普通高等教育“十一五”国家级规划教材

国家工科基地教材·工程数学与数学软件

线性代数

（第三版）

上海交通大学数学系　编

科学出版社

普通高等教育"十一五"国家级规划教材
国家工科基地教材
工程数学与数学软件

线 性 代 数

（第三版）

上海交通大学数学系 编

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书内容包括行列式、矩阵、n维向量与线性方程组、线性空间、矩阵的对角化、实二次型和线性变换等线性代数的基本知识以及基本线性代数问题的计算机实现，通过将线性代数的基本知识与计算机相结合使学生能利用数学软件解决一些简单的线性代数的实际问题. 书末还给出了有关的 Matlab 软件的使用说明.

本书可作为高等工科院校理工科、经济学、管理学等各专业“线性代数”课程的教材，也可供教师和学生作参考之用.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/上海交通大学数学系编. —3 版. —北京：科学出版社，2014.6

普通高等教育“十一五”国家级规划教材·国家工科基地教材·工程数学与教学软件

ISBN 978-7-03-041199-0

Ⅰ.线… Ⅱ.上… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 126427 号

责任编辑：姚莉丽/责任校对：刘小梅

责任印制：阎　磊/封面设计：陈　敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

保定市中画美凯印刷有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2000 年 1 月第　一　版　　开本：720×1000　B5

2007 年 10 月第　二　版　　印张：18 1/2

2014 年 6 月第　三　版　　字数：372 000

2014 年 7 月第二十二次印刷

定价：32.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

第三版前言

本书的第三版在第二版使用多年的基础上，根据教学实践中的反映稍作修改和调整．总体而言，其定位是适用于理工科和经济管理等应用类各专业，教材的结构和主要内容并无变化．所作的改变是：

（1）个别章节的文字阐述和例题有些改动，第七章略有删减，改变的目的是希望教材更符合易于教学的要求；

（2）第八章采用的数学软件改为 Matlab，原因是 Matlab 是在科学计算方面广泛使用的数学软件，它还有功能强大的工具箱，延伸到了科学研究和应用学科的诸多领域，对于多数工程类和经济管理类等应用型学科的学生早些了解接触这个软件是十分有益的．

这版的修改工作由李世栋、乐经良、王纪林、蒋启芬和刘小军完成，对新版教材可能存在的问题，敬请同行和读者不吝指正．

编　者

2014 年 3 月

第二版前言

本书自2000年出版以来已逾七年，除了上海交通大学本科非数学专业以其作为“线性代数”课程的教材外，也有其他一些高校在对线性代数要求较高的理工科专业采用此教材. 在教学实践中，同行们肯定了本书理论完备、阐述严谨、宜于教学、注重应用和结合软件等特点，也提出了一些修改意见.

此次再版基本上保持了本书原来的结构与特色，除了在文字上作了一些修订之外，主要在以下方面有所变化：

(1) 对有些章节的内容阐述略作简化；

(2) 适当增加了例题与习题，拓宽了题型，尤其是选编了一些近年在研究生入学考试中出现的试题类型；

(3) 鉴于Mathematica版本的升级，故对第八章“数学软件与应用实例”应用Mathematica 5.1进行了重写.

此次修改，前七章由原编写者完成，第八章由刘小军老师改写，蒋启芬老师校读了全书.

编　者

2007年3月

第一版前言

线性代数是大学数学教育中一门主要基础课程，对于培养面向 21 世纪人才起着重要的作用. 本书是编者在上海交通大学进行多年教学实践和改革探索的基础上编写的. 其基本内容符合原国家教委 1995 年颁布的“工程数学课程教学基本要求”，并且适当作了一些改革的尝试：介绍了线性代数若干典型的应用实例和数学软件 Mathematica 在线性代数运算方面的基本功能，本书这部分内容实际上进行了数学实验的初步训练. 我们认为，让学生应用数学知识并通过使用计算机来解决实际问题是数学教育中非常值得重视的环节.

本书共分 8 章. 第一章到第七章是线性代数的基本内容. 第一章主要介绍了行列式的基本概念和行列式的计算，并包含了行列式的一个应用——Cramer 法则. 第二章介绍了矩阵的代数运算、可逆矩阵、矩阵的初等变换、矩阵的秩和分块矩阵的概念以及有关性质. 作为应用，在第二章的最后讨论了消元法解线性方程组与线性方程组有解的条件. 第三章讨论 n 维向量的线性关系和向量组的秩的概念，并在此基础上讨论了线性方程组解的结构. 经第二、三章的铺垫，第四章介绍了线性空间和欧氏空间的概念. 第五章在介绍了方阵的特征值和特征向量以及矩阵相似的概念后讨论了方阵的对角化问题. 第六章介绍了实二次型的概念和化二次型为标准形的方法，并讨论了正定二次型的相关性质. 第七章介绍了线性变换的基本概念和性质. 第八章介绍了数学软件 Mathematica 的最基本的使用方法以及用以解决最基本的线性代数问题的有关指令，并给出了若干应用实例，可用于计算机辅助教学. 每章的习题分为两类，(一)是基本题目，(二)是难度较高的题目. 书后附有习题的答案与概念索引.

我们在选材上以基本概念与基本方法为核心，力图做到突出重点，简明扼要，清晰易懂，便于教学. 在习题的配置上，既注意基本内容的训练，又有适当的提高题.

本书可作为高等学校工科、理科（非数学专业）与经济管理学科线性代数课程的教材，课内 36～54 学时的都可选用. 也可供成人教育的广大师生和工程技术人员使用. 某些章节不同专业可根据不同情况予以取舍.

本书第一章由王纪林编写，第二、五、六章由李世栋编写，第三章由冯卫国编写，第四、七章由乐经良编写，第八章由李世栋与乐经良共同编写. 另外，黄建国提供了第八章中建筑模型的应用实例和相关数据，童品苗参与了部分原稿的计算机输入工作. 由于编者水平所限，不妥甚至谬误之处在所难免，恳请读者批

评指正.

本书的出版得到了科学出版社鼎力帮助与上海交通大学教务处与应用数学系的关心和支持，李乔、沈灏两位教授和其他一些老师对本书的编写给了许多具体的帮助，在此深表感谢.

编　者

1999 年 8 月

于上海交通大学

目　　录

第一章　行　列　式

行列式是线性代数课程的一个重要内容. 本章先介绍二阶和三阶行列式的定义及其性质，然后给出 n 阶行列式的定义，并介绍几种特殊行列式的常用计算法. 最后给出利用行列式求 n 元线性方程组唯一解的常用方法，即克拉默定理.

1.1　行列式的概念

本节先介绍二阶和三阶行列式，并用以求二元和三元线性方程组的唯一解. 然后利用排列的逆序数给出 n 阶行列式的定义和基本概念.

1.1.1　二阶和三阶行列式的概念

定义 1.1　以数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 为元素的二阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.1}$$

简记为 $D = |a_{ij}|_2$. 其中，a_{ij} 称为行列式的 (i,j) **元素**，即该元素位于行列式的第 i 行和第 j 列的交汇处. i 和 j 常分别称为元素 a_{ij} 的**行下标**和**列下标**.

例如，元素 a_{21} 位于行列式 $|a_{ij}|_2$ 的第 2 行和第 1 列的交汇处.

例 1.1　计算行列式 $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$.

解　据(1.1)式，有

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 2\times 5 - (-1)\times 6 = 16.$$

□

例 1.2　已知函数 $f(x) = \begin{vmatrix} 1-x & -1 \\ 4 & 2+x \end{vmatrix}$，求 x，使得 $f(x)=0$.

解　因为

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1-x & -1 \\ 4 & 2+x \end{vmatrix} = (1-x)(2+x) - (-1)\times 4 = -x^2 - x + 6,$$

$f(x)=0$，即 $-x^2-x+6 = -(x+3)(x-2) = 0$，得 $x=-3$ 或 2.

例 1.3　设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. & (2) \end{cases} \tag{1.2}$$

试问:在什么条件下,线性方程组(1.2)有唯一解.

解　在方程(1)的两端同时乘以 a_{22},在方程(2)的两端同时乘以 a_{12},然后将所得两式相减,即 $a_{22}(1)-a_{12}(2)$,得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2.$$

由此可知,当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,有

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

同理可得,当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,有

$$x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$ □

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

称 D 为线性方程组(1.2)的系数行列式.

以上结论可以表述为:

当线性方程组(1.2)的系数行列式 $D\neq 0$ 时,有唯一解,且其解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\qquad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

例 1.4　设二元线性方程组为

$$\begin{cases} 3x_1-4x_2=5, \\ kx_1+2x_2=-3. \end{cases}$$

试问:常数 k 为何值时有唯一解,并求此解.

解　因为其系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ k & 2 \end{vmatrix}=6+4k,$$

所以,当 $k\neq -\dfrac{3}{2}$ 时 $D\neq 0$,此时方程组有唯一解. 又

$$D_1=\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=-2,\quad D_2=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ k & -3 \end{vmatrix}=-9-5k.$$

其唯一解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{1}{3+2k},\qquad x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{9+5k}{6+4k}.$$ □

定义 1.2　以数 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 为元素的三阶行列式为

$$D=|a_{ij}|_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{1.3}$$

三阶行列式也可按以下**对角线展开法**计算

$$|a_{ij}|_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.4}$$

称元素 a_{11},a_{22},a_{33} 为行列式 $D=|a_{ij}|_3$ 的**主对角线元素**，称 a_{13},a_{22},a_{31} 为行列式 $D=|a_{ij}|_3$ 的**次对角线元素**.

例 1.5 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix}$.

解 由(1.3)式得

$$\begin{aligned} D&=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} \\ &=1\times\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}-2\times\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}+(-4)\times\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \\ &=1\times 0-2\times 1+(-4)\times 2=-10. \end{aligned}$$

或由(1.4)式得

$$\begin{aligned} D&=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} \\ &=1\times 2\times(-2)+2\times 1\times 3+(-4)\times(-2)\times(-4)-(-4)\times 2\times 3 \\ &\quad -2\times(-2)\times(-2)-1\times 1\times(-4)=-10. \end{aligned}$$ □

类似于例 1.4 的讨论，对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \tag{1.5}$$

有类似结论：

当方程组(1.5)的系数行列式 $D\neq 0$ 时，有唯一解. 其解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\qquad x_2=\frac{D_2}{D},\qquad x_3=\frac{D_3}{D}, \tag{1.6}$$

其中,

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

例 1.6　设三元线性方程组为

$$\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=1, \\ -2x_1+2x_2+x_3=0, \\ 3x_1-4x_2-2x_3=1. \end{cases}$$

试问:此方程组是否有唯一解?若有,求出其唯一解.

解　方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix}=-10\neq 0,$$

所以此方程组有唯一解,行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \end{vmatrix}=10, \quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=6, \quad D_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}=8.$$

因此,由(1.6)式可得其唯一解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-1, \qquad x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{3}{5}, \qquad x_3=\frac{D_3}{D}=-\frac{4}{5}. \qquad \square$$

1.1.2　*n* 阶排列的逆序数

我们将用 n 阶排列的逆序数给出 n 阶行列式的定义,因此先介绍 n 阶排列及其逆序数的概念.

在这里,n **阶排列**是指由 n 个有序的数($n\geqslant 2$)构成的排列.记作 $i_1,i_2,\cdots,i_n$,其中 $i_j(j=1,2,\cdots,n)$表示排列中的第 j 个数.易知,共有 $n!$ 个不同的 n 阶排列.

在 n 阶行列式定义中将要用到的是 $1,2,\cdots,n(n\geqslant 2)$这 n 个数构成的 n 阶排列.

定义 1.3　在一个 n 阶排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 中,按照在排列中的次序,任取其中的两个数,记作(i_j,i_k),其中 $j<k$,称为排列的一个**数对**.如果在数对(i_j,i_k)中 $i_j<i_k$,则称其为排列的一个**顺序**.如果在数对(i_j,i_k)中 $i_j>i_k$,则称其为排列的一个**逆序**.排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 中逆序的个数称为该排列的**逆序数**,记作

$$\tau(i_1, i_2, \cdots, i_n) \quad 或 \quad \tau(i_1 i_2 \cdots i_n).$$

易知,在一个 n 阶排列中,共有 $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ 个不同的数对. 若 $\tau(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 是偶数,则称排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 为**偶排列**,否则称其为**奇排列**.

例 1.7 试求以下排列的逆序数:

(1) 23541; (2) 32541;

(3) $12\cdots(n-1)n$; (4) $n(n-1)\cdots21$.

解 (1) 在排列 23541 中有逆序(2.1),(3.1),(5.4),(5.1),(4.1),所以

$$\tau(23541)=5.$$

因此排列 23541 是奇排列.

(2) 在排列 32541 中有逆序(3.2),(3.1),(2.1),(5.4),(5.1),(4.1),所以

$$\tau(32541)=6.$$

因此排列 32541 是偶排列.

(3) 在排列 $12\cdots(n-1)n$ 中没有逆序,所以

$$\tau(12\cdots(n-1)n)=0.$$

因此排列 $12\cdots(n-1)n$ 是偶排列. 常称其为**自然排列**.

(4) 在排列 $n(n-1)\cdots21$ 中的每一个数对都是逆序,所以

$$\tau(n(n-1)\cdots21)=C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}.$$

可见,当 $n(n-1)\cdots21$ 为偶排列时,$n(n-1)$ 是 4 的倍数. 因此,当 $n=4k$ 或 $n=4k+1(k=1,2,\cdots)$ 时排列 $n(n-1)\cdots21$ 是偶排列,当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3(k=1,2,\cdots)$ 时排列 $n(n-1)\cdots21$ 是奇排列. □

在一个 n 阶排列中,交换其中某两个数的位置,而其余各数的位置保持不变,就得到了另一个排列. 对排列进行一次这种操作,称为对此排列作了一次**对换**. 在例 1.7 中,排列(2)就是排列(1)经一次对换得到的,它们的奇偶性是不同的. 一般我们有以下结论.

定理 1.1 对换改变排列的奇偶性. 即对奇排列作一次对换,所得的排列是偶排列,而对偶排列作一次对换,所得的排列是奇排列.

证 先考虑相邻两数的对换. 设排列为

$$i_1 i_2 \cdots i_s a b j_1 j_2 \cdots j_t,$$

交换其中 a,b 两个数的位置,得排列

$$i_1 i_2 \cdots i_s b a j_1 j_2 \cdots j_t.$$

在这两个排列中,除了数对 (a,b) 与 (b,a) 以外,其他数对都是相同的. 所以当 $a<b$ 时,有

$$\tau(i_1 i_2 \cdots i_s b a j_1 j_2 \cdots j_t)=\tau(i_1 i_2 \cdots i_s a b j_1 j_2 \cdots j_t)+1;$$

而当 $a>b$ 时有

$$\tau(i_1i_2\cdots i_sbaj_1j_2\cdots j_t)=\tau(i_1i_2\cdots i_sabj_1j_2\cdots j_t)-1;$$

因此它们的奇偶性是不同的.

再考虑不相邻两数的对换. 设排列为

$$i_1i_2\cdots i_sak_1k_2\cdots k_rbj_1j_2\cdots j_t, \tag{1.7}$$

交换其中 a,b 两个数的位置,得排列

$$i_1i_2\cdots i_sbk_1k_2\cdots k_raj_1j_2\cdots j_t, \tag{1.8}$$

其中 $r\geqslant 1$. 为了讨论它们的奇偶性,我们先在(1.7)式中将数 a 依次与其右边相邻的数作 r 次对换,得排列

$$i_1i_2\cdots i_sk_1k_2\cdots k_rabj_1j_2\cdots j_t.$$

然后,在所得的排列中,将数 b 依次与其左边相邻的数作 $r+1$ 次对换,得排列(1.8)式. 所以(1.8)式可视为由(1.7)式作了 $2r+1$ 次相邻两数的对换得到的. 由前面的讨论知,排列(1.8)的奇偶性是排列(1.7)改变了 $2r+1$ 次奇偶性得到的. 因此它们的奇偶性是不同的. □

推论 1.1 在 $n!$ 个不同的 n 阶排列中,奇偶排列各占一半.

证 假设在 $n!$ 个不同的 n 阶排列中,奇排列有 s 个,偶排列有 t 个. 我们对这 s 个奇排列作最左边两个数的对换,则所得的 s 个排列都是偶排列. 因此,偶排列至少有 s 个,故 $s\leqslant t$. 同理可得 $s\geqslant t$. 所以 $s=t$. 即奇偶排列各占一半. □

1.1.3 n 阶行列式的概念

在三阶行列式(1.4)式的展开式中可见,共有 $3!=6$ 项,其中每项由行列式 $|a_{ij}|_3$ 中 3 个数的乘积构成. 它们的行下标都是排列 123,而它们的列下标正好是 1,2,3 这 3 个数构成的所有不同的排列. 如果记 $\sum\limits_{(j_1j_2j_3)}$ 为对 1,2,3 这 3 个数构成的所有不同排列求和,则行列式(1.4)可表示为

$$|a_{ij}|_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2j_3)}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}.$$

一般地,定义 n 阶($n\geqslant 2$)行列式如下.

定义 1.4 由 n^2 个元素构成的 n 阶行列式为

$$|a_{ij}|_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中 $\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}$ 是对 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数构成的所有不同排列的求和.

约定,一阶行列式就是1个元素,即式$|a_{11}|_1=a_{11}$.

由定义可见,n阶行列式的展开式共有$n!$项,各项的一般表达式为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

其由取自于行列式$|a_{ij}|_n$中第$1,2,\cdots,n$行和第$j_1,j_2,\cdots,j_n$列的n个元素相乘构成,它们分别属于$|a_{ij}|_n$不同的行和不同的列.各项的正负号由其列下标的排列$j_1,j_2,\cdots,j_n$的奇偶性确定,即当$j_1,j_2,\cdots,j_n$为奇排列时,该项是负的.否则该项是正的.

由推论1.1知,n阶行列式展开式共有$n!$项,正负项的项数是相同的,各有$\frac{n!}{2}$项.

例1.8 试用定义计算行列式

$$D=|a_{ij}|_4=\begin{vmatrix}0&4&0&0\\0&-1&0&3\\2&5&0&8\\-2&3&1&6\end{vmatrix}.$$

解 由定义知,D的展开式共有24项.其展开式中的一般项为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4},$$

其中元素a_{1j_1}取自D的第一行.当$j_1\neq2$时$a_{1j_1}=0$,此时该项为零.只有$j_1=2$时,$a_{1j}=a_{12}=4\neq0$.故D的展开式中不为零的项必具有形式$(-1)^{\tau(2j_2j_3j_4)}a_{12}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$,其中$j_2j_3j_4$是134的一个排列.再看元素$a_{2j_2}$,它取自$D$的第二行,且$j_2\neq2$.只有$j_2=4$时,$a_{2j_2}=a_{24}=3\neq0$.因此$D$的展开式中不为零的项必具有形式$(-1)^{\tau(24j_3j_4)}a_{12}a_{24}a_{3j_3}a_{4j_4}$,其中$j_3j_4$是13的排列.依次可知,$D$的展开式中不为零的项只有一项

$$(-1)^{\tau(2413)}a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}=(-1)^3\times4\times3\times2\times1=-24,$$

所以$D=-24$. □

例1.9 试用定义计算n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1,n-1}&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2,n-1}&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{n-1,n-1}&a_{n-1,n}\\0&0&\cdots&0&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

解 在这个行列式中,当$i>j$时,有$a_{ij}=0$.即D主对角线下方的元素都为零.称这种行列式为**上三角行列式**.

由行列式的定义知,D的展开式共有$n!$项.其展开式中的一般项为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_{n-1}j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1,j_{n-1}}a_{nj_n},$$

其中元素 a_{nj_n} 取自 D 的第 n 行. 当 $j_n<n$ 时 $a_{nj_n}=0$,此时该项为零. 因此在其余的项中必有 $a_{nj_n}=a_{nn}$. 而元素 $a_{n-1,j_{n-1}}$ 取自 D 的第 $n-1$ 行,在 D 的展开式里含 a_{nn} 的项中 $j_{n-1}\neq n$,而当 $j_{n-1}<n-1$ 时 $a_{n-1,j_{n-1}}=0$,此时该项为零. 因此在其余项中必有 $a_{n-1,j_{n-1}}=a_{n-1,n-1}$. 依次可知,在 D 的展开式中,除了

$$(-1)^{\tau(12\cdots(n-1)n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}$$

外,其余各项都为零,所以

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}.$$ □

由例 1.9 可得,上三角形行列式等于其主对角线上 n 个元素的乘积. 例如

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=1\times2\times3\times4=24.$$

如果在 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|_n$ 中,当 $i<j$ 时,有 $a_{ij}=0$,即 D 主对角线上方的元素都为零,称这种行列式为**下三角行列式**. 如果在 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|_n$ 中,当 $i\neq j$ 时,有 $a_{ij}=0$,即 D 中除了主对角线上的元素以外,其余元素都为零,称这种行列式为**对角行列式**. 不难推得,下三角行列式和对角行列式也都等于其主对角线上 n 个元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}.$$

例 1.10 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 这种行列式不同于下三角行列式,其在次对角线上方的元素都为零. 由行