数学分析参考资料

第二册

华南师范学院数学系函数論教研室编

一九七九年四月

目　录

目　录

Cantor与Dedekind 实数理论的等价性

§1. 引言

Cantor与Dedekind实数理论在一些大学的课本中都有详细的论述，建立实数理论的方法大体上是依据下述的步骤进行的。

i) 利用有理数集R及有理数集R的性质，定义实数。

ii) 定义二个实数的相等，大于，小于，使一致于原来有理数大小的顺序，证明实数集Z是有序的，稠密的，连续的。

iii)[注1] 建立实数的几何表示，实数的小数表示。

iv) 定义实数的算术运算，使一致于原来有理数的运算，并证明实数的运算也具有原来有理数运算的规律。

后来人们从代数观点发现到实数集Z是一个连续的有序体（或说是阿几米得式的有序完备体），于是采用公理化的形式来定义实数集，公理化形式的定义它把实数集引向到最一般而又最抽象的形式，当然从同构的观点来看，实数集还是唯一的，公理化形式的定义有几种形式。N.B. Проскуряов 著的"数与多项式"证明了它们都是等价的。

在我们的教学小组活动中，大家一致认为实数理论的教学应该使学生对大学课本中的Dedekind实数理论与中学课本中的Cantor实数理论的联系要有较深入的理解，这样才能作到教学联系中学实际。为了教学的需要，我特别把这两种理论作出比较，并证明其等价性。最后引出公理化形式的定义，再提高一步，以供今后教学的参考。虽然等价性的证明有些书上亦已提到但有的证明过于冗长，有的叙述不够全面（如没有讲到运算问题），本文的写法力求简练，凡能在一些书上找到证明的定理，只讲出处不加证明，凡不影响到文章叙述的一些必要的解释，都作为附注，以缩短正文的篇幅。

§2 Cantor 实数理论简介

方法一（单边形式）

定义 1：实数 α 是指一个形如下面的有理数列：

$\alpha_n (n=1,2,\cdots)$，其中：$\alpha_n = a_0.a_1a_2\cdots a_n = a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}$

a_0 是整数（正负或零），a_i 是 $0,1,2,\cdots 9$ 九个数字中之一。

为了方便起见用无尽小数 $a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 表示上述的有理数列，记实数 α：

$$\alpha = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$$

从近似值观点出发，每一有理数 γ 可以看作一个无尽循环小数 $a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$，反之也对，我们约定有理数 γ 与对应的无尽循环小数 $a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 是同一的。

定义 2　无尽循环小数称为有理数，无尽不循环小数称为无理数，（以后约定无尽循环小数不以零为循环节，这时实数的表示法是唯一的）

定义 3　任意二实数 $\alpha = a_0.a_1a_2\cdots a_k\cdots$，$\beta = b_0.b_1b_2\cdots b_k\cdots$ 称 α 与 β 相等是指 $a_k = b_k$，$k=0,1,2\cdots$ 记 $\alpha=\beta$

称 α 小于 β，是指 $a_0<b_0$；或存在自数 l 使

$a_i = b_i\ (0\le i<l)$，$a_l<b_l$，记 $\alpha<\beta$（α 小于 β 亦称 β 大于 α，亦可记 $\beta>\alpha$）

定理 1 [注2] 用方法一定义的实数的全体（记 Z_1），具有性质：

i）有序性：任意 $\alpha, \beta\in Z_1$，必成立且只成立三种关系 $\alpha=\beta$，$\alpha<\beta$，$\alpha>\beta$ 之一，若 $\alpha, \beta, \gamma\in Z_1$，$\alpha>\beta$，$\beta>\gamma$，则 $\alpha>\gamma$.

ii）稠密性：任意 $\alpha, \beta\in Z_1$，且设 $\alpha<\beta$，则存在 $\gamma\in R$（有理数集）使 $\alpha<\gamma<\beta$

这种用无尽小数定义实数的方法，比较直观，容易被中学生

所接受但直接在 Z_1 中定义实数的运算与通过 Z_1 中的数来描述实数集 Z_1 的连续性虽然也有办法[注3]，可是比较复杂，要克服这些缺点需要引进区间套来解决，下面叙述区间套形式的实数定义。

方法二（双边形式）

定义4　实数 α 是指一串以有理数为端点且退缩的闭区间（简称区间套）：

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

这儿注意：依区间的涵义[注4]对于任一 n 有 $a_n < b_n$.

依包含的涵义有 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots b_n \leqslant \cdots \leqslant b_2 \leqslant b_1$

退缩的意义是：对于任一正有理数 ε，可求自然数 N，使当 $n > N$ 有 $b_n - a_n < \varepsilon$

为方便起见，一串区间，简记 $[a_n | b_n]$ 于是记实数 α：$\alpha = [a_n | b_n]$.

定义5　任给二实数 $\alpha = [a_n | b_n]$，$\alpha' = [a'_n | b'_n]$

α 与 α' 相等的意义是：对于任一 n 有 $b_n \geqslant a'_n$，且 $b'_n \geqslant a_n$ 记 $\alpha = \beta$

α 小于 α' 的意义是，至少有 m 使 $b_m < a'_m$（注意这时对于任一 n 仍有 $a_n < b'_n$）记 $\alpha < \alpha'$

（α 小于 α' 亦称 α' 大于 α 亦可记 $\alpha' > \alpha$）

若 $r \in R$ 约定 $r = [r | b_n]$　其中 $a_1 = a_2 = \cdots = r$，（或 $r = [a_n | r]$）

定义6：若存在 $[r | b'_n]$ 使 $[a_n | b_n] = [r | b'_n]$ 称 $[a_n | b_n]$ 为有理数

若不存在 $[r | b'_n]$ 使 $[a_n | b_n] = [r | b'_n]$ 称 $[a_n | b_n]$ 为无理数

定理2[注5]；用方法二定义的实数的全体记 Z_2 具有性质：

i）有序性　ii）稠密性　iii）连续性：设 $[\alpha_n | \beta_n]$ 是以实数为端点的区间套，则必存在唯一的实数 γ 使 $\alpha_n \leqslant \gamma \leqslant \beta_n$

$(n = 1, 2 \cdots\cdots)$

现在定义 Z_2 中实数的四则运算及异于运算的性质

定义7[注6]：任意 $\alpha = [a_n | b_n] \in Z_2$　$\alpha' = [a'_n | b'_n] \in Z_2$

加法：$\alpha+\alpha'=[a_n+a'_n \mid b_n+b'_n]$

推论：任忌 $\alpha,\beta,\gamma\in Z_2$ 具有 $\alpha+\beta=\beta+\alpha$，$\alpha+(\beta+\gamma)=$
$=(\alpha+\beta)+\gamma$　　$\alpha+0=\alpha$，若 $\alpha>\beta$，则 $\alpha+\gamma>\beta+\gamma$

α 的异号的数：　$-\alpha=[-b_n \mid -a_n]$

推论：　具有 $-(-\alpha)=\alpha$，$\alpha+(-\alpha)=0$

减法：$\alpha-\alpha'$ 是满足条件 $x+\alpha'=\alpha$ 的数 x

推论：　容易异正 $\alpha-\alpha'=\alpha+(-\alpha')$ 且是唯一的

乘法：

$$\alpha\times\alpha'=\begin{cases}[a_n\times a'_n \mid b_n\times b'_n], & \text{当 } \alpha>0,\ \alpha'>0,\ (\text{可以认为 } a_n>0,\ a'_n>0,\ n=1,2\cdots\cdots \\ -(\alpha)\times(-\alpha'), & \text{当 } \alpha>0,\ \alpha'<0 \\ (-\alpha)\times(-\alpha'), & \text{当 } \alpha<0,\ \alpha'<0 \\ 0 & \text{当 } \alpha,\alpha' \text{ 之一为 } 0\end{cases}$$

推论：任忌 $\alpha,\beta,\gamma\in Z_2$ 具有 $\alpha\times\beta=\beta\times\alpha$，$\alpha\times(\beta\times\gamma)=$
$=(\alpha\times\beta)\times\gamma$

$\alpha\times(\beta+\gamma)=(\alpha\times\beta)+(\alpha\times\gamma)$，$\alpha\times1=\alpha$

若 $\alpha>\beta$，$\gamma>0$，则 $\alpha\times\gamma>\beta\times\gamma$

推论：（阿几米得公理）注7 若 $\alpha>0$，$\beta>0$，存在自然数 n 使 $n\alpha>\beta$

$\alpha\neq0$ 的倒数：

$$\frac{1}{\alpha}=\begin{cases}\left[\dfrac{1}{b_n} \,\middle|\, \dfrac{1}{a_n}\right], & \text{当 } \alpha>0\ (\text{可以认为任一 } a_n>0) \\ \dfrac{1}{(-\alpha)}, & \text{当 } \alpha<0\end{cases}$$

推论：具有 $\dfrac{1}{\frac{1}{\alpha}}=\alpha$，$\alpha\times\dfrac{1}{\alpha}=1$

除法：　$\alpha\div\alpha'$ 是满足条件 $x\times\alpha'=\alpha$ 的数 x

（其中 $\alpha'\neq0$）

推论：容易异正 $\alpha\div\alpha'=\alpha\times\dfrac{1}{\alpha'}$ 且是唯一的。

用区间套的方法定义实数可以证明实数集的连续性，便于定义实数的运算，有效地处理实数的近似值，再把它改变一下得正"基本有理数列"形式的实数定义用基本有理数列来定义实数，对于定义实数的运算，实数列的极限，极为方便，但本文的回的

是为了阐述 Dedekind 理论与中学课本中 Cantor 理论的关系，为了不把问题弄得过广，这儿不谈 Cantor 定义实数的方法二——用基本有理数列定义实数[注8]

Cantor 定义实数的各种方法都是用有理数列（单边形式，双边形式，或一般形式）因此用 Cantor 定义的实数研究一些理论性的问题，免不了要涉及一大堆的有理数，不如用 Dedekind 定义的实数简洁，喻如在极限论中 Cauchy 收敛原理的证明，Dedekind 的方法比较简便一些。

§3 Dedekind 实数理论简介

定义8．实数 α 是有理数集 R 的一个分割（A·B）记 $\alpha=$（A·B）（所谓 R 的一个分割（A·B）是把 R 分为二个子集 A，B 使其满足条件：

i）A．B 不空　　ii）每一 $r\in R$ 属于且只属于 A，B 之一．

iii）任意 $a\in A$，$b\in B$，有 $a<b$）

可以证明 R 的分割（A·B）有且只有三种类型：

第一类型：A 有最大的有理数，B 无最小的有理数．

第二类型：A 无最大的有理数，B 有最小的有理数

第三类型：A 无最大的有理数，B 无最小的有理数

并约定若第一类型的分割（A·B），A 中最大的有理数是 r，（或第二类的分割（A·B），B 中有最小的有理数是 r）就认为分割（A·B）与 r 是同一的．

定义9　有理数集 R 的第一第二类型分割称为有理数，第三类型分割称为无理数．

（从而约定有理数用第一类型的分割表示，则实数的表示法是唯一的）．

定义10：任意二个实数 $\alpha=(A\cdot B)$，$\alpha'=(A',B')$

称 α 与 α' 相等：是指 $A=A'$，（这时显然有 $B=B'$）记 $\alpha=\alpha'$

称 α 小于 α'：是指 $A\subset A'$，但 $A\neq A'$　记 $\alpha<\alpha'$

（α 小于 α' 亦称 α' 大于 α 亦可记 $\alpha'>\alpha$）

定理3[注9]：用 Dedekind 的方法（有理数集 R 的分割的方法）

定义的实数的全体记 Z_3 具有性质：

i）有序性；ii）稠密性；iii）连续性：实数集 Z_3 的一个分割 (X, Y) 只可能是下面两种类型：

a）X 有最大的实数，Y 无最小的实数

b）X 无最大的实数，Y 有最小的实数

之一。

现在定义 Z_3 中实数的算术运算及异号运算的性质

定义II：任意 $\alpha=(A, B)\in Z_3$　$\alpha'=(A', B')\in Z_3$

加法：$\alpha+\alpha'=(A_1, B_1)$，其中 $B_1=\{r;\ r>a+a',\ 任意\ a\in A,\ a'\in A'\}$　$A_1=C_R B_1$

α 的异号的数：$-\alpha=(-B, -A)$，其中 $-A=\{r: r=-a\ 任意\ a\in A\}$

$-B=\{r: r=-b\ 任意\ b\in B\}$

减法：$\alpha-\alpha'$ 是满足条件 $x+\alpha'=\alpha$ 的数 x

（易见 $\alpha-\alpha'=\alpha+(-\alpha')$ 且是唯一的）

乘法：

$$\alpha\times\alpha'=\begin{cases}(A_2, B_2)\ 其中\ B_2=\{r: r>a\cdot a'\ 任意\ 0<a\in A,\ 0<a'\in A'\} & 当\ \alpha>0,\ \alpha'>0\\ \qquad A_2=C_R B_2 & \\ -[\alpha\times(-\alpha')] & 当\ \alpha>0,\ \alpha'<0\\ (-\alpha)\times(-\alpha') & 当\ \alpha,\ \alpha'之一为0\\ 0 & 当\ \alpha,\ \alpha'之一为0\end{cases}$$

$\alpha\neq 0$ 的倒数

$$\frac{1}{\alpha}=\begin{cases}(B^{-1}, A^{-1})\ 其中\ B^{-1}=\{r;\ r\leq 0\ 或\ r=\frac{1}{b}\ 任意\ b\in B\} & 当\ \alpha>0\\ \qquad A^{-1}=\{r:\ r=\frac{1}{a}\ 任意\ 0<a\in A\} & \\ -\frac{1}{(-\alpha)} & 当\ \alpha<0\end{cases}$$

除法：$\alpha\div\alpha'$ 是满足条件 $x\times\alpha'=\alpha$ 的数 x（其中 $\alpha'\neq 0$）

（易见 $\alpha\div\alpha'=\alpha\times\frac{1}{\alpha'}$，且是唯一的）

运标性质同 Z_2 中运标性质这儿省略.

用分割的方法定义实数，对于研究理论性的问题有其方便之处. 但也有缺点. 比喻说这个定义要用到一些集合论知识，不容易为中学生所接受. 运标也比较抽象. 不便于实用. 例如

如果定义 $\sqrt{2}=(A_1 . B_1)$, 其中 $B_1=\{r: r>0,\ r^2>2\}$, $A_1=C_R B_1$

$\sqrt{3}=(A_2, B_2)$ 其中 $B_2=\{r: r>0, r^2>3\}$, $A_2=C_R B_2$

$\sqrt[3]{4}=(A_3 \cdot B_3)$ 其中 $B_3=\{r;\ r^3>4\}$, $A_3=C_R B_3$

依加法的定义 $\sqrt{2}+\sqrt{3}=(A . B)$ 其中 $B=\{r: r>a_1+a_2$, 任意 $a_1\in A_1,\ a_2\in A_2\}$. $A=C_R B$

这个 (A, B) 就比较抽象.

$(\sqrt{2}+\sqrt{3})\times\sqrt[3]{4}$ 将是什么呢？就更加抽象些.

然而用区间套的方法，虽然 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})\times\sqrt[3]{4}$，也要经过繁长的计标. 但从近似值观点. 可以得出满意的结果.

§4. Z_1与Z_2一一对应且具有相同的大小顺序

称 Z_1 中的实数为甲种实数. 称 Z_2 中的实数为乙种实数; 称 Z_3 中的实数为丙种实数.

定理 4 Z_1 与 Z_2 一一对应，且具有相同的大小顺序.

(Ⅰ) 有在从 Z_1 到 Z_2 的函数 φ

$$\alpha=m.c_1c_2\cdots\cdots c_n\cdots\cdots \xrightarrow{\varphi} \beta=[a_n|b_n]$$

规定 $$a_n=m+\frac{c_1}{10}+\cdots\cdots+\frac{c_n}{10^n}$$

$$b_n=m+\frac{c_1}{10}+\cdots\cdots+\frac{c_n+1}{10^n}$$

$$(n=1.\ 2\cdots\cdots)$$

显然 $[a_1, b_1]\supset[a_2, b_2]\supset\cdots\cdots\supset[a_n. b_n]\supset\cdots\cdots$ 且是退缩的.

(Ⅱ) 证明: 对于任一 $\beta=[a_n|b_n]\in Z_2$ 可找 $\alpha\in Z_1$，使 $\varphi(\alpha)=\beta$.

注意 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots\cdots<b_1$

首先把所有的有理数 a_n，在甲种实数的意义下，把它们写成无尽循环小数。

因为所有的 $a_n < b_1$，（即 a_n，$n=1,2,3\cdots\cdots$ 是有界的），仿照注3的推理。

有自然数 n_0，当 $n \geq n_0$，a_n 的整数部分都相等。

取 a_{n_0} 的整数部分 m 作为 α 的整数部分

同理有 $n_1 > n_0$，当 $n \geq n_1$，a_n 的第一位小数都相等。

取 a_{n_1} 的第一位小数 C_1 作为 α 的第一位小数

同理有 $n_2 > n_1$，当 $n \geq n_2$，a_n 的第二位小数都相等

取 a_{n_2} 的第二位小数 C_2 作为 α 的第二位小数

如此继续进行，得到甲种实数 $\alpha = m.C_1C_2\cdots\cdots C_K\cdots\cdots$（显然 $m.C_1C_2\cdots\cdots C_K\cdots\cdots$ 不以零为循环节）

设 $\varphi(\alpha) = (a'_K \mid b'_K)$

$$\because a'_K = m + \frac{C_1}{10} + \cdots\cdots + \frac{C_K}{10^K} < a_{n_K} < b_K$$

$$b'_K = m + \frac{C_1}{10} + \cdots\cdots + \frac{C_K + 1}{10^K} \geq a_{n_K} > a_K \quad (\because n_K > K)$$

上式是对于任何 K 都成立，按乙种实数相等的定义有

$$(a_K \mid b_K) = (a'_K \mid b'_K)$$

（Ⅲ）证明若 $\alpha = C_0.C_1C_2\cdots C_l\cdots C_{l+K}\cdots < C'_0.C'_1C'_2\cdots C'_l\cdots C'_{l+K} = \alpha'$

则 $\varphi(\alpha) < \varphi(\alpha')$

设 $\varphi(\alpha) = (a_n \mid b_n)$　$\varphi(\alpha') = (a'_n \mid b'_n)$

∵依甲种实数大小的定义，有自然数 l，使

$$C_K = C'_K \quad (K = 0, 1, 2, \cdots, l-1)$$

$$C_l < C'_l$$

再注意甲种实数是无尽不循环小数（即不以0为循环节），

∴有自然数 K 使 $C'_{l+K} \neq 0$

于是：$a'_{l+K} = C'_0 + \frac{C'_1}{10} + \cdots\cdots + \frac{C'_{l-1}}{10^{l-1}} + \frac{C'_l}{10^l} + \cdots\cdots + \frac{C'_{l+K}}{10^{l+K}}$

$$> C'_0 + \frac{C'_1}{10} + \cdots\cdots + \frac{C'_{l-1}}{10^{l-1}} + \frac{C'_l}{10^l}$$

$$\geqslant C_0+\frac{C_1}{10}+\cdots+\frac{C_{\ell-1}}{10^{\ell-1}}+\frac{C_{\ell+1}}{10^{\ell}}$$

$$\geqslant C_0+\frac{C_1}{10}+\cdots+\frac{C_{\ell-1}}{10^{\ell-1}}+\frac{C_\ell}{10^\ell}+\cdots+\frac{C_{\ell+K}+1}{10^{\ell+K}}=b_{\ell+K}$$

$\therefore (a'_n|b'_n) > (a_n|b_n)$

即 $\varphi(\alpha)-\varphi(\alpha')$

由（I）（II）（III）证明了 Z_1 与 Z_2 一一对应，又由（III）证明了 Z_1 与 Z_2 有相同的大小顺序

§5 Z_2 与 Z_3 一一对应，且具有相同的大小顺序

定理5：Z_2 与 Z_3 一一对应，且具有相同的大小顺序

（I'）存在从 Z_2 到 Z_3 的函数 ψ：

$$\beta=(a_n|b_n)\xrightarrow{\ \psi\ }\gamma=(A\cdot B)$$

规定 $B=\{\gamma;\ \gamma\in R,\ \gamma>a_n,\ n=1,2\cdots\}$

$A=C_R B(=\{\gamma;\ \gamma\in R,\ \text{存在}\ a_n\ \text{使}\ \gamma\leqslant a_n\})$

显然（i）$a_n\in A$，$b_n\in B$，$\therefore A,B$ 不空

（ii）自然不漏

（iii）任一 $\gamma\in A$ 依集 A 的定义存在 a_n，使 $\gamma\leqslant a_n$，但任一 $\gamma'\in B$ 有 $\gamma'>a_n$

$\therefore \gamma<\gamma'$ $\therefore$ 不乱

（II'）若 $(a_n|b_n)=(a'_n|b'_n)$ 则在规则 ψ 下有 $(A,B)=(A',B')$

证明：（i）若 $(a_n|b_n)=(a'_n|b'_n)=\gamma$（有理数）

按规则 ψ，当有理数集 $\{a_n\}$ 有最大的有理数时（显然这最大的有理数就是 γ），则 $\gamma\in A$

当有理数集 $\{a_n\}$ 无最大的有理数时，则 $\gamma\in B$。（对于 $\{a'_n\}$ 亦有同样的结论）

$\because$ 有理数集 R 的分割 (A,B) 与 (A',B') 中的 A 与 A' 至多相差一个有理数 γ，（比喻 $\gamma\in A$，$\gamma\in B'$）依约定有 $(A,B)=(A',B')=\gamma$

（ii）若 $(a_n|b_n)=(a'_n|b'_n)$ 是无理数.

这时 $\{a_n\}$，$\{a'_n\}$ 无最大的有理数，$\{b_n\}$，$\{b'_n\}$ 无最小的有理数，我们采用反证法，设 $(A,B)\neq(A',B')$，不妨设 $(A,B)<(A',B')$，依 Dedekind 实数大小的定义存在 $\gamma\in R$ 使 $\gamma\in A'$，而 $\gamma\in B$. 由 $\gamma\in A'$，依 A' 的定义存在 a'_K 使 $\gamma\leqslant a'_K$ （1）

由 $\gamma\in B$，注意 $(a_n|b_n)$ 是无理数，显然有 b_j 使 $\gamma\geqslant b_j$（否则的话对于任何 n 都有 $a_n<\gamma<b_n$ 得出 $(a_n|b_n)=(\gamma|b_n)=\gamma$，这与 $(a_n|b_n)$ 是无理数的假设矛盾）

又 $\because\{b_n\}$ 无最小的有理数 $\therefore$ 有 $b_i\ (i>j)$ 使

$$\gamma\geqslant b_j>b_i$$

注意 $(a_n|b_n)=(a'_n|b'_n)$ 的定义，及 $\gamma>b_i$ 推出：

$$\left.\begin{aligned}&\text{当 } i\geqslant K \text{ 时}\quad \gamma>b_i\geqslant a'_i\geqslant a'_K\\ &\text{当 } i<K \text{ 时}\quad \gamma>b_i\geqslant b_K\geqslant a'_K\end{aligned}\right\}\text{都有 }\gamma>a'_K \tag{2}$$

（1）与（2）矛盾：

（Ⅲ）任意 $\gamma=(A,B)\in Z_3$ 可找 $\beta\in Z_2$ 使 $\psi(\beta)=\gamma$

证明：在一 $\gamma=(A,B)$（若 γ 是有理数规定 $\gamma\in B$）

显然有整数 m，$m+1$ 使 $m<\gamma\leqslant m+1$ （注10）

继则有：$m+\frac{C_1}{10}$，$m+\frac{C_1+1}{10}$ 使 $m+\frac{C_1}{10}<\gamma\leqslant m+\frac{C_1+1}{10}$

$$m+\frac{C_1}{10}+\frac{C_2}{10^2},\ m+\frac{C_1}{10}+\frac{C_2+1}{10^2}\ \text{使}\ m+\frac{C_1}{10}+\frac{C_2}{10^2}<\gamma\leqslant m+\frac{C_1}{10}+\frac{C_2+1}{10^2}$$

$$m+\frac{C_1}{10}+\frac{C_2}{10^2}+\frac{C_3}{10^3},\ m+\frac{C_1}{10}+\frac{C_2}{10^2}+\frac{C_3+1}{10^3}\ \text{使}$$

$$m+\frac{C_1}{10}+\frac{C_2}{10^2}+\frac{C_3}{10^3}<\gamma\leqslant m+\frac{C_1}{10}+\frac{C_2}{10^2}+\frac{C_3+1}{10^3}$$

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

其中：C_K 是 0，1，2，3－－－－9 之一.

取 $a_n=m+\frac{C_1}{10}+\cdots+\frac{C_n}{10^n}$. $b_n=m+\frac{C_1}{10}+\cdots+\frac{C_n+1}{10^n}$

得乙种实数 $\beta=(a_n|b_n)$

设 $\psi(\beta)=(A',B')$ 现在要证 $(A',B')=(A,B)$

反证：若 $(A',B')\neq(A,B)$ 不妨设 $(A',B')<(A,B)$

依丙种实数的稠密性，存在有理数 r_1，r_2 使

$$(A',B')<r_1<r_2<(A,B)$$

注意 a_n b_n 的意义有 $(A,B)=r\leq b_n$

再注意函数 ψ 的定义有 $a_n\in A'$ $\therefore a_n\leq(A',B')$

$$\therefore a_n\leq(A',B')<r_1<r_2<(A,B)\leq b_n$$

于是 $\quad r_2-r_1\leq b_n-a_n=\frac{1}{10^n}$

上式对于任何 n 都成立，这显然是不可能的事。

$$\therefore(A',B')=(A,B)$$

即 $\quad\psi(\beta)=r$

(VI') 若 $\beta=[a_n|b_n]<[a_n'|b_n']=\beta'$

则 $\psi(\beta)=(A,B)<(A',B')=\psi(\beta')$

证明：为了使丙种实数大小的比较能用统一的定义（即

$(A,B)<(A',B')$，当 $A\subset A'$，$A\neq A'$）

若 β,β'（或 β，β' 之一）为有理数时，不失一般性，认为：

$$a_1=a_2=\cdots\cdots=\beta;\quad a_1'=a_2'=\cdots\cdots=\beta'$$

（这时 (A,B)，(A',B') 的下类 A，A' 有最大的有理数）

$$\because[a_n|b_n]<[a_n'|b_n']$$

依乙种实数大小的定义，有自然数 K，使 $b_K<a_K'$

于是 任一 $r\in A$，有 $r\leq$ 某一 $a_n<b_K<a_K'$ $\therefore r\in A'$ $\therefore A\subset A'$

此外 $a_K'\in A'$，又 $\because a_K'>b_K\in B$ $\therefore a_K'\bar{\in}A$，$\therefore A'\neq A$

这证明了

$$\psi(\beta)=(A,B)<(A',\beta')=\psi(\beta')$$

由(I')，(II')，(III')，(VI')证明了，Z_2 与 Z_3 一一对应，又

(VI')证明了 Z_2 与 Z_3 还保持相同的大小顺序。

从上证明了，三种实数集 Z_1，Z_2，Z_3 不但可以建立一一对

应关系[注11]，而且只有相同的大小顺序。

显然在三种实数集中，有序性，稠密性的意义是一致的。

又乙种实数中连续性的意义（闭区间套定理），与丙种实数中连续性的意义（全体实数集的 Dedekind 分割（X，Y）只可能有两种类型）也是一致的，因为当证明了阿几米得公理从后这二个定理是等价的。[注12]

§6. Z_2与Z_3关于加、减、乘、除四种运标是同构的

定理6、Z_2与Z_3之间在一一对应ψ下（ψ是从Z_2到Z_3的对应规则，前面已证明了Z_2与Z_3一一对应，∴ψ^{-1}也存在）关于加、减、乘、除四种运标是同构的。

证明：依前面的对应规则ψ

$$[a_n|b_n] \xrightarrow{\psi} (A, B)，\text{其中 } B=\{r, r>\text{任}-a_n\}, A=C_R B.$$

$$[a'_n|b'_n] \xrightarrow{\psi} (A', B') \quad \text{其中 } B'=\{r; r>\text{任}-a'_n\}, A'=C_R B$$

（a）证明 $[a_n|b_n]+[a'_n|b'_n] \xrightarrow{\psi} (A, B)+(A', B')$

依Z_2，Z_3中加法的定义，也就是要证：

$$[a_n+a'_n|b_n+b'_n] \xrightarrow{\psi} (A_1, B_1) \text{其中 } B_1=\{r, r>a+a', \text{任意 } a\in A, a'\in A'\}$$

$$A_1=C_R B_1$$

事实上 ∵$[a_n+a'_n|b_n+b'_n] \xrightarrow{\psi} (\overline{A}_1, \overline{B}_1)$

其中 $\overline{B}_1=\{r, r>a_n+a'_n, \text{任意 } a_n, a'_n\}$

$$\overline{A}_1=C_R\overline{B}_1$$

∴只要证 $B_1=\overline{B}_1$ 就行了

（i）任一$r\in B_1$　　∴$r>a+a'$（任意$a\in A$，$a'\in A'$）

注意任一$a_n\in A$；任一$a'_n\in A'$，∴$r>a_n+a'_n$（任意a_n，a'_n）

∴$r\in\overline{B}_1$　　　∴$B_1\subset\overline{B}_1$

（ii）任一$r\in\overline{B}_1$，∴$r>a_n+a'_n$（任意a_n，a'_n）

对于任意 $a\in A$，$a'\in A'$，依集 $A.A'$ 的定义

$$A=C_RB=\{r,\ 存在\ a_n\ 使\ r\leqslant a_n\}$$

$$A'=C_RB'=\{r\ 存在\ a'_n\ 使\ r\leqslant a'_n\}$$

有 $a_n.\ a'_n$ 使 $a\leqslant a_n.\ a'\leqslant a'_n$

$\therefore r>a_n+a'_n\geqslant a+a'\qquad \therefore r\in B_1,\ \therefore \overline{B}_1\subset B_1$

综合(i)(ii)得 $B_1=\overline{B}_1$

(b) 证 $[a_n|b_n]-[a'_n|b'_n]\xrightarrow{\psi}(A.B)-(A',B')$ 注13

依 Z_2 中减法的定义及推论 $[a_n|b_n]-[a'_n|b'_n]$ 是满足条件

$x+[a'_n|b'_n]=[a_n|b_n]$ 的唯一的数 $x\in Z_2$ 由(a)有

$$x+[a'_n|b'_n]=[a_n|b_n]\xrightarrow{\psi}\overline{x}+(A',B')=(A.B)$$

(这儿设 $x\xrightarrow{\psi}\overline{x}\in Z_3$)

这就是说 $\overline{x}\in Z_3$ 满足条件 $\overline{x}+(A'.B')=(A.B)$ 依 Z_3 中减法的定义及推论，满足上述条件的数是唯一的，且就是 $(A.B)-(A',B')$

$\therefore x\xrightarrow{\psi}\overline{x}$ 就是 $[a_n|b_n]-[a'_n|b'_n]\xrightarrow{\psi}(A,B)-(A'.B')$

(C) 证 $[a_n|b_n]\times[a'_n|b'_n]\xrightarrow{\psi}(A.B)\times(A',B')$

不失普遍性，假定 $[a_n|a_n]>0$，$[a'_n|b'_n]>0$（这时 $(A.B)>0.\ (A',B')>0$）来证明本问题（在一般情形下可用符号规则及注13来证明）

依 Z_2，Z_3 中乘法的定义也就是要证：

$[a_n\cdot a'_n|b_n\cdot b'_n]\xrightarrow{\psi}(A_2.B_2)$ 其中 $B_2=\{r;\ r>a\cdot a'$ 任意 $0<a\in A$ $0<a'\in A'\}\qquad A_2=C_RB_2$

事实上

$\because [a_n a'_n|b_n\cdot b'_n]\xrightarrow{\psi}(\overline{A}_2.\overline{B}_2)$ 其中 $\overline{B}_2=\{r,\ r>a_n\cdot a'_n$ 任意 $a_n.\ a'_n\}\ \overline{A}_2=C_R\overline{B}_2$

$\therefore$ 只要证 $B_2=B_2$ 就行了

(i) 任一 $r\in B_2$，$\therefore r>a\cdot a'$（任意 $a\in A.\ a'\in A'$）

$\because$ 在 $-a_n \in A$，在 $-a'_n \in A'$，$\therefore r > a_n \cdot a'_n$ $\therefore r \in \overline{B_2}$ $\therefore B_2 \subset \overline{B_2}$

ii) 任一 $r \in \overline{B_2}$；$\because r > a_n \cdot a'_n$（任意 $a_n \cdot a'_n$）

对于任意的 $a \in A$，$a' \in A'$ 依集合 A、A' 的定义，

$$A = C_R B = \{r: \text{有在 } a_n \text{ 使 } r \leqslant a_n\}$$

$$A' = C_R B' = \{r: \text{有在 } a'_n \text{ 使 } r \leqslant a'_n\}$$

$\therefore$ 有 a_n，a'_n 使 $a \leqslant a_n$ $a' \leqslant a'_n$

$r > a_n \cdot a'_n \geqslant a \cdot a'$ $\therefore r \in \overline{B_2}$ $\therefore \overline{B_2} \subset B_2$

综合（i）（ii）有 $B_2 = \overline{B_2}$

（d）注14 在 $[a_n|b_n] \div [a'_n|b'_n] \xrightarrow{\psi} (A, B) \div (A', B')$

（其中 $[a'_n|b'_n] \neq 0$，当然 $(A', B') \neq 0$）

依 Z_2 中除法的定义及推论，$[a_n|b_n] \div [a'_n|b'_n]$ 是满足条件：

$$x \times [a'_n|b'_n] = [a_n|b_n]$$

的唯一的数 $x \in Z_2$ 由（c）有

$$x \times [a'_n|b'_n] = [a_n|b_n] \xrightarrow{\psi} \overline{x} \times (A', B') = (A, B)$$

（这儿设 $x \xrightarrow{\psi} \overline{x} \in Z_3$）

这就是说 $\overline{x} \in Z_3$ 满足条件 $\overline{x} \times (A', B') = (A, B)$，依 Z_3 中除法的定义及推论，满足上述条件的数是唯一的，且就是 $(A, B) \div (A', B')$

$\therefore x \xrightarrow{\psi} \overline{x}$ 就是 $[a_n|b_n] \div [a'_n|b'_n] \xrightarrow{\psi} (A, B) \div (A', B')$

§7. 实数的公理化定义

我们从有理数集出发，利用有理数集及有理数集的性质建立了 Cantor 和 Dedekind 实数理论，并证明了这两种理论是等价的。此外我们也可以从另一个角度出发——即从公理出发，来定义实数，用公理法定义实数的基本论点是"把实数集看作连续的有序体"。下面是实数的公理化定义：

定义 12 一个集合 Z 叫做实数体：对于任意 a、$b \in Z$，有