北大燕园

李正元·李永乐考研数学

2015

数学

数学三

全真模拟经典400题

主编 北京大学 李正元
清华大学 李永乐
北京大学 范培华

中国政法大学出版社

北大燕园

2015年李正元·李永乐考研数学

数学

数学三

全真模拟经典400题

主　编　北　京　大　学　李正元
清　华　大　学　李永乐
北　京　大　学　范培华

中国政法大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

2015年李正元·李永乐考研数学．数学全真模拟经典400题．数学三/李正元,李永乐,范培华主编．—北京:中国政法大学出版社,2014.6

ISBN 978-7-5620-5482-5

Ⅰ.①2…　Ⅱ.①李…　②李…　③范…　Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-习题集　Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第131412号

出版者	中国政法大学出版社
地　址	北京市海淀区西土城路25号
邮寄地址	北京100088信箱8034分箱　邮编100088
网　址	http://www.cuplpress.com（网络实名:中国政法大学出版社）
电　话	(010)58908285(总编室)　58908433(编辑部)　58908334(邮购部)
承　印	北京旺都印务有限公司
开　本	787mm×1092mm　1/16
印　张	10
字　数	218千字
版　次	2014年6月第1版
印　次	2014年6月第1次印刷
定　价	23.80元

前　言

本套书（**李正元·李永乐考研数学系列——《数学复习全书》、《数学历年试题解析》及《数学全真模拟经典400题》等**）出版、修订多年以来，深受全国广大考生的好评和厚爱，受到专家同行的肯定，认为本套书在编写体例和内容上有“自己的特色”和“较高的水准及较强的针对性、前瞻性”，“较适合考生备考的需要”，我们深感欣慰。**《2015年考研数学全真模拟经典400题》**根据考试大纲的考试内容、考试要求及试卷结构重新编写，将以更高的质量和新的面貌呈现在广大考生的面前。

《经典400题》特点：

1. 每题均全新优化设计，综合性强

为使考研同学考前多一些查漏补缺的机会，多见一些新题型，多一些针对性，考试中多一份把握，我们特优化设计了10套模拟试题。在内容设计上，每道题均涉及两个或两个以上知识点，这些题涵盖新大纲大部分重要考查知识点。通过这10套全新优化设计的试题训练，我们相信一定能提高您的数学的分析问题、解决问题的能力。

2. 注重归纳总结，力求一题多解，解答规范、详细

我们在设计这10套试题时，无论是选择题、填空题，还是解答题（包括证明题），每道题设有：①分析——该题的解题思路和方法；②解答——该题的详细、规范解题过程；③评注——该题所考查的知识点（或命题意图）、解题思路归纳总结和延伸、常见错误和注意事项、涉及的重要结论。同时，在解题过程中，力求一题多解，扩展考生的视野和思路，比较各种解题方法的特点和适用范围，从而提高应试水平。

本书使用说明：

1. 本书是依据考研数学大纲为2015年考研读者全新优化设计的一本全真模拟训练套题，本书中的试题难度略高于2014年考研试题，解答题（包括证明题）体现了考试重点、难点内容，综合性比较强；选择题与填空题着重考查考生对基本概念、基本公式、基本定理的理解和运用，适用于第三阶段复习训练之用。

2. 本书中的每道题均有较透彻的分析、详细解答、归纳总结的评注，因此希望考生在做题时，如果遇到了困难，不要急于看分析与解答，一定要多思考，只有这样才能达到本书编写的目的，才能提高应试水平，才能取得好成绩。

特别提醒考生注意：

（1）本书编撰者长期从事于清华大学、北京大学、中国人民大学等重点高校的相关教学，考研辅导经验丰富，并且是各自领域的专家学者，具有足够的专业素养。更重要的是，本书编撰者认真钻研考试大纲的考试内容和考试要求，归纳总结考生在学习中的不足及近年来考研数学考试的命题规律，尽力做到考研辅导和考研辅导资料的编写具有很强的针对性和有效性。

（2）为了提高考生数学分析和解决问题的能力，本书所编题目难度较大，有的题目涉及3个以上的考点，综合运用性比较高，概念运用性较强，如果考生在做本书试题感到棘手时，请不要着急，更不能泄气，应静下心来，仔细分析题目所考查的是哪些知识点，回忆《数学复习全书》所介绍的解题方法，然后再动手做题。

因此，我们希望考生认真对待本书中每道题，一定要动手做题，不要一看了事，建议考生对本书中的每套题至少要做二至三遍。我们相信在2015年考研数学考试中，您肯定会感到有些题"似曾相识"、甚至"一见如故"。

在本书的编写、编辑和成书过程中，由于时间紧、任务重，尽管我们认真对待和严格要求，仍难免有不尽如人意的地方，诚请广大读者和同行批评指正。

编者

2014年6月

目　录

模拟试卷　卷(一)

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的. 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1)　设正数列$\{a_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{a_n}x^n\mathrm{d}x = \mathrm{e}$,则极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n =$

(A)　e.　　(B)　1.　　(C)　0.　　(D)　$\frac{1}{\mathrm{e}}$.

(2)　设函数$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 则$x = 0$是$f(x)$的

(A)　可去间断点.　　(B)　跳跃间断点.

(C)　第二类间断点.　　(D)　连续点.

(3)　设有函数$f_1(x) = |\ln x|$,$f_2(x) = \ln x + \frac{1}{2}x(x-1)$,$f_3(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$,$f_4(x) = |x - 1 + \ln x|$,则以(1,0)为曲线拐点的函数有

(A)　1 个.　　(B)　2 个.　　(C)　3 个.　　(D)　4 个.

(4)　设$f\left(x+y,\frac{x}{y}\right) = x^2 - xy + y^2$,则$f'_x(1,1) =$

(A)　1.　　(B)　0.　　(C)　-1.　　(D)　$\frac{1}{2}$.

(5)　设$\boldsymbol{A}$是$m \times n$矩阵,且方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$有解,则

(A)　当$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$有唯一解时,必有$m = n$.

(B)　当$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$有唯一解时,必有$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n$.

(C)　当$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$有无穷多解时,必有$m < n$.

(D)　当$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$有无穷多解时,必有$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) < m$.

(6)　下列矩阵中不能相似对角化的是

(A)　$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix}$.　　(B)　$\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix}$.　　(C)　$\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$.　　(D)　$\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&3&3\end{bmatrix}$.

(7)　设事件A,B,C是一个完备事件组,即它们两两互不相容且其和为Ω,则下列结论中一定成立的是

(A)　$\overline{A},\overline{B},\overline{C}$是一个完备事件组.　　(B)　A,B,C两两独立.

(C)　$A \cup B$与$\overline{A} \cup \overline{B}$独立.　　(D)　$\overline{A},\overline{B},\overline{C}$是两两对立事件.

(8) 设 $\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$ 是取自同一正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的两个相互独立且容量相同的简单随机样本的两个样本均值，则满足 $P\{|\overline{X}-\overline{Y}|>\sigma\}\leqslant 0.05$ 的最小样本容量 $n=$

(A) 4.　　(B) 8.　　(C) 12.　　(D) 24.

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

(9) 设 $y=f\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)$，$f'(x)=\ln x^{\frac{1}{3}}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ ______．

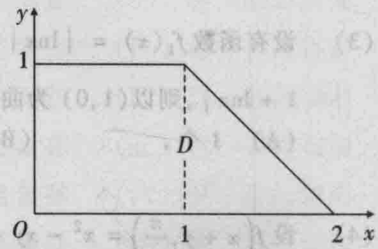
(10) 设 $f(x)$ 为连续函数，且 $f(0)=f(1)=1$，$F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\ln x}f(t)\,\mathrm{d}t$，则 $F'(1)=$ ______．

(11) 微分方程 $(x+y)\mathrm{d}y+(y+1)\mathrm{d}x=0$ 满足 $y(1)=2$ 的特解是 $y=$ ______．

(12) 设某产品的需求函数 $Q=Q(p)$，它对价格的弹性为 $\varepsilon(0<\varepsilon<1)$．已知产品收益 R 对价格的边际效应为 c(元)，则产品的产量应是______个单位．

(13) 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^5\begin{bmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^4$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$ ______．

(14) 设 (X,Y) 服从右图矩形区域 D 上的均匀分布



则　$P\left\{X<Y,Y>\dfrac{1}{2}\right\}=$ ______

$P\left\{X<Y\,\middle|\,Y>\dfrac{1}{2}\right\}=$ ______

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15) **(本题满分 10 分)**

从抛物线 $y=x^2-1$ 的任意一点 $P(t,t^2-1)$ 引抛物线 $y=x^2$ 的两条切线，

(Ⅰ) 求这两条切线的切线方程；

(Ⅱ) 证明该两条切线与抛物线 $y=x^2$ 所围面积为常数．

(16)　（本题满分 10 分）

证明下列命题：

（Ⅰ）设 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)>0$，则存在 $\delta>0$ 使得 $y=f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0]$ 单调减少，在 $[x_0,x_0+\delta)$ 单调增加；

（Ⅱ）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 二阶可导且 $f(0)=f(1)=0$，$f''(x)<0\ (x\in(0,1))$，则 $f(x)>0\ (x\in(0,1))$.

(17)　（本题满分 10 分）

计算二重积分 $I=\iint\limits_D (x+y)\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 为 $x^2+y^2=1$，$x^2+y^2=2x$ 所围中间一块区域.

(18)　（本题满分 10 分）

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=2$，$na_n=a_{n-1}+n-1$，$n=1,2,3,\cdots$. 求此幂级数的和函数 $S(x)$，其中 $x\in(-1,1)$.

(19)　(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$，试证：对任意正数 a, b，在 $(0,1)$ 内存在不同的两点 ξ, η，使 $\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b$.

(20)　(本题满分 11 分)

已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,5,-1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2=(2,7,a,4)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3=(5,17,-1,7)^{\mathrm{T}}$,

(Ⅰ) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，求 a 的值；

(Ⅱ) 当 $a=3$ 时，求与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 都正交的非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_4$；

(Ⅲ) 当 $a=3$ 时，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 可表示任一个 4 维列向量.

(21)　(本题满分 11 分)

已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的 3 维列向量，满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=4\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=-2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_3$.

(Ⅰ) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值；

(Ⅱ) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量；

(Ⅲ) 求矩阵 $\boldsymbol{A}^*-6\boldsymbol{E}$ 的秩.

（22）　**（本题满分 11 分）**

设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$，方差 $DX=4$，而随机变量 Y 的密度函数为 $2f(-2y)$，且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=-\dfrac{1}{2}$，记 $Z=X+2Y$.

（Ⅰ）求 EZ,DZ；

（Ⅱ）用切比雪夫不等式估计概率 $P\{|Z|\geqslant 4\}$.

（23）　**（本题满分 11 分）**

设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b}\mathrm{e}^{-(x-a)/b}, & x>a,\\ 0, & x\leqslant a,\end{cases}$$

其中 $a,b(b>0)$ 都是未知参数．又 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本，试求 a 与 b 的最大似然估计量．

模拟试卷　卷(二)

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的. 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1)　设$f(x)$是以 3 为周期的可导函数,且$f'(-1)=1$,则$I=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{f(2-3h)-f(2+h)}=$

(A)　-4.　(B)　4.　(C)　$-\dfrac{1}{4}$.　(D)　$\dfrac{1}{4}$.

(2)　设$f(x)=(1+x^2)^{x^2}-1$, $g(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\,dt$,则$x\to 0$时$f(x)$是$g(x)$的

(A)　高阶无穷小.　(B)　低阶无穷小.

(C)　同阶而非等价无穷小.　(D)　等价无穷小.

(3)　设$f(x)$是区间$\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$上的正值连续函数,且$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)\,dx$, $J=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}f(\arcsin x)\,dx$, $K=\int_0^1 f(\arctan x)\,dx$. 若把$I,J,K$按其积分值从小到大的次序排列起来,则正确的次序是

(A)　I,J,K.　(B)　J,K,I.　(C)　K,I,J.　(D)　J,I,K.

(4)　下列级数中属于条件收敛的是

(A)　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{(-1)^n}{n}\right]$.　(B)　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\dfrac{1}{n^{3/2}}+\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]$.

(C)　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n+2}}\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.　(D)　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\ln(n+1)}$.

(5)　设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$是$n$阶矩阵,并满足$\boldsymbol{ABAC}=\boldsymbol{E}$,则下列结论中不正确的是

(A)　$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$.　(B)　$\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{CAB}$.

(C)　$\boldsymbol{BA}^2\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$.　(D)　$\boldsymbol{ACAB}=\boldsymbol{CABA}$.

(6)　设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{bmatrix}$,则下列矩阵中与矩阵$\boldsymbol{A}$等价、合同但不相似的是

(A)　$\begin{bmatrix}1&-2&1\\-2&4&-2\\1&-2&1\end{bmatrix}$.　(B)　$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{bmatrix}$.　(C)　$\begin{bmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&-3\end{bmatrix}$.　(D)　$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$.

(7)　袋中有 2 个白球和 1 个红球. 现从袋中任取一球且不放回,并再放入一个白球,这样一直进行下去,则第n次取到白球的概率为

(A) $1-\frac{2^n}{3^{n+1}}$.　　(B) $1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$.　　(C) $1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.　　(D) $1-\frac{2^{n-1}}{3^n}$.

(8) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{n+1}$ 是取自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，记 $\overline{X}_k=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}X_i,1\leqslant k\leqslant n$，则 $\operatorname{cov}(\overline{X}_k,\overline{X}_{k+1})=$

(A) $\frac{\sigma^2}{k}$.　　(B) $\frac{\sigma^2}{k+1}$.　　(C) $k\sigma^2$.　　(D) σ^2.

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

(9) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{[f(x)+1]x^2}{x-\sin x}=2$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为________.

(10) 将抛物线 $y=x^2-x$ 与 x 轴及直线 $x=c(c>1)$ 所围成平面图形绕 x 轴旋转一周，所得旋转体的体积 V_x 等于弦 op（p 为抛物线与直线 $x=c$ 的交点）绕 x 轴旋转所得锥体的体积 $V_{锥}$，则 c 的值为________.

(11) 设 $u=ze^{\frac{z}{y}}\sin(x^2+y^2)$，其中 $z=z(x,y)$ 是由方程 $3x^2+2y^2+z^2=6$ 确定的隐函数，且 $z(1,1)=1$，则 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1)}=$________.

(12) 设平面区域 $D=\{(x,y)\mid x^3\leqslant y\leqslant1,-1\leqslant x\leqslant1\}$，$f(x)$ 是定义在 $[-a,a](a\geqslant1)$ 上的任意连续函数，则 $\iint\limits_D 2y[(x+1)f(x)+(x-1)f(-x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

(13) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&a\\1&a&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 是 3 阶非零矩阵，满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{0}$，则矩阵 $\boldsymbol{B}=$________.

(14) 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，则 $E\min(X,Y)=$________.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15) **（本题满分 10 分）**

设 $F(x)=\int_0^1(1-t)\ln(1+xt)\mathrm{d}t(x>-1)$，求 $F'(x)(x>-1,x\neq0)$ 并讨论 $F'(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上的连续性．

(16) **(本题满分 10 分)**

抛物线 $y=x^2$ 上任意点 $(a,a^2)(a>0)$ 处引切线 L_1，在另一点处引另一切线 L_2，L_2 与 L_1 垂直.

(Ⅰ) 求 L_1 与 L_2 交点的横坐标 x_1；

(Ⅱ) 求 L_1,L_2 与抛物线 $y=x^2$ 所围图形的面积 $S(a)$；

(Ⅲ) 问 $a>0$ 取何值时 $S(a)$ 取最小值.

(17) **(本题满分 10 分)**

设函数 $f(x,y)=\begin{cases}(|x|+x)y, & y\geqslant 1,\\ 1, & y<1,\end{cases}$ 计算二重积分

$$I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+(y-1)^2\leqslant 1\}$.

(18) **(本题满分 10 分)**

作自变量替换 $x=\sin t\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$，把方程

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+(2\sqrt{1-x^2}-x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=2x$$

变换成 y 关于 t 的微分方程，并求原方程的通解.

(19) (本题满分 10 分)

设函数$f(x)$在区间$[0,4]$上连续,且$\int_0^4 f(x)\,dx = 0$,求证:存在$\xi \in (0,4)$使得

$$f(\xi) + f(4-\xi) = 0.$$

(20) (本题满分 11 分)

设$\boldsymbol{A}$是n阶反对称矩阵,

(Ⅰ)证明:$\boldsymbol{A}$可逆的必要条件是n为偶数;当n为奇数时,$\boldsymbol{A}^*$是对称矩阵;

(Ⅱ)举一个4阶不可逆的反对称矩阵的例子;

(Ⅲ)证明:如果λ是$\boldsymbol{A}$的特征值,那么$-\lambda$也必是$\boldsymbol{A}$的特征值.

(21) (本题满分 11 分)

已知$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -a \\ 2 & a & -2 \\ -a & -1 & 1 \end{bmatrix}$,求$\boldsymbol{A}$的特征值与特征向量,并指出$\boldsymbol{A}$可以相似对角化的条件.

(22) **(本题满分 11 分)**

设离散型二维随机变量(X,Y)的取值为$(x_i,y_j)(i,j=1,2)$，且$P\{X=x_2\}=\dfrac{3}{4}$，$P\{Y=y_1\mid X=x_2\}=\dfrac{2}{3}$，$P\{X=x_1\mid Y=y_1\}=\dfrac{1}{4}$，试求：

（Ⅰ）二维随机变量(X,Y)的联合概率分布；

（Ⅱ）条件概率$P\{Y=y_j\mid X=x_1\},j=1,2$.

(23) **(本题满分 11 分)**

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的简单随机样本，X的概率密度为

$$f(x)=ae^{-\frac{|x|}{\lambda}},\ -\infty<x<+\infty,\lambda>0\text{ 是未知参数}.$$

（Ⅰ）求λ的矩估计量$\hat{\lambda}_1$；

（Ⅱ）求λ的最大似然估计量$\hat{\lambda}_2$，并求$E\hat{\lambda}_2$.

模拟试卷　卷(三)

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的. 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1)　函数 $f(x) = x^3 - 3x + k$ 只有一个零点,则 k 的取值范围为

(A)　$|k| > 2$.　(B)　$|k| > 1$.　(C)　$|k| < 1$.　(D)　$|k| < 2$.

(2)　设 $y = y(x)$ 是由方程 $y^2 + xy + x^2 + x = 0$ 所确定的满足 $y(-1) = 1$ 的隐函数,则 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{y(x) - 1}{(x+1)^2}$ =

(A)　1.　(B)　2.　(C)　-2.　(D)　-1.

(3)　设 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{x} dx, I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{x}{\sin x} dx$,则

(A)　$I_2 > 1 > I_1$.　(B)　$I_2 > I_1 > 1$.

(C)　$1 > I_2 > I_1$.　(D)　$1 > I_1 > I_2$.

(4)　已知幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}(x-a)^n$ 在 $x > 0$ 时发散,且在 $x = 0$ 时收敛,则

(A)　$a = 1$.　(B)　$a = -1$.

(C)　$-1 \leqslant a < 1$.　(D)　$-1 < a \leqslant 1$.

(5)　已知 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_4$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系,则下列向量组中也是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 基础解系的是

(A)　$\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_3 - \boldsymbol{\eta}_4, \boldsymbol{\eta}_4 - \boldsymbol{\eta}_1$.

(B)　$\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_3 - \boldsymbol{\eta}_4, \boldsymbol{\eta}_4 + \boldsymbol{\eta}_1$.

(C)　$\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_3 - \boldsymbol{\eta}_4, \boldsymbol{\eta}_4 - \boldsymbol{\eta}_1$.

(D)　$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_4$ 的等价向量组.

(6)　已知 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{B}$,若 $\boldsymbol{A\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$,则

(A)　$\boldsymbol{B}$ 的特征值为 λ,对应的特征向量是 $\boldsymbol{P\alpha}$.

(B)　$\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\dfrac{1}{\lambda}$,对应的特征向量是 $\boldsymbol{P\alpha}$.

(C)　$\boldsymbol{B}$ 的特征值为 λ,对应的特征向量是 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$.

(D)　$\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\dfrac{1}{\lambda}$,对应的特征向量是 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$.

(7)　设随机变量 X 与 Y 独立同分布,$X \sim N\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$,则 $D|X - Y|$ = ________

(A)　1.　(B)　$\dfrac{2}{\pi}$.　(C)　$1 - \dfrac{2}{\pi}$.　(D)　$1 + \dfrac{2}{\pi}$.