金融学译丛
FINANCE

金融数学
——金融工程引论

（第二版）

Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering
(Second Edition)

马雷克·凯宾斯基（Marek Capiński）
托马斯·札斯特温尼克（Tomasz Zastawniak） ／著

佟孟华 ／译
郭多祚／ 校

中国人民大学出版社

金融学译丛
FINANCE

金融数学——金融工程引论（第二版）

Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering (Second Edition)

马雷克·凯宾斯基（Marek Capiński）
托马斯·札斯特温尼克（Tomasz Zastawniak） ／著
佟孟华 ／译
郭多祚／ 校

中国人民大学出版社
·北 京·

图书在版编目（CIP）数据

金融数学：金融工程引论：第 2 版/凯宾斯基，札斯特温尼克著；佟孟华译．—北京：中国人民大学出版社，2014.1
（金融学译丛）
ISBN 978-7-300-17650-5

Ⅰ.①金… Ⅱ.①凯…②札…③佟… Ⅲ.①金融-经济数学-高等学校-教材 Ⅳ.①F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 299828 号

金融学译丛
金融数学：金融工程引论（第二版）
马雷克・凯宾斯基
托马斯・札斯特温尼克 著
佟孟华 译
郭多祚 校
Jinrong Shuxue：Jinrong Gongcheng Yinlun

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http：//www.crup.com.cn		
	http：//www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	三河市汇鑫印务有限公司		
规　　格	185mm×260mm　16 开本	**版　　次**	2014 年 5 月第 1 版
印　　张	17.25 插页 1	**印　　次**	2014 年 5 月第 1 次印刷
字　　数	371 000	**定　　价**	42.00 元

出版说明

作为世界经济的重要组成部分，金融在经济发展中扮演着越来越重要的角色。为了加速中国金融市场与国际金融市场的顺利接轨，帮助中国金融界相关人士更好、更快地了解西方金融学的最新动态，寻求建立并完善中国金融体系的新思路，促进具有中国特色的现代金融体系的建立，中国人民大学出版社精心策划了这套“金融学译丛”，该套译丛旨在把西方，尤其是美国等金融体系相对完善的国家最权威、最具代表性的金融学著作，被实践证明最有效的金融理论和实用操作方法介绍给中国的广大读者。

该套丛书主要包括以下三个方面：

（1）理论方法。重在介绍金融学的基础知识和基本理论，帮助读者更好地认识和了解金融业，奠定从事深层次学习、研究等的基础。

（2）实务案例。突出金融理论在实践中的应用，重在通过实务案例以及案例讲解等，帮助广大读者将金融学理论的学习与金融学方法的应用结合起来，更加全面地掌握现代金融知识，学会在实际决策中应用具体理论，培养宏观分析和进行实务操作的能力。

（3）学术前沿。重在反映金融学科的最新发展方向，便于广大金融领域的研究人员在系统掌握金融学基础理论的同时，了解金融学科的学术前沿问题和发展现状，帮助中国金融学界更好地认清世界金融的发展趋势和发展前景。

我们衷心地希望这套译丛的推出能够如我们所愿，为中国的金融体系建设和改革贡献一份力量。

中国人民大学出版社

2004 年 8 月

第二版前言

本版对内容进行了彻底的修订，调整了结构。本版的新特点有：

- 增加了新的一章，用于讨论连续时间模型，根据直觉勾勒出了数学论证和结构。
- 在离散情况下，完全证明了数理金融的两个基本定理。
- 每章都以事例分析开始，从而说明实际需要促进了理论工具的发展。
- 在每章的最后，对事例进行了详细研究。

在各章进行事例分析时，首要任务就是提出合适的问题，能够在该章的框架内进行研究。同时，可能也需要其他假设，才能使得该事例成为一个很好的数学问题。由于涉及到灵活性，所以每个事例都不存在唯一解。

我们对第一版读者提出的难以估价的反馈意见表示感谢。

马雷克·凯宾斯基　托马斯·札斯特温尼克

2010 年 3 月

第一版前言

恰如书名，这本书本身是极好的金融投资。因为本书以一卷的篇幅讲述了两个获得诺贝尔奖的理论，涉及广泛的领域，包含很多好的方法，有多少大学本科课本敢于这样声称？

在债券和股票价格数学模型的基础上，这两个理论始于两个不同的方向：一个是布莱克-斯科尔斯（Black-Scholes）关于期权和其他衍生证券的套利定价，一个是马科维茨投资组合优化和资本资产定价模型。基于无套利理论的模型还能进一步地研究利率的期限结构。这些是数理金融的三个重要领域，它们对现代金融市场的运作方法有重大影响。本书适用于大学本科二年级和三年级学生，不限于数学专业，其他专业，例如企业管理、金融学、经济学专业也同样适用。

本书内容为一年的课程，大约100课时讲完。对于选择书中一些课题的课时较少的课程，可选择合适的章节。书中穿插了大量的例子和练习，练习全部有解答，并提供大量的材料作为辅助教程，使得本书也非常适于教学。

学习本书的必备基础包括初等微积分、概率论和线性代数。对微积分我们要求熟练掌握导数和偏导数，求单变量和多变量函数的最大值和最小值，拉格朗日（Lagrange）乘子，泰勒（Taylor）公式和积分。在概率课程要掌握的内容包括：随机变量及其概率分布，尤其是二项分布和正态分布，还有期望、方差、条件概率、独立性。熟悉中心极限定理对学习本书很有用。对于线性代数，要求读者会解线性方程组，掌握矩阵的加法、乘法、数量运算，会求逆矩阵和计算行列式。特别地，作为概率论的参考书，我们推荐自己的书：M. Capiński and T. Zastawniak, *Probability Through Problems*, Springer-Verlag, New York, 2001.

在大量的数值例子和练习中，使用装有电子表格软件的计算机会有很大帮助，但这并不是完全必要的，在我们下面给出的网页中，提供了一些Excel文件，其中包括一些例子与练习的解答。

我们非常感谢尼格尔·卡特兰德（Nigel Cutland）的提醒，使我们避免了一些在其他教科书经常出现的错误，我们在注 4.1（第一版）中进一步了说明。我们也非常感谢我们的学生和同事对第一版各章提出的反馈意见。我们还要感谢本书的读者，尤其是安德杰·保尔茨维斯基（Andrzej Palczewski），他提出了许多改进意见，指出了一些错误，这些错误已得到纠正。

热情地邀请本书读者访问下面的网页和点击相关的网站，查看最新的下载和更正，或者与作者交流，我们将会对您提出的意见表示深深的感谢。

马雷克·凯宾斯基　托马斯·札斯特温尼克

www.springer.com

目　录

第 1 章

简单市场模型

事例 1

英国的一家公司打算在 1 年内在美国花 100 000 美元购买一台设备，在此时间，生产商保证设备的价格不变。考虑到当前汇率为 1.62 美元兑换 1 英镑，为了购买设备时更有利，公司的管理者按预算储蓄 64 000 英镑。分析这个决策。

1.1 基本概念和假设

假设有两种可交易资产：一种是无风险资产，另一种是风险证券。前者是指银行存款或者是由政府、金融机构、公司发行的债券；后者通常指的是股票，它还可能是外币、黄金、商品，或者是未来的价格在今天是未知的任何虚拟资产。

在本章，我们限定时间仅有两个时间：今天，$t=0$ 和未来的某个时间，$t=T$，比如说 1 年后。更精确和更符合实际的情况将在后面的各章研究。

风险证券的头寸（position）是指投资者持有的股票的股份数。在时间 $t=0$，T，1 股股票的价格用 $S(t)$表示。对所有投资者来说，当前的股票价格 $S(0)$是已知的，但未来的价格 $S(T)$是未知的：它可能上涨，也可能下跌。差额 $S(T)-S(0)$与初始价格的比为股票的收益率，可表示为

$$K_S=\frac{S(T)-S(0)}{S(0)}$$

它也是不确定性的。

我们将在第 6 章、第 7 章和第 8 章讨论股票的动态价格。

无风险头寸是指在银行账户中的金额。投资者既可以选择继续把钱存在银行，

也可以选择投资债券。在时间 $t=0$，T，债券的价格用 $A(t)$表示。与当前的股票价格一样，对所有投资者来说，债券的当前价格 $A(0)$是已知的。但是与股票不同的是，债券在时间 T 的价格 $A(T)$也是已知的，具有确定性。例如，$A(T)$是由发行债券的机构确保的支付，在这种情况下，我们说债券在时刻 T 到期时的面值为 $A(T)$。用与定义股票收益率同样的方法定义债券的收益率为

$$K_A=\frac{A(T)-A(0)}{A(0)}$$

称为无风险收益率。

第 2 章和第 9 章将详细地研究无风险资产。

我们的任务是构建金融证券市场的数学模型。关键的第一步是考虑所研究的数学对象的特性。下面给出一些假设，其目的是寻求现实世界的复杂性与数学模型的简化和局限性之间的一种折中，使模型更容易处理。

我们已经知道无风险证券的未来价格 $A(T)$是确定性的，即它是预先知道的已知数。在时间 0，未来的股票价格 $S(T)$是未知的，是至少可以取两个不同值的随机变量。实际上，$S(T)$取不同值的数目是有限的，因为通常认为它们是特定的十进位小数且因为全世界的货币总量提供了所有股票价格的上界，因此，自然认为每股股票的未来价格 $S(T)$是仅取有限个数值的随机变量。然而，在第 8 章就不是这种情况了。

所有的股票和债券的价格是严格正的，即

$$A(t)>0, S(t)>0 \text{，当 } t=0,\ T \text{ 时}$$

在时间 $t=0$，T，持有 x 股股票和 y 份债券的投资者的总财富为

$$V(t)=xS(t)+yA(t) \tag{1.1}$$

数对 $(x,\ y)$ 被称为**资产组合**（portfolio），$V(t)$是这个资产组合的**价值**（value），换言之，$V(t)$是投资者在时间 t 的**财富**（wealth）。

在时间 0 和时间 T 之间，资产价格的增长决定资产组合的价值变化为

$$V(T)-V(0)=x(S(T)-S(0))+y(A(T)-A(0))$$

这个差额与资产组合的初始价值的比称为资产组合的收益率，即

$$K_V=\frac{V(T)-V(0)}{V(0)}$$

股票或债券的收益率是资产组合收益率的特殊情况（分别为 $x=0$ 或 $y=0$）。注意，因为 $S(T)$是随机变量，所以 $V(T)$以及相应的 K_S 和 K_V 也都是随机变量。但无风险投资的收益率 K_A 是确定性的。

例 1.1

设 $A(0)=100$ 美元，$A(T)=110$ 美元，则债券投资的收益率为

$$K_A=0.10=10\%$$

另外，设 $S(0)=50$ 美元，且假设随机变量 $S(T)$取两个值，

$$S(T)=\begin{cases}52 & \text{概率为 } p\\ 48 & \text{概率为 } 1-p\end{cases}$$

对某一个 $0<p<1$，则股票的收益率为

$$K_S=\begin{cases}4\% & \text{如果股票上涨}\\ -4\% & \text{如果股票下跌}\end{cases}$$

例 1.2

假设债券和股票价格与例 1.1 相同，在时间 0，由 $x=20$ 股股票，$y=10$ 份债券构成的资产组合的价值为

$$V(0)=2\ 000$$

在时间 T，该资产组合的价值为

$$V(T)=\begin{cases}2\ 140 & \text{如果股票上涨}\\ 2\ 060 & \text{如果股票下跌}\end{cases}$$

于是，该资产组合的收益率为

$$K_V=\begin{cases}7\% & \text{如果股票上涨}\\ 3\% & \text{如果股票下跌}\end{cases}$$

练习 1.1

设 $A(0)=90$ 美元，$A(T)=100$ 美元，$S(0)=25$ 美元，并且设

$$S(T)=\begin{cases}30 & \text{概率为 } p\\ 20 & \text{概率为 } 1-p\end{cases}$$

其中 $0<p<1$。资产组合由 $x=10$ 股股票，$y=15$ 份债券构成，计算 $V(0)$，$V(T)$和 K_V。

练习 1.2

假设股票和债券价格与练习 1.1 相同，求在时间 T 的价值为

$$V(T)=\begin{cases}1\ 160 & \text{如果股票上涨}\\ 1\ 040 & \text{如果股票下跌}\end{cases}$$

的资产组合在时间 0 的价值是多少？

尽管与实际情况相差甚远，为了数学上的方便，允许资产组合中的风险资产的数量 x 和无风险资产的数量 y 为任意实数，包括负数和分数，于是，一般地，对交易头寸没有附加任何限制，即

$$x,\ y\in\mathbb{R}$$

可分性（divisibility）是指投资者持有的股票数量和债券数量可以是分数。与单位价格相比，无论交易量有多大，我们都可以认为实际的交易几乎达到了完美的可分性。

流动性（liquidity）是指对头寸 x 或与另一个市场有关的头寸 y 不加任何的限制。这意味着，根据需求，任何资产都可以按照市场价格进行任意数量的买入或者卖出。显然这是数学的理想化，实际上，因为交易量是有限制的，大交易量会影响价格。建立具有如此效果的模型需要高深的数学知识，超出了本书的范围。

如果在资产组合中持有的某种证券的数量是正的，我们称投资者持有**多头头寸**（long position）。否则，我们称持有**空头头寸**（short position），或者称投资者**卖空资产**。无风险证券的空头头寸包括正在发行和销售的债券，但实际上可通过借入现金更容易地达到同样的金融效果，利率是由债券价格决定的。偿还贷款及利息可认为是**终止**（closing）空头。

股票的空头头寸可以通过**卖空**（short selling）来实现。这意味着投资者可以先借股票，然后再卖出股票，利用得到的收益作其他的投资。股票的持有者仍对股票拥有所有的权利，特别地，股票持有者具有得到红利和在任何时刻卖出股票的权利。因此，投资者必须总有足够的财力来履行合约，特别是能够通过回购股票并归还给股票持有人来结清风险资产的空头头寸。类似地，投资者总可以利用归还贷款和利息来结清无风险证券的空头头寸。有时，考虑到这些特殊的限制，我们假设投资者的财富在任何时间都是非负的，即 $V(t)\geqslant 0$。

1.2 无套利原则

在本节，我们继续讲述市场的最基本的假设。简单地说，我们假设市场不允许具有无初始投资的无风险利润。当市场的参与者出现错误时，这样的收益或许会发生。

例 1.3

假设纽约的交易商 A 出价 $d_A=1.62$ 美元兑换 1 英镑的汇率购买英镑，而交易商 B 在伦敦以 $d_B=1.60$ 美元兑换 1 英镑的汇率卖出英镑。如果是这种情况，实际上，交易商就在分发免费货币。一个没有任何初始投资的投资者可获得每英镑 $d_A-d_B=0.02$ 美元的利润，其方法是同时取得交易商 B 的空头头寸和交易商 A 的多头头寸。对他们的慷慨服务的需求，将会迫使交易商调整汇率使得这个可以获得财富的机会消失。

练习 1.3

2002 年 7 月 19 日纽约的交易商 A 和伦敦的交易商 B 利用如下汇率交易欧元（€）、英镑（£）和美元（$）：

交易商 A	买入	卖出
€1.000 0	$1.020 2	$1.028 4
£1.000 0	$1.571 8	$1.584 4

交易商 B	买入	卖出
€1.000 0	£0.632 4	£0.640 1
$1.000 0	£0.629 9	£0.637 5

指出在没有初始投资的情况下获取无风险利润的机会。

下面的例子表明在单期模型下没有初始投资时获取无风险利润的情况。

例 1.4

假设纽约的交易商 A 1 年以后按汇率 $d_A=1.58$ 美元兑换 1 英镑购买英镑，同时，在伦敦的交易商 B 以汇率 $d_B=1.60$ 美元兑换 1 英镑卖出英镑。进一步假设美元可以按年利率 4%借入，英镑可在银行账户以 6%的利率投资。虽然没有如前所述的那么显而易见，但这样也能创造在没有初始投资的情况下获得无风险利润的机会。

例如，一个投资者借入 10 000 美元并且能兑换成 6 250 英镑，然后存入银行账户中。1 年以后，375 英镑的利息加在储蓄中，总量变为 10 467.50 美元（根据年初与交易商 A 签订的协议）。归还 10 000 美元贷款及贷款利息 400 美元之后，投资者将得到 67.50 美元的利润。

显然，一个或两个交易商的汇率报价发生错误，就可能被投资者利用。对交易商服务的需求再一次要求交易商重新调整汇率，减少 d_A 或者增加 d_B 以使得利润消失。

在前面的例子中，尽管不需要初始投资，但利润是确定的。我们也应该考虑获利更微小的可能性，这样的利润不再是确定的，但是没有遭受损失的风险和不需要初始投资。假设有一种彩票在一百万张之中恰有一张中奖，奖品是一台汽车。实际上，虽然中奖的可能性确实非常小，但是人们也不希望免费提供这些彩票。当某种商品的卖方提供该种商品的附加的免费赠品（免费的刮刮卡）时，就发生了类似的情况。事实上，这样的免费赠品并非免费，费用已经包含在购买商品的价格中。

我们做一个假设，以排除类似于上面例子的情况出现。

假设 1.5（无套利原则）

不存在满足如下条件的资产组合 (x, y)，其初始价值 $V(0)=0$，$V(T)\geqslant 0$ 的概率为 1 且 $V(T)>0$ 的概率非零，其中 $V(0)$，$V(T)$ 由式（1.1）给出。

换言之，如果资产组合的初始价值为零，即 $V(0)=0$（没有初始投资），并且 $V(T)\geqslant 0$（没有遭受损失的风险），那么 $V(T)=0$（无收益）的概率为 1。这意味

着，投资者无风险且没有初始财富就不能锁定利润。如果违背了这个原则的资产组合存在，我们称存在**套利**（arbitrage）机会。

在现实中，套利机会很少存在。如果套利机会存在，通常地，与交易量相比收益不大，小投资者很难利用套利机会。另外，套利机会与上面例子相比，更难把握。一般来说，违背无套利原则的情况是短暂的，难以把握。追求套利利润的投资者（称为投机者）的行为有效地消除了套利机会。

在数学模型中排除套利十分贴近现实，这是最重要和最合适的假设。基于无套利原则的论证是金融数学的主要工具。

1.3 单期二叉树模型

在本节，我们只考虑非常简单的例子，在这个例子中，股票价格 $S(T)$ 只取两个不同的值。尽管非常简单，但这种情形对传达后来发展的理论的特色是十分有意义的。

例 1.6

设 $S(0)=100$ 美元，$S(T)$ 可取两个值，

$$S(T)=\begin{cases}125 & \text{概率为 } p\\ 105 & \text{概率为 } 1-p\end{cases}$$

其中 $0<p<1$，债券的价格 $A(0)=100$ 美元，$A(T)=110$ 美元。因此，如果股票上涨，股票收益率 K_S 为 25%；如果股票下跌，股票收益率为 5%。无风险收益率 $K_A=10\%$，股票价格如树形图 1.1 所示。

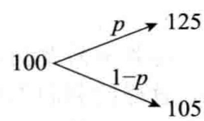

图 1.1 股票价格的单期二叉树

注意在时间 T 股票的两个价格，碰巧都高于时间 0 的股票价格。价格“上涨”或“下跌”是指相对于时间 T 的其他状态的价格，而不是指相对于时间 0 的价格而言的。事实上，我们也可以允许“上涨”状态时的值低于“下跌”状态时的值。例如，如果资产是货币，一些投资者可能认为汇率下跌更为有利。实际上，汇率上涨意味着转换率下跌。把“上涨”和“下跌”的价格运动看做是两个不同结果的抽象表示是最好的处理方法。

一般地，在二叉树模型中，选择股票和债券价格是按照无套利原则，在时刻 T，假设可能上涨也可能下跌的股票价格为

$$S(T)=\begin{cases}S^{u}(T) & \text{概率为 } p\\ S^{d}(T) & \text{概率为 } 1-p\end{cases}$$

其中 $S^{d}(T) < S^{u}(T)$ 且 $0 < p < 1$。

命题 1.7

在二叉树模型中，必须满足约束

$$\frac{S^{d}(T)}{S(0)} < \frac{A(T)}{A(0)} < \frac{S^{u}(T)}{S(0)}$$

否则将会出现套利机会。

证明

假设 $\frac{A(T)}{A(0)} \leqslant \frac{S^{d}(T)}{S(0)}$，在这种情况下，在时间 0

- 借入数额为 $S(0)$ 的无风险资产；
- 用 $S(0)$ 买入 1 股股票。

利用这种方法，你将持有资产组合 (x, y)，其股票股数 $x=1$，债券数 $y=-\frac{S(0)}{A(0)}$，于是，在时间 0，这个资产组合的价值为

$$V(0)=0$$

在时间 T 该资产组合的价值变为

$$V(T)=\begin{cases} S^{u}(T)-\dfrac{S(0)}{A(0)}A(T) & \text{如果股票上涨} \\ S^{d}(T)-\dfrac{S(0)}{A(0)}A(T) & \text{如果股票下跌} \end{cases}$$

这两个可能价值中的第一个值是严格正的，而另一个值是非负的，即 $V(T)$ 是非负的随机变量，并且满足 $V(T)>0$ 的概率为 $p>0$。这个资产组合提供了一个套利机会，违背无套利原则（假设 1.5）。

现在假设 $\frac{A(T)}{A(0)} \geqslant \frac{S^{u}(T)}{S(0)}$，如果是这种情况，则在时间 0：

- 卖空 1 股得到 $S(0)$；
- 投资 $S(0)$ 于无风险资产。

其结果是，你将持有一个资产组合 (x,y)，其中 $x=-1, y=\frac{S(0)}{A(0)}$，其初始价值仍为零，

$$V(0)=0$$

这个投资组合的最终价值为

$$V(T)=\begin{cases} -S^{u}(T)+\dfrac{S(0)}{A(0)}A(T) & \text{如果股票上涨} \\ -S^{d}(T)+\dfrac{S(0)}{A(0)}A(T) & \text{如果股票下跌} \end{cases}$$

$V(T)$ 是非负的，其中第二个值是严格正的。因此，$V(T)$ 是非负的随机变量，满足 $V(T)>0$ 的概率为 $1-p>0$。再一次出现套利机会，违背无套利原则（假设 1.5）。 □

隐含在以上论证中的常识性推理是简单的：买入价格低的资产，卖出（或者卖空）价格高的资产来赚取价差。