人们所使用. 例如,诗人涅克拉索夫的一首诗《谁在俄国生活好》中,记得有这么一段:

顺着大路往前走,
　直到第三十个路碑.
转向森林,
　再走一俄里②.
在那儿,
　一块平坦的草地上,
　两棵老松如伴侣.
　松树下面,
埋藏着一个箱子,
　请你把它打开……

---

① 更精确地说,当 $y>0$ 时,点 P 和 Oy 轴的正的部分必须在 Ox 轴的同一侧;当 $y<0$ 时,则在另一侧. Ox 轴的正的部分是在它的负的部分的右侧,Oy 轴的正的部分是在它的负的部分的上面. 以后我们就不再详细地描述了.

② 1 俄里 ≈ 1.066 8 千米.——编校注

如图6所示，这里30和1就是草地的坐标（这里意指所论事物的坐标）. 单位：俄里.

图6

第3章 基本问题

求解一个复杂的问题常常可以归结为求解许多简单的问题. 这些问题中的一些是经常遇到的而且是极其简单的,我们称之为基本问题. 在这一章中,我们考虑两个几何问题:确定两个点之间的距离和求已知顶点的一个三角形的面积. 由于在解析几何中,一个点是由它的坐标来定义的,已知问题的求解就变为寻找一个由给定点的坐标构成的公式,由这个公式来计算所求的量.

问题1 求已知两点间的距离.

令点 $A(x_1,y_1)$ 与点 $B(x_2,y_2)$ 为 xOy 平面上的两个已知点. 我们从这两点向 Ox 轴作垂线 AA_x 和 BB_x,向 Oy 轴作垂线 AA_y 和 BB_x(图7). 用 d 表示线段 AB 的长度.

令直线 AA_y 和 BB_x 的交点为点 C. 由于 $\triangle ABC$ 为直角三角形,因此我们有

$$d = AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} \tag{1}$$

注意到

$$OA_x = x_1, OB_x = x_2, OA_y = y_1, OB_y = y_2$$
$$AC = A_xB_x = OB_x - OA_x = x_2 - x_1$$
$$CB = A_yB_y = OB_y - OA_y = y_2 - y_1$$

由式(1),我们得到

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{2}$$

可以证明,这个公式对于点 A 和点 B 的任意位置都是正确的.

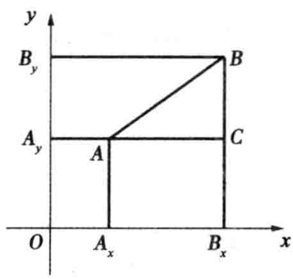


图7

问题2 由三角形顶点的坐标确定三角形面积.

令点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$C(x_3,y_3)$ 为三角形的三个顶点. 我们从这些点向 Ox 轴作垂线 AA_1,BB_1,CC_1(图8). 显然,$\triangle ABC$ 的面积 S 可以由梯形 AA_1B_1B 的面积 $S_{AA_1B_1B}$,梯形 AA_1C_1C 的面积 $S_{AA_1C_1C}$,梯形 CC_1B_1B 的面积 $S_{CC_1B_1B}$ 表示出来,即

$$S = S_{AA_1C_1C} + S_{CC_1B_1B} - S_{AA_1B_1B}$$

由于

$$AA_1 = y_1, BB_1 = y_2, CC_1 = y_3$$
$$A_1B_1 = x_2 - x_1, A_1C_1 = x_3 - x_1, C_1B_1 = x_2 - x_3$$

坐标法

我们有

$$S_{AA_1C_1C} = \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1)$$

$$S_{CC_1B_1B} = \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_2 - x_3)$$

$$S_{AA_1B_1B} = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1)$$

因而

$$S = \frac{1}{2}[(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) + (y_2 + y_3)(x_2 - x_3) - (y_1 + y_2)(x_2 - x_1)]$$

经过化简,我们得到

$$S = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \tag{3}$$

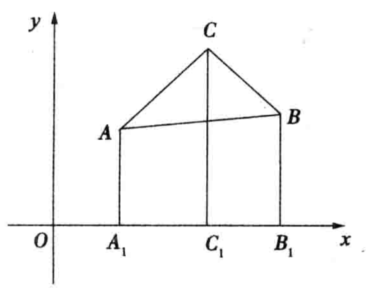


图 8

我们可以看出,虽然上面的公式的推导并不是显然的,但公式(3)除符号外对于三角形的顶点的任何位置都是正确的①.

① 即由公式(3)计算的 S 值可以是负的,但它的绝对值等于三角形的面积的量值.

几何图像的方程

第4章

我们选择一个平面上的许多点，这些点可以是有限多个或是无限多个.这些挑选出来的点形成一个平面几何图像.如果我们能够对这些由我们选择的点进行识别，那么这个图像可以说已经有了定义.例如，这些选择的点是用铅笔或墨水由圆规画出来的圆或由直尺画出来的直线[①].我们也可以用轨迹来定义被选择的点，将平面上的圆定义为点的几何轨迹，这些点与已知点的距离为恒定.为了这个目的，接下来我们叙述一个在解析几何中使用的基本方法.

① 严格地说，在纸上画出的不是点，但可以认为是我们感兴趣的被选择的那些点.