LISAN SHUXUE

离散数学

张 莹 孙 晶 编著

東北大學出版社
Northeastern University Press

离散数学

张莹 孙晶 编著

东北大学出版社
·沈阳·

图书在版编目（CIP）数据

离散数学 / 张莹，孙晶编著. —沈阳：东北大学出版社，2014. 2
ISBN 978-7-5517-0539-4

Ⅰ. ①离… Ⅱ. ①张… ②孙… Ⅲ. ①离散数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 012359 号

内容简介

离散数学是计算机科学相关专业重要的专业基础课程，是计算机专业，信息相关专业，计算机系统软、硬件开发专业以及数学与应用数学专业，数学建模，工程，管理，金融等专业不可缺少的基础知识. 本书适合高等院校相关各专业作为离散数学课程的基本教材和参考书.

全书共分六章. 分别介绍集合论、关系与函数、代数系统、命题逻辑、谓词逻辑和图论六部分内容. 本书内容叙述严谨，推演详尽，深入浅出，通俗易懂，大部分概念都用详细的实例说明并配有习题.

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部） 83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部） 83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress. com
网址：http：//www. neupress. com
印 刷 者：沈阳航空发动机研究所印刷厂
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：185mm × 260mm
印 张：11. 5
字 数：316 千字
出版时间：2014 年 2 月第 1 版
印刷时间：2014 年 2 月第 1 次印刷
责任编辑：刘乃义
责任校对：文 浩
封面设计：刘江旸
责任出版：唐敏智

ISBN 978-7-5517-0539-4 定 价：29. 00 元

前 言

离散数学作为计算机科学的基础学科的一个标志，是现代数学中的一门重要学科，主要以研究离散量为主，是研究离散量的结构及相互关系的学科. 随着计算机的发明和发展，离散数学变得越来越重要，它在可计算性与计算复杂性理论、算法与数据结构、程序设计语言、数值与符号计算、操作系统、软件工程、数据库与信息检索系统、人工智能与机器人、网络、计算机图形学以及人机通信、管理、金融、工程等各个领域，都有着广泛的应用.

作为一门重要的专业基础课，通过离散数学的教学，不仅能为学生的专业课学习及将来所从事的软、硬件开发和应用研究打下坚实的基础，同时也能培养他们抽象思维和严格的逻辑推理能力.

本书包括集合论、关系与函数、代数系统、命题逻辑与谓词逻辑、图论等几部分内容.

集合论是数学的基础，现代集合论以公理为基础，讨论集合的理论和性质. 关系是一种特殊的集合，主要介绍关系的性质与运算、等价关系、序关系、函数等内容.

命题逻辑和谓词逻辑是数理逻辑的两个重要组成部分. 数理逻辑是用数学的方法研究数学推理和数学性质，也就是引进一些符号，用符号的方法来演绎推理规律，所以也称为符号逻辑.

代数系统也称代数结构或近世代数，是代数学中研究的重要对象，是抽象的代数学，所以也称为抽象代数. 它是对“不相关的代数”抽象出共同的性质，即它们是由一些元素组成的集合，它们满足一个或几个运算，运算的结果仍然在此集合中. 在研究时，不考虑元素具体是什么，只考虑元素和结构的性质.

图论从 18 世纪产生到现在，一直被其他应用科学所重视，有很多脍炙人口的典型数学模型和数学应用. 随着计算机的发展，这个学科有了更大的应用空间.

离散数学这个古老而又年轻的学科，目前还在不断地丰富和发展. 随着我国高等教育逐渐转化为大众教育，为方便初学者，本书内容深入浅出，通俗易懂，大部分概念都用详细的实例加以说明. 本书可以作为高等院校的教科书和参考书，也可供学生及相关人员自学使用.

本书在编写过程中，得到了多位教授和相关教师的大力支持，在此深表感谢.

作 者

2013 年 7 月于沈阳大学

目 录

第1章 集合论

集合论的创立到公理化系统集合论的过程,使集合论在数学发展史中产生了巨大的作用.集合论的产生与完备过程,集合论的思维方式对传统思维模式的超越,集合论中悖论的出现及解决,开辟了现代数学发展的道路,成为现代数学大厦的基础.

我们原本生活在一个无穷的世界里,但我们的认识往往要从有限开始. 无穷的世界里有着我们在有限的思维方式下认为不可思议的问题. 例如:"从地球到月球的线段和一厘米长线段上的点一样多."您会相信吗?发现它并揭示其中奥秘的是20世纪初伟大的德国数学家、集合论的创始人——奥格尔·康托尔(1845—1909). 他的理论把人们从有限带进了无穷,把近代数学推向了现代数学. 到了19世纪末,康托尔才开始揭示其中的奥秘:自然数的集合与正整数的集合一样大,而实数的集合不与正整数的集合一样大. 在1874年至1909年的30多年间,他系统地建立了关于无穷集合的理论,创立了超穷序数、基数新概念,并把近代的超穷基数赋予可数集,给连续系统更高的超穷数,还建立了一整套有关的基本定理. 1901年勒贝格以测度论充实了集合论,康托尔的集合论到了20世纪初为人们所接受.

集合论中的矛盾由数学家借一个乡村理发师的典故揭示出来. 一个乡村只有一名理发师,乡村规定称:"凡是自己不能给自己理发的人,必须由理发师来理."但问题出来了,理发师的头发由谁来理?要是他自己不给自己理发,那么按照乡村规定,他必须到理发师那里让理发师给他理发,但是他自己就是理发师;要是他自己给自己理发,那么按照乡村规定,他就不应该到理发师处理发,而他自己就是理发师;于是这个理发师陷入了逻辑的矛盾中. 这个逻辑矛盾涉及了集合的概念、元素、属于,在当时产生了极大的震动. 这就是著名的罗素悖论.

在集合论产生与发展的整个过程中,许多数学家与哲学家从事了集合论的研究工作,并取得了令人振奋的成就,策墨罗和弗郎克尔通过对康托尔朴素集合论的研究,提出了ZF公理系统,把集合论建立在一系列公理系统上,使朴素集合论完善为公理化集合论. 它克服了康托尔朴素集合论引起的一些矛盾,推动了集合论的发展. 后来在1937年至1954年间,建立了集合论的另一个公理系统,简称VNB系统. 在1940年的专著《选择公理、广义连续系统假设与集合公理的协调性》中使用了VNB系统,将集合建立在一系列公理系统上,使朴素集合论发展为公理的集合论,克服了康托尔在集合论上引起的矛盾,推动了集合论的发展.

20世纪数学的进展可以说是显著的,集合论在所谓代数学的发展中起过不小的作用,事实上是现代数学各个分支的基础,集合论中悖论的出现还帮助了通常称为数学基础的这一数学领域的发展. 从更直接的观点来看,几乎所有的数学分支都是研究某类东西的集合.

集合作为离散结构的一个有力的描述工具被广泛地应用到计算机科学、运筹学、信息科学及系统科学、人工智能、经济学、语言学和心理学等方面. 目前,集合的概念在现实世界中有着广泛的背景与前景.

集合的概念是一般数学及离散数学中的基本概念,也是计算机科学中经常应用的基本概念. 集合论还能直接应用到计算机学科各部分中去,如程序语言、数据结构的研究等.

本章介绍集合论的基础知识.

1.1 集合的基本概念

集合是数学中的基本概念，通常无法对集合下一个确切的定义，正像在几何中无法定义点、直线、平面一样. 集合是一个不能精确定义的基本概念. 因此，下面仅对它进行一些描述.

1.1.1 集合的概念与表示法

通常把一些不同的确定的具有同一特性的对象的全体，称为集合. 而这些对象称为集合的元素. 由此可见，集合是由元素组成的. 元素与集合一样，也是无法定义的. 它可以理解为存在于世上的客观物体，当然，这些物体可以是具体的也可以是抽象的. 一般地说，把具有共同性质的一些东西汇集成一个整体，就形成一个集合.

例如：人、花、地球、原子、三角形、实数、字母、教室内的桌椅、图书馆的藏书、全国的高等学校、自然数的全体、直线上的点，等等，均分别构成集合.

通常用大写英文字母 $A,B,C,D,\cdots,X,Y,Z$ 表示集合，用小写英文字母 $a,b,c,d,\cdots,x,y,z$ 表示组成集合的元素.

若 a 是集合 A 的元素，记做 $a\in A$，称作 a 属于 A.

若 a 不是集合 A 的元素，记做 $a\notin A$，称作 a 不属于 A，或 a 不是 A 的成员.

集合的表示方法有两种：一种是将某集合的元素列举出来，称作列举法.

【例 1-1】 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，$C=\{$桌子，灯泡，自然数，老虎$\}$，$D=\{2,4,6\}$.

另一种是利用一项规则或一种性质，以便确定某一物体是否属于该集合，称作叙述法.

【例 1-2】 $A=\{a\mid a$ 是正数$\}$，$B=\{b\mid b$ 是中国的河流$\}$，$C=\{c\mid c$ 是大学生或中学生$\}$.

1.1.2 集合论的公理系统

公理化集合论是依靠下列公理来建立公理系统的.

(1) 外延公理：集合 A,B 相等当且仅当集合 A,B 的所有元素都相同.

(2) 空集公理：存在没有任何元素的集合，叫空集. 记作$\varnothing$.

(3) 对偶公理：设两个对象 x_1,x_2，存在着以 x_1,x_2 为元素的集合.

(4) 并集公理：任给集合 X,Y，则存在集合 Z，使得集合 Z 以 X,Y 的元素为元素.

(5) 幂集公理：存在以集合 X 的所有子集为元素的集合 Y. 记做 $P(X)$ 或 2^X.

(6) 替换公理：设 $\Phi(x,y)$ 是函数，则对任一集合 A，对 $x\in A$，存在集合 B，使 B 的元素 y 是 x 关于函数 $\Phi(x,y)$ 的象.

(7) 无穷公理：存在一个含有空集$\varnothing$和它本身元素的后继者的集合(存在着无穷集).

(8) 正则公理：对每一非空集合 X，存在一个元素 y，使得 y 与 X 无公共元素.

(9) 选择公理：设 X 是非空集合，且 X 的元素两两无交，则存在集合 C，使得 C 与 X 的每

一元素之交为独点集.

为了通俗起见,下面给出的是各公理的等价概念.

1.1.3 集合相等与包含

我们知道,集合中的每个元素均不相同,由外延公理知,如果有两个集合元素完全相同,这时称这两个集合相等.

定义 1.1.1 设 A,B 是两个集合,若 A 的元素与 B 的元素相同,则称集合 A,B 相等. 记做:$A=B$.

定义 1.1.2 设 A,B 是两个集合,若 A 的元素都是 B 的元素,即若 $x\in A$,则有 $x\in B$,则称集合 B 包含集合 A,或集合 A 包含于集合 B. 记做: $A\subseteq B, B\supseteq A$.

这时,集合 A 称为集合 B 的子集.

定理 1.1.1 设 A,B 是两个集合,若 $A\supseteq B$ 且 $A\subseteq B$,则 $A=B$.

【证明】 $\forall x\in B$,由于 $B\subseteq A$,则有 $x\in A$,即 B 的元素都是 A 的元素;反之,$\forall x\in A$,由于 $A\subseteq B$,则有 $x\in B$,即 A 的元素都是 B 的元素. 综上所述,有 $A=B$.

定义 1.1.3 设 A,B 是两个集合,若 $A\supseteq B$ 且 $A\neq B$,则称 B 是 A 的真子集. 记做: $B\subset A$ 或 $A\supset B$.

例如:$\{1,2,4\}\subset\{1,2,3,4\}$,$\{\{a\},\{c\}\}\subset\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\}$.

1.1.4 空集与全集

定义 1.1.4 没有任何元素的集合,称为空集. 记做:$\varnothing$.

定理 1.1.2 任何集合都包含空集.

定义 1.1.5 所有的元素构成的集合,称为全集,或基础集. 记做:E 或 X.

对于集合的相等与包含等关系,可用文氏图表示,文氏图在表示集合中的关系和以后学习的集合运算时,较为直观、形象,故目前被广泛地应用在集合论中. 在文氏图中用一个平面中的区域表示一个全集,而对包含于全集内的集合用平面区域内的圆圈表示. 这样,全集内的集合间关系就可用平面区域内圆之间的关系表示. 对于相等、包含等关系可以很形象地用文氏图表示.

【例 1-3】 图 1.1.1 是集合 B 包含 $A(A\subseteq B)$ 的文氏图;

图 1.1.2 是集合 A 等于 $B(A=B)$ 的文氏图.

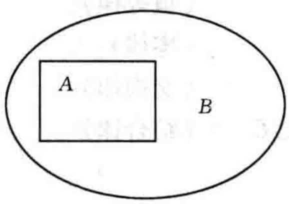

图 1.1.1

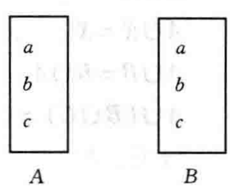

图 1.1.2

1.1.5 无限集与幂集

定义 1.1.6 若集合 A 是由有限个元素组成的,则 A 称做有限集;否则,就称做无限集.

【例1-4】 $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$是一个有限集. 全体自然数构成的集合是无限集.

定义1.1.7 设A是集合,则A的所有子集构成的集合,称为A的幂集. 记做:2^A或$P(A)$.

【例1-5】 $A=\{a,b\}$,则A的幂集$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$;

$B=\{\varnothing\}$,则$P(B)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.

定理1.1.3 设集合$A=\{1,2,3,\cdots,n\}$,则A的幂集2^A有2^n个元素.

【证明】 A的子集有:

空集$\varnothing$……一个,即C_n^0;

单点集……n个,即C_n^1;

二点集……C_n^2个;

………

A的所有元素构成的子集A……一个,即C_n^n.

A的所有子集的个数为:$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k$.

因为$(x+y)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k x^k y^{n-k}$,令$x=y=1$,则有

$$2^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k 1^k 1^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k.$$

所以2^A有2^n个元素.

1.2 集合的运算

1.2.1 集合的并集

定义1.2.1 设A,B是集合,通常把属于A或者属于B的元素x构成的集合,称为集合A,B的并集. 记做$A\cup B$,读做A并B. 即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

定理1.2.1 设A,B,C是集合,X是全集,则有

$A\cup A=A$ (幂等律)

$A\cup\varnothing=A$ (恒等律)

$A\cup X=X$ (零律)

$A\cup B=B\cup A$ (交换律)

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ (结合律)

1.2.2 集合的交集

定义1.2.2 设A,B是集合,通常把属于A而且属于B的元素x构成的集合,称为集合A,B的交集. 记做$A\cap B$,读做A交B. 即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}.$$

定理1.2.2 设A,B,C是集合,X是全集,则有

$$A\cap A=A \qquad \text{(幂等律)}$$
$$A\cap\varnothing=\varnothing \qquad \text{(零律)}$$
$$A\cap X=A \qquad \text{(恒等律)}$$
$$A\cap B=B\cap A \qquad \text{(交换律)}$$
$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C \qquad \text{(结合律)}$$

1.2.3 集合的补集

定义 1.2.3 设 A,B 是集合,通常把属于 A 而且不属于 B 的元素 x 构成的集合,称为集合 B 关于集合 A 的补集,或称为集合 A 与 B 的差集. 记做 $A\sim B$ 或 $A-B$,读做 A 减 B. 即

$$A\sim B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

定理 1.2.3 设 A,B 是集合,则有

$$A\sim A=\varnothing \qquad \text{(零律)}$$
$$A\sim\varnothing=A \qquad \text{(恒等律)}$$
$$A\sim B=A\cap(\sim B)$$

定义 1.2.4 设 A 是集合,X 是全集,把 $X\sim A$ 称为集合 A 关于全集的补集,简称 A 的补集. 记做 $X\sim A$ 或 $X-A$ 或 $\sim A$,读做 X 减 A. 即

$$\sim A=X\sim A=\{x\mid x\notin A\}=\{x\mid x\notin A \text{ 且 } x\in X\}.$$

定理 1.2.4 设 A 是集合,X 是全集,则有

$$\sim(\sim A)=A \qquad \text{(否定律)}$$
$$\sim\varnothing=X \qquad \text{(补律)}$$
$$\sim X=\varnothing \qquad \text{(补律)}$$
$$A\cap(\sim A)=\varnothing \qquad \text{(补律)}$$
$$A\cup(\sim A)=X \qquad \text{(补律)}$$

1.2.4 集合的对称差集

定义 1.2.5 设 A,B 是集合,把

$$(A\sim B)\cup(B\sim A)=\{x\mid (x\in A \text{ 但 } x\notin B)\text{或}(x\in B \text{ 但 } x\notin A)\}$$

称为集合 A,B 的对称差集. 记做 $A\oplus B$,读做 A,B 的对称差.

定理 1.2.5 设 A,B,C 是集合,X 是全集,则有

$$A\oplus A=\varnothing$$
$$A\oplus\varnothing=A$$
$$A\oplus(\sim A)=X$$
$$A\oplus B=B\oplus A \qquad \text{(交换律)}$$
$$A\oplus(B\oplus C)=(A\oplus B)\oplus C \qquad \text{(结合律)}$$

【例 1-6】 $X=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,$A=\{1,2,3,4,5,6\}$,$B=\{4,5,8,9\}$.

求 $A\cup B$,$A\cap B$,$A\sim B$,$\sim A$,$A\oplus B$.

【解】 $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,8,9\}$;

$A\cap B=\{4,5\}$;

$A\sim B=\{1,2,3,6\}$;

$\sim A=\{7,8,9\}$;

$$\begin{aligned}A\oplus B&=(A\sim B)\cup(B\sim A)\\&=\{1,2,3,6\}\cup\{8,9\}\\&=\{1,2,3,6,8,9\}.\end{aligned}$$

定理 1.2.6 设 A,B,C 是集合,则有

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\qquad(\text{分配律})$$
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)\qquad(\text{分配律})$$
$$A\cap(B\sim C)=(A\cap B)\sim(A\cap C)\qquad(\text{分配律})$$
$$A\sim(B\cap C)=(A\sim B)\cup(A\sim C)\qquad(\text{分配律})$$
$$A\cap(A\cup B)=A\qquad(\text{吸收律})$$
$$A\cup(A\cap B)=A\qquad(\text{吸收律})$$
$$\sim(A\cap B)=(\sim A)\cup(\sim B)\qquad(\text{迪摩根律})$$
$$\sim(A\cup B)=(\sim A)\cap(\sim B)\qquad(\text{迪摩根律})$$

定理 1.2.7 设 A,B 是集合,则有

(1) $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$;

(2) $A\cap B\subseteq B\subseteq A\cup B$.

定理 1.2.8 设 A,B,C 是集合,则有下列命题等价:

(1) $A\subseteq B$;

(2) $A=A\cap B$;

(3) $B=A\cup B$;

(4) $\sim B\subseteq\sim A$;

(5) $B=A\cup(B\sim A)$.

定理 1.2.9 设 A,B 是集合,若 $A\subseteq B$,则有

(1) $(A\cap C)\subseteq(B\cap C)$;

(2) $(A\cup C)\subseteq(B\cup C)$.

以上定理的证明,只需要用集合论的一般证明(如定理 1.1.1 的证明方法)即可.

1.3 集合的笛卡儿积

为了引进笛卡儿积,由对偶公理可以得到定义 1.3.1.

定义 1.3.1 通常把由元素 a,b 组成的新的元素 (a,b) 称为序偶,a 称为第一元素,b 称为第二元素. 两个序偶 $(a,b)=(c,d)$ 相等的充要条件是 $a=c$ 且 $b=d$.

【例 1-7】 例如 (x,y),$((a,b),b)$ 都是序偶.

定义 1.3.2 设 A,B 是集合,通常把集合 $\{(x,y):x\in A$ 且 $y\in B\}$ 称为集合 A,B 的笛卡儿积. 记做:$A\times B$. A 称为第一坐标集,B 称为第二坐标集.

定义 1.3.3 设 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$ 是集合,通常把集合

$$\{(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n):x_i\in A_i,i=1,2,3,\cdots,n\}$$

称为集合 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$ 的笛卡儿积. 记做 $A_1\times A_2\times A_3\times\cdots\times A_n$.

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_n,$$

A_i 称为第 i 坐标集.

特别有 $A^n = \underbrace{A \times A \times A \times \cdots \times A}_{n}$.

在一般情况下,由上述定义有

$$A \times B \neq B \times A;$$
$$A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C;$$

若 $A = \varnothing$或 $B = \varnothing$,则 $A \times B = \varnothing$.

【例 1-8】 设 $X = \{1,2,3\}, Y = \{a,b,c\}$.

求:$X \times Y$, $Y \times X, X \times X, Y \times Y, (Y \times X) \times Y, (X \times X) \times Y$.

【解】 $X \times Y = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c),(3,a),(3,b),(3,c)\}$,

$(Y \times X) \times Y = \{((a,1),a), ((a,2),a),((a,3),a),((b,1),a), ((b,2),a),$
$((b,3),a),((c,1),a),((c,2),a),((c,3),a),((a,1),b),((a,2),b),$
$((a,3),b),((b,1),b), ((b,2),b),((b,3),b),((c,1),b),((c,2),b),$
$((c,3),b),((a,1),c), ((a,2),c),((a,3),c),((b,1),c), ((b,2),c),$
$((b,3),c),((c,1),c),((c,2),c),((c,3),c)\}$.

其余类似.

定理 1.3.1 设 A,B,C 是集合,则

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C);$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C);$$
$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C);$$
$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C).$$

定理 1.3.2 设 A,B,C,D 是集合, 则

(1) $A \subseteq B$ 的充要条件是 $A \times C \subseteq B \times C(C \times A \subseteq C \times B)$;

(2) $A \subseteq C, B \subseteq D$ 的充要条件是 $A \times B \subseteq C \times D$.

【证明】(1) $\forall (x,y) \in A \times C \Rightarrow x \in A, y \in C \Rightarrow$(因为 $A \subseteq B$)$x \in B, y \in C \Rightarrow (x,y) \in B \times C \Rightarrow A \times C \subseteq B \times C$;

反之, $\forall x \in A \Rightarrow x \in A, y \in C \Rightarrow (x,y) \in A \times C \Rightarrow$(因为 $A \times C \subseteq B \times C$)$(x,y) \in B \times C \Rightarrow x \in B, y \in C \Rightarrow x \in B \Rightarrow A \subseteq B$.

(2) 略.

集合论习题

1-1 表示下列集合.

1. 用列举法表示下列集合:

(1) $A=\{a \mid a\in \mathbf{N}$ 且 $a<10\}$;

(2) $B=\{a \mid |a|<6$ 且 a 为偶数$\}$.

2. 用描述法表示下列集合:

(1) $A=\{0,2,4,\cdots,400\}$;

(2) $B=\{2,4,8,\cdots,1024\}$.

1-2 试判断下列各式是否正确.

1. $\{a\}\in\{\{a\}\}$.
2. $\{a\}\in\{a,\{a\}\}$.
3. $\{a\}\subseteq\{\{a\}\}$.
4. $\{a\}\subseteq\{a,\{a\}\}$.
5. $\varnothing\subseteq\{\{\varnothing\}\}$.
6. $\{\varnothing\}\in\{\{\varnothing\}\}$.
7. 如果 $A\cup B=A\cup C$,则 $B=C$.
8. 如果 $A\cap B=A\cap C$,则 $B=C$.
9. 如果 $A\sim B=A\sim C$,则 $B=C$.
10. 如果 $A\oplus B=A\oplus C$,则 $B=C$.

1-3 分别求下列集合的幂集.

1. $\{a,b\}$.
2. $\{a,b,c\}$.
3. $\{a,\{a\}\}$.
4. $\{\varnothing\}$.
5. $\{\{\varnothing\},\varnothing\}$.

1-4 设 A,B,C 是集合,证明下列各式.

1. $A\cap B\subseteq B\subseteq A\cup B$.
2. $A\cap(A\cup B)=A$.
3. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(B\cap C)$.
4. $\sim(A\cup B)=(\sim A)\cap(\sim B)$.
5. $A\cap(B\sim C)=(A\cap B)\sim(A\cap C)$.
6. $B\subseteq A\cup(B\sim A)$.
7. 证明下列命题等价:

(1) $A\subseteq B$;

(2) $A=A\cap B$;

(3) $B=A\cup B$;

(4) $\sim B \subseteq \sim A$;

(5) $B = A \cup (B \sim A)$.

8. 若 $A \subseteq B$,则有

(1) $(A \cap C) \subseteq (B \cap C)$;

(2) $(A \cup C) \subseteq (B \cup C)$.

1-5 设 $X = \{1,2\}$, $Y = \{1,2,3\}$,分别写出下列笛卡儿积.

1. $X \times Y$.
2. $Y \times X$.
3. $X \times X$.
4. $Y \times Y$.
5. $(Y \times X) \times Y$.
6. $(X \times X) \times Y$.

第2章　关系与函数

关系和函数是数学的各个分支中最基本也是最重要的两个概念,同时也广泛应用于计算机科学中.

在日常生活中,"关系"一词是我们所熟悉的,比如"夫妻关系""朋友关系""师生关系",是用来表示个体与个体之间的某种特殊联系的. 我们可以把个体之间是否存在这种特殊联系作为研究的对象. 而这种研究对象是不同的,是确定的,并且具有某一特性,因此,可以作为集合的元素. 这样构成的集合就是离散数学中要讨论的关系.

而函数是比较重要也是比较特殊的一种关系. 下面从集合论的角度来研究关系和函数.

2.1　关系的基本概念

2.1.1　关　　系

定义 2.1.1　设 X,Y 是集合,若 $R\subseteq X\times Y$,则称 R 为从 X 到 Y 的关系.

可以看出,$X\times Y$ 的任何一个子集都是关系.

【例 2-1】　若 $A\subseteq X,B\subseteq Y$,则 $A\times B\subseteq X\times Y,X\times Y\subseteq X\times Y,\varnothing\subseteq X\times Y$.

所以 $A\times B,X\times Y,\varnothing$ 都是从 X 到 Y 的关系.

定义 2.1.2　设 R 是从 X 到 Y 的关系,$x\in X,y\in Y$,若 $(x,y)\in R$,则称 x,y 关于 R 相关. 记做:xRy.

定义 2.1.3　设 R 是从 X 到 Y 的关系,$x\in X,y\in Y$,若 $(x,y)\notin R$,则称 x,y 关于 R 不相关.

定义 2.1.4　设 R 是从 X 到 Y 的关系,$x\in X,y\in Y$,则把集合

$$\{x:\exists y\in Y \text{ s. t(使得)} xRy\}$$

称为关系 R 的定义域. 记做:$\mathrm{dom}R=R_{定}=\{x:\exists y\in Y \text{ s. t } xRy\}$.

【例 2-2】　设 $X=\{1,2,3\},Y=\{4,5,6\},R=\{(1,4),(1,6),(2,5),(3,5)\}$,则

$$\mathrm{dom}R=R_{定}=\{1,2,3\}.$$

定义 2.1.5　设 R 是从 X 到 Y 的关系,$x\in X,y\in Y$,则把集合

$$\{y:\exists x\in X \text{ s. t } xRy\}$$

称为关系 R 的值域. 记做:$\mathrm{ran}R=R_{值}=\{y:\exists x\in X \text{ s. t } xRy\}$.

【例 2-3】　设 $X=\{0,1,2,3\},Y=\{4,5,6,7\},R=\{(1,4),(1,6),(2,5),(3,5)\}$,则

$$\mathrm{ran}R=R_{值}=\{4,5,6\}.$$

定义 2.1.6　设 R 是从 X 到 Y 的关系,$x\in X,y\in Y,A\subseteq X$,则把集合

$$\{y:\exists x\in A \text{ s. t } xRy\}$$

称为 A 关于关系 R 的象. 记做:$R(A)=\{y:\exists x\in A \text{ s. t } xRy\}$.

【例 2-4】 设 $X=\{0,1,2,3\}$，$Y=\{4,5,6,7\}$，$A=\{2,3\}$，$R=\{(1,4),(1,6),(2,5),(3,5)\}$，则

$$R(A)=\{5\}.$$

2.1.2 恒同关系

定义 2.1.7 设 R 是从 X 到 X 的关系，则称 R 为 X 中的关系.

【例 2-5】 设 $X=\{1,2,3,4,5,6\}$，$R=\{(1,4),(1,6),(2,5),(3,5)\}$，则 R 是 X 中的关系.

定义 2.1.8 设 I_x 是 X 中的关系，$x\in X$，则把集合 $I_x=\{(x,y):x\in X\}$ 称为 X 中的恒同关系，或对角线.

【例 2-6】 设 $X=\{1,2,3,4,5,6\}$，则

$$I_x=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$

是 X 中的恒同关系.

【例 2-7】 设 $X=\{1,2,3\}$，$Y=\{4,5,6,7\}$，$A=\{1,2\}$，且

$R_1=\{(1,4),(1,6),(2,5),(3,5)\}$，

$R_2=\{(1,4),(2,5),(2,6),(2,7)\}$，

$R_3=\{(1,5),(2,5),(3,5)\}$，

$R_4=\{(1,4),(1,6),(1,5)\}$，

$R_5=\{(1,4),(2,5),(3,6)\}$.

求：$R_i(A)(i=1,2,3,4,5)$，$\mathrm{dom}R_1$，$\mathrm{ran}R_5$.

【解】 $R_1(A)=\{4,6,5\}$，　$R_3(A)=\{5\}$，　$R_5(A)=\{4,5\}$，　$\mathrm{dom}R_1=\{1,2,3\}$，$\mathrm{ran}R_5=\{4,5,6\}$.

其余同理.

2.1.3 关系图与关系矩阵

设 $X=\{1,2,3\}$，$Y=\{4,5,6,7\}$，$R=\{(1,4),(2,5),(3,6)\}$，将集合 X,Y 的元素分别用点画出来，称为结点；若从 X 的元素到 Y 的元素间有关系，则用有向线段连接成图，称为 R 的关系图.

例如图 2.1.1 是 R 的关系图.

例如设 $X=\{1,2,3,4,5\}$，$S=\{(1,4),(2,5),(3,5)\}$，S 是 X 中的关系，则图 2.1.2 是 S 的关系图.

设 X,Y 是集合，$X=\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\}$，$Y=\{y_1,y_2,y_3,\cdots,y_m\}$，$R$ 是关系，则 R 的关系矩阵为

$$\boldsymbol{M}_R=(a_{ij})_{n\times m},\quad a_{ij}=\begin{cases}1 & (x_i,y_j)\in R,\\ 0 & (x_i,y_j)\notin R.\end{cases}$$

【例 2-8】 设 $X=\{1,2,3\}$，$Y=\{4,5,6,7\}$，$R=\{(1,4),(2,5),(3,5)\}$，求 R 的关系矩阵.

【解】

$$\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}_{3\times 4}.$$