天勤数学考研系列

2015考研数学（三）真题篇

十年真题精解与热点问题

陈启浩 编著

免费答疑

天勤微信考研平台

答疑服务

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

2015考研

数学（三）

真题篇

免费答疑

天勤数学考研系列

2015考研数学（三）真题篇

十年真题精解与热点问题

陈启浩　编著

机械工业出版社

本书是考研数学辅导书，主要内容包括 2005 年到 2014 年十年的考研数学三的真题，真题的分析、解答和延伸，以及考试热点问题的讨论．本书提供免费的线上答疑服务．

本书适合参加全国硕士研究生入学统一考试“数学三”的同学阅读，也可作为教师的参考书．

图书在版编目（CIP）数据

2015 考研数学（三）真题篇十年真题精解与热点问题/陈启浩编著．—北京：机械工业出版社，2014. 3

（天勤数学考研系列）

ISBN 978-7-111-46013-8

Ⅰ．①2… Ⅱ．①陈… Ⅲ．①高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ．①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 036562 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
策划编辑：韩效杰 责任编辑：韩效杰 汤 嘉
版式设计：霍永明 封面设计：路恩中 责任印制：乔 宇
北京机工印刷厂印刷（三河市南杨庄国丰装订厂装订）
2014 年 3 月第 1 版第 1 次印刷
184mm×260mm · 16 印张 · 388 千字
0 001—4 500 册
标准书号：ISBN 978-7-111-46013-8
定价：29. 80 元

天勤数学考研系列丛书介绍

为了帮助同学们在考研复习时，能够在较为紧张的时间安排下，有效加深概念与理论的理解，熟练掌握常用的解题方法与技巧，针对考生的实际需要，我社特组织出版了由北京邮电大学陈启浩教授编写的“天勤数学考研系列”丛书．这套丛书2013年出版时曾用名“考研数学复习指导系列丛书”．

本套丛书分别针对参加数学一、数学二和数学三考试的同学，其中针对数学三考试的包括四本书，分别是：

《2015考研数学（三）真题篇　十年真题精解与热点问题》

《2015考研数学（三）基础篇　全面复习与常考知识点解析》

《2015考研数学（三）提高篇　常考问题的快捷解法与综合题解析》

《2015考研数学（三）冲刺篇　模拟试题5套及详解》

本套丛书是陈启浩教授在对全国硕士研究生入学统一考试大纲的深入研究和对历届考研真题的精细分析的基础上写成的，也是他长期大学数学教学，特别是近十几年来考研数学辅导的结晶．

本套丛书提供**免费的答疑服务**，读者可以访问天勤论坛（www. csbiji. com），在相应版块就书中的内容提问，将由专门的老师负责来回答这些提问，合理的问题将在**48小时内**得到回答．

本套丛书，无论内容编写，还是解题方法都比较精练、新颖，富有启迪性和前瞻性，实用性、针对性也很强，可以明显提高复习的效率．它既贴近考纲、考试，又贴近考生，是广大考生值得拥有的一套好书．

机械工业出版社

前　　言

参加考研的同学，一定要练习一下近十年的全国硕士研究生入学统一考试的真题．因为它们既可以评估复习的效果，找出不足，尽快补上，也可以提供试题形式、广度和难度等有价值的信息．

为了帮助同学们从考研真题的练习中发现更多不足，掌握更多方法，我们对 2005 年至 2014 年的考试试题，作了精心的解析，编成本套丛书的《2015 考研数学（三）真题篇　十年真题精解与热点问题》一书．本书由三部分组成：

A. 十年真题（单独成册）

B. 十年真题精解

C. 热点问题

“十年真题精解”是对每一道真题通过“分析”“精解”和“附注”三部分进行精细、完整的解析，特别是在“精解”中大量采用了既普遍实用又富有技巧性的方法给出解答，十分贴近考生，**这是本书的一个亮点，也是本书与其他同类书籍的一个区别**．

“热点问题”是对最近十几年考研真题进行全面分析、研究后，提出的常常现身于试题中的、对考生来说较为困难或容易失分的问题，通过例题进行讲解，十分贴近考试．

我们希望同学们在使用真题进行练习时，不要轻易去翻阅真题解答，只有当百思不得其解时才查阅解答，这样练习才能起到作用；在练习结束之后，针对每一道真题，应回过头来仔细阅读书中有关这道题的分析、精解和附注的内容，进行比对和总结，内化为自己的能力．

本书提供**免费的答疑服务**，读者可以访问天勤论坛（www. csbiji. com），在相应版块就书中的内容提问，将由专门的老师负责来回答这些提问，合理的问题将在 **48 小时内**得到回答．

希望同学们认真专注地进行复习，取得满意的成绩！

欢迎同学们对本书提出任何建议和意见，请发邮件到 cqhshuxue@ gmail. com，非常感谢！

编　者

目　录

B　十年真题精解

2014 年全国硕士研究生入学统一考试试题解答

一、选择题

(1) **分析** 按数列极限定义选择正确的选项.

精解 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$，所以对 $\frac{|a|}{2}>0$，存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，$|a_n|>|a|-\frac{|a|}{2}=\frac{|a|}{2}$.

因此本题选(A).

附注 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 是 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$ 的充分而非必要条件.

(2) **分析** 从计算非铅直渐近线入手

精解 对选项(C)，由于

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1+\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-ax)=\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=0,$$

所以，曲线 $y=x+\sin\frac{1}{x}$ 有渐近线 $y=x$.

因此本题选(C).

附注 对于曲线 $y=y(x)$，如果极限

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}\text{ 与 }b=\lim_{x\to\infty}[y(x)-ax]$$

都存在，则该曲线有非铅直渐近线.

(3) **分析** 由题设 $\lim\limits_{x\to0}\frac{P(x)-\tan x}{x^3}=0$ 计算 a，b，c，d 的取值.

精解 由题设 $P(x)-\tan x=a+bx+cx^2+dx^3-\tan x$ 是 x^3 的高阶无穷小知

$$\tan x=a+bx+cx^2+dx^3-o(x^3)\quad(x\to0).$$

由此得到 $a=\tan x\big|_{x=0}=0$，

$b=(\tan x)'\big|_{x=0}=\sec^2x\big|_{x=0}=1$，

$c=\frac{1}{2!}(\tan x)''\big|_{x=0}=\frac{1}{2}(\sec^2x)'\big|_{x=0}=\sec^2x\tan x\big|_{x=0}=0$，

所以选项(A)、(B)、(C)都是正确的.

因此本题选(D).

附注 $d=\frac{1}{6}$ 是错误的，这是因为

$$d=\frac{1}{3!}(\tan x)^{(3)}\big|_{x=0}=\frac{1}{6}(\sec^2x\tan x)'\big|_{x=0}$$

$$=\frac{1}{3}(2\sec^2 x\tan^2 x+\sec^4 x)\Big|_{x=0}$$

$$=\frac{1}{3}(2\sec^2 x\tan^2 x+\sec^4 x)\Big|_{x=0}=\frac{1}{3}.$$

(4) **分析** 利用$f(x)$在$[0,x]$与$[x,1]$($x\in(0,1)$)上的拉格朗日中值定理证明.

精解 对$x\in(0,1)$时，由

$$f(x)=f(0)+f'(\xi_1)x\quad(\xi_1\in(0,x)),$$

$$f(x)=f(1)-f'(\xi_2)(1-x)\quad(\xi_2\in(x,1))$$

得

$$f(x)=f(0)(1-x)+f(1)x+[f'(\xi_1)-f'(\xi_2)]x(1-x)$$

$$=g(x)-f''(\eta)(\xi_2-\xi_1)x(1-x)\quad(\eta\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)).$$

于是，当$f''(x)\leqslant 0$($x\in(0,1)$)时，有$f(x)\geqslant g(x)$($x\in(0,1)$). 此外，$f(0)=g(0)$，$f(1)=g(1)$. 所以有

$$f(x)\geqslant g(x)\quad(x\in[0,1]).$$

因此本题选(C).

附注 当$f''(x)<0$($x\in[0,1]$)时，$f(x)\geqslant g(x)$($x\in[0,1]$)，且仅在点$x=0$，1处取等号.

当$f''(x)\leqslant 0$($x\in[0,1]$)时，$f(x)\geqslant g(x)$($x\in[0,1]$)，但是取等号的点未必限于点$x=0$与$x=1$.

(5) **分析** 按第一行展开即可.

精解

$$\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}=-a\begin{vmatrix}a&0&b\\0&d&0\\c&0&d\end{vmatrix}+b\begin{vmatrix}a&0&b\\0&c&0\\c&0&d\end{vmatrix}$$

$$=-a(ad^2-bcd)+b(acd-bc^2)=-(ad-bc)^2.$$

因此本题选(B).

附注 本题可按任一行(列)展开计算.

(6) **分析** 按向量组线性无关定义进行推理.

精解 设$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，则对常数λ_1，λ_2有

$$\lambda_1(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3)+\lambda_2(\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0},\text{即}\ \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+(\lambda_1k+\lambda_2l)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$$

时，必有$\lambda_1=\lambda_2=0$. 由此可知$\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.

但反之未必成立，例如$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$，则$\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，但$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关.

因此本题选(A).

附注 本题的必要性也可证明如下：

设$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$是线性无关的三维列向量组，则由

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\k&l&1\end{pmatrix}$$

及矩阵$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\k&l&1\end{pmatrix}$可逆知，$\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，从而$\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.

(7) **分析** 利用随机事件概率计算公式，先算出$P(A)$，再计算$P(B-A)$.

精解 由$0.3=P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)$
$=P(A)(1-P(B))=0.5P(A)$

得$P(A)=0.6$，所以

$$P(B-A)=P(B)-P(AB)=P(B)-P(B)P(A)=0.5-0.5\times0.6=0.2.$$

因此本题选(B).

附注 随机事件的减法公式是

$$P(A-B)=P(A)-P(AB),$$

当$B\subseteq A$时，$P(A-B)=P(A)-P(B)$.

(8) **分析** 先分别确定X_1-X_2，$|X_3|$服从的分布，然后确定S服从的分布.

精解 由于X_1，X_2都服从$N(0,\sigma^2)$且它们相互独立，所以由$X_1-X_2\sim N(0,2\sigma^2)$知，$\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$. 此外，由$X_3\sim N(0,\sigma^2)$知$\left(\dfrac{X_3}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(1)$，以及$\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}$与$\left(\dfrac{X_3}{\sigma}\right)^2$相互独立知

$$\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}|X_3|}=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma}(X_1-X_2)}{\sqrt{\left(\dfrac{X_3}{\sigma}\right)^2}}\sim t(1).$$

因此本题选(C).

附注 常用的抽样分布$\chi^2(n)$，$t(n)$以及$F(n_1,n_2)$的定义如下：

(Ⅰ) 设随机变量X_1，X_2，…，X_n相互独立，且都服从$N(0,1)$，则随机变量$Y=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$所服从的分布称为自由度为$n$的$\chi^2$分布，记为$\chi^2(n)$.

(Ⅱ) 设随机变量$X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，且相互独立，则随机变量$T=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$所服从的分布称为自由度为n的t分布，记为$t(n)$.

(Ⅲ) 设随机变量$X\sim\chi^2(n_1)$，$Y\sim\chi^2(n_2)$，且相互独立，则随机变量$F=\dfrac{X}{Y}$所服从的分布称为自由度为n_1，n_2的F分布，记为$F(n_1,n_2)$.

二、填空题

(9) **分析** 先写出收益函数，然后求导即得边际收益.

精解 收益R是需求量q的函数，即$R=pq=20q-\dfrac{1}{2}q^2(0<q<40)$，因此边际收益$\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}q}=20-q(0<q<40)$

附注 顺便计算收益价格弹性.

由于收益关于价格的函数为

$$R = pq = 40p - 2p^2 \quad (0 < p < 20)$$

所以，收益价格弹性 $E_p = \frac{p}{R}\frac{dR}{dp} = \frac{2(10-p)}{20-p}$.

(10) **分析** 先画出 D 的图形，然后用定积分计算 D 的面积 S.

精解 D 如图 B.14.1 阴影部分所示，所以 $S = \int_1^2\left[-\frac{1}{y}-(-y)\right]dy = \left(-\ln y + \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_1^2 = \frac{3}{2} - \ln 2.$

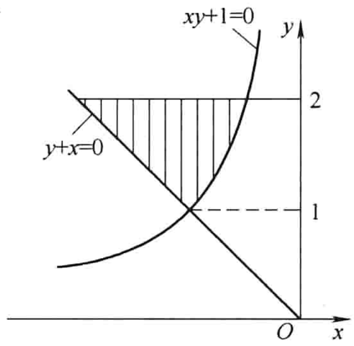

图 B.14.1

附注 S 也可用二重积分计算，具体如下：

$$S = \int_1^2 dy\int_{-y}^{-\frac{1}{y}}dx = \int_1^2\left(-\frac{1}{y}+y\right)dy = \frac{3}{2} - \ln 2.$$

(11) **分析** 先算 $\int_0^a xe^{2x}dx$，然后利用题设条件计算 a 的值.

精解 由于

$$\int_0^a xe^{2x}dx = \frac{1}{2}\int_0^a x de^{2x}$$
$$= \frac{1}{2}\left[xe^{2x}\Big|_0^a - \int_0^a e^{2x}dx\right] \quad (分部积分)$$
$$= \frac{1}{2}ae^{2a} - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^a = \frac{1}{2}ae^{2a} - \frac{1}{4}e^{2a} + \frac{1}{4}.$$

所以由题设条件得

$$\frac{1}{2}ae^{2a} - \frac{1}{4}e^{2a} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, 即(2a-1)e^{2a} = 0,$$

因此 $a = \frac{1}{2}$.

附注 以下问题难度比本题稍高：

设 $\int_0^a xe^{2x}dx = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2}{\int_0^x t\ln(1+t)dt}$，求 a 的值.

其解答如下：

$$由于 \lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2}{\int_0^x t\ln(1+t)dt} \xlongequal{洛必达法则} \lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x\ln(1+x)}$$
$$= \lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2} \xlongequal{洛必达法则} \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x} = \frac{1}{2},$$

所以有
$$\int_0^a xe^{2x}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}, 从而 a = \frac{1}{2}.$$

(12) **分析** 改变积分次序后即可算得这个二次积分的值.

精解 $\int_0^1 dy\int_y^1\left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2}\right)dx = \int_0^1 dy\int_y^1\frac{e^{x^2}}{x}dx - \int_0^1(1-y)e^{y^2}dy$

$$= \iint\limits_D \frac{e^{x^2}}{x}d\sigma - \int_0^1 (1-y)e^{y^2}dy$$

$(D = \{(x,y) \mid y \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\} = \{(x,y) \mid 0 \leqslant y \leqslant x, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ 如图 B. 14. 2 阴影部分所示)

$$= \int_0^1 dx \int_0^x \frac{e^{x^2}}{x}dy - \int_0^1 (1-y)e^{y^2}dy$$

$$= \int_0^1 e^{x^2}dx - \int_0^1 e^{y^2}dy + \int_0^1 ye^{y^2}dy$$

$$= \frac{1}{2}e^{y^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e-1).$$

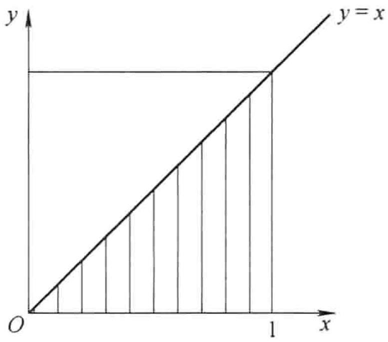

图 B. 14. 2

附注 本题的关键是计算$\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{e^{x^2}}{x}dx$，直接计算是不行的，故改变积分次序后再行计算.

(13) **分析** 用配平方方法将$f(x_1, x_2, x_3)$转换成标准型，即可确定 a 的取值范围.

精解 由于

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= [x_1^2 + 2ax_1x_3 + (ax_3)^2] - [x_1^2 - 4x_2x_3 + (2x_3)^2] + (4-a^2)x_3^2 \\ &= (x_1 + ax_3)^2 - (x_1 - 2x_3)^2 + (4-a)x_3^2 \\ &= y_1^2 - y_2^2 + (4-a^2)y_3^2 \end{aligned}$$

(其中$\begin{cases} y_1 = x_1 + ax_3, \\ y_2 = x_2 - 2x_3, \\ y_3 = x_3, \end{cases}$即$\begin{cases} x_1 = y_1 - ay_3, \\ x_2 = y_2 + 2y_3, \\ x_3 = y_3 \end{cases}$是可逆线性变换)，所以当$f(x_1, x_2, x_3)$的负惯性指数为 1 时，$a$ 应满足 $4 - a^2 \geqslant 0$，故 a 的取值范围为$[-2, 2]$.

附注 对二次型$f(x_1, x_2, x_3)$进行可逆线性变换，不改变其矩阵的秩，也不改变其正惯性指数(或负惯性指数)的值.

(14) **分析** 先算出 $E(X^2)$，然后用统计量的无偏性的定义计算 c.

精解 $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x;\theta)dx = \int_\theta^{2\theta} x^2 \cdot \frac{2x}{3\theta^2}dx = \frac{5}{2}\theta^2.$

所以，由 $c\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 是 θ^2 的无偏估计量得

$$\theta^2 = E\left(c\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = cnE(X^2) = \frac{5}{2}cn\theta^2, \text{即 } c = \frac{2}{5n}.$$

附注 评判总体 X 分布中的未知参数 θ 的估计量 $\hat{\theta}$ 的常用标准是：

(Ⅰ) 无偏性 如果 $E(\hat{\theta}) = \theta$，则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量.

(Ⅱ) 有效性 如果 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 都是 θ 的无偏估计量，则当 $D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$ 时，称 $\hat{\theta}_1$ 是较 $\hat{\theta}_2$ 有效的估计量.

三、解答题

(15) **分析** 由于分子是积分上限函数，所以先用洛必达法则计算所给的未定式极限.

精解

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-x}{2x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right]$$

$$\xlongequal{令 u=\frac{1}{x}}\lim_{u\to0^+}\frac{e^u-1-u}{u^2}$$

$$\xlongequal{洛必达法则}\lim_{u\to0^+}\frac{e^u-1}{2u}=\frac{1}{2}.$$

附注 本题也可用以下方法计算：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x}\xlongequal{洛必达法则}\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right]$$

$$\xlongequal{以下同题解}\frac{1}{2}.$$

本题是$\frac{\infty}{\infty}$型未定式极限．在基础篇第二章六及提高篇 01 中可以找到与本题类似的例题.

(16) **分析** 由于积分区域是角域的一部分，所以用极坐标计算所给的二重积分．

精解

$$\iint_D\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy\xlongequal{极坐标}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2\frac{r\cos\theta\cdot\sin(\pi r)}{r(\cos\theta+\sin\theta)}rdr,$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta\cdot\int_1^2 r\sin(\pi r)dr$$

其中，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{2}(\cos\theta+\sin\theta)}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{2}(\cos\theta-\sin\theta)}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2(\cos\theta+\sin\theta)}d(\cos\theta+\sin\theta)$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln(\cos\theta+\sin\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4},$$

$$\int_1^2 r\sin(\pi r)dr=-\frac{1}{\pi}\int_1^2 rd\cos(\pi r)=-\frac{1}{\pi}\left[r\cos(\pi r)\Big|_1^2-\int_1^2\cos(\pi r)dr\right]=-\frac{3}{\pi},$$

所以，

$$\iint_D\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy=\frac{\pi}{4}\cdot\left(-\frac{3}{\pi}\right)=-\frac{3}{4}.$$

附注　当积分区域 D 是角域的一部分，即 $D=\{(r,\theta)\mid r_0\leqslant r(\theta)\leqslant r_1,\ 0\leqslant\theta_0\leqslant\theta\leqslant\theta_1\leqslant 2\pi\}$ 时，通常用极坐标计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$（其中 $f(x,y)$ 在 D 及其边界上连续）.

本题中使用的二重积分计算方法及例题可以从基础篇第三章八中找到.

(17) **分析**　先计算 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 与 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，并利用它们满足的等式得到关于 $f(u)$ 的微分方程，然后求解该微分方程得到 $f(u)$ 的表达式.

精解　由 $\mathrm{d}z=f'(u)[\mathrm{e}^x\cos y\mathrm{d}x+(-\mathrm{e}^x\sin y)\mathrm{d}y]$（其中 $u=\mathrm{e}^x\cos y$）

得
$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\mathrm{e}^x\cos y,\ \frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)(-\mathrm{e}^x\sin y),$$

所以，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)\mathrm{e}^{2x}\cos^2 y+f'(u)\mathrm{e}^x\cos y,\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)\mathrm{e}^{2x}\sin^2 y-f'(u)\mathrm{e}^x\cos y.$

从而由所给等式得
$$f''(u)\mathrm{e}^{2x}=[4f(u)+u]\mathrm{e}^{2x},$$

即
$$f''(u)-4f(u)=u.\text{（二阶常系数非齐次线性微分方程）}\tag{1}$$

由于 $f''(u)-4f(u)=0$ 有通解　$F=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}$，以及 $f''(u)-4f(u)=u$ 有特解 $f^*=-\dfrac{1}{4}u$. 所以式(1)的通解为

$$f(u)=F+f^*=C_1\mathrm{e}^{2u}+C_2\mathrm{e}^{-2u}-\frac{1}{4}u.\tag{2}$$

且
$$f'(u)=2C_1\mathrm{e}^{2u}-2C_2\mathrm{e}^{-2u}-\frac{1}{4}.\tag{3}$$

将 $f(0)=f'(0)=0$ 代入式(2)、式(3)得 $C_1=\dfrac{1}{16}$，$C_2=-\dfrac{1}{16}$. 将它们代入式(2)得

$$f(u)=\frac{1}{16}\mathrm{e}^{2u}-\frac{1}{16}\mathrm{e}^{-2u}-\frac{1}{4}u.$$

附注　本题是偏导数计算与求解二阶常系数线性微分方程的综合题，应熟练掌握一、二阶偏导数的计算和二阶常系数线性微分方程的解法.

在提高篇 16 中可以找到与本题十分相似的例题

(18) **分析**　先计算所给幂级数的收敛域，然后在收敛域内通过逐项微分算出和函数.

精解　记　$a_n=(n+1)(n+3)$，则由

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(n+4)}{(n+1)(n+3)}=1$$

知所给幂级数的收敛半径 $R=\dfrac{1}{\rho}=1$. 此外，在点 $x=-1$，1 处所给幂级数都发散，所以收敛域为 $(-1,1)$.

当 $x\in(-1,1)$ 时，幂级数的和函数为

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(x^{n+2})''+\sum_{n=0}^{\infty}(x^{n+1})'$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2}\right)'' + \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}\right)'$$
$$= \left(\frac{x^2}{1-x}\right)'' + \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{3-x}{(1-x)^3}.$$

附注 题解中求和函数方法十分快捷，但也可以用以下方法计算：

当 $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ 时，

$$\int_0^x S(t)\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+3)t^n\,dt$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (n+1)(n+3)t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)x^{n+1}$$

得 $$\int_0^x \left(t\int_0^t S(u)\,du\right)dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)t^{n+2}\,dt$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (n+3)t^{n+2}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+3} = \frac{x^3}{1-x},$$

所以 $x\int_0^x S(u)\,du = \left(\dfrac{x^3}{1-x}\right)' = \dfrac{3x^2-2x^3}{(1-x)^2}$，即 $\int_0^x S(u)\,du = \dfrac{3x-2x^2}{(1-x)^2}$.

于是，$S(x) = \left(\dfrac{3x-2x^2}{(1-x)^2}\right)' = \dfrac{3-x}{(1-x)^3}$.

此外，$S(0) = 1 \cdot 3 = 3$. 所以，

$$S(x) = \frac{3-x}{(1-x)^3} \quad (-1 < x < 1).$$

在提高篇13中可以找到与本题十分相似的例题.

(19) **分析** (Ⅰ)可由 $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$ 直接得到.

(Ⅱ)将欲证不等式中的 b 换成 x，然后用对变上限积分求导数的方法证明.

精得 (Ⅰ)对 $x \in [a, b]$，由 $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$ 得

$$\int_a^x 0\,dx \leqslant \int_a^x g(t)\,dt \leqslant \int_a^x dx，即 0 \leqslant \int_a^x g(x)\,dx \leqslant x - a.$$

(Ⅱ)将欲证不等式中的 b 改为 x，并记

$$F(x) = \int_a^{a+\int_a^x g(t)\,dt} f(u)\,du - \int_a^x f(t)g(t)\,dt,$$

则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导，且

$$F'(x) = \left[f\left(a + \int_a^x g(t)\,dt\right) - f(x)\right]g(x)$$
$$\leqslant [f(a + (x-a)) - f(x)]g(x)（利用 f(x) 在 [a,b] 上单调增加及(Ⅰ)的结论）$$
$$= 0,$$

所以，$F(b) \leqslant F(a) = 0$，即

$$\int_a^{a+\int_a^b g(t)\,dt} f(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

附注 由于已证明了(Ⅰ)，所以在证(Ⅱ)时，以把 b 改为 x 比较适宜. 如果将 a 改为 x，也同样可证，但此时需先证明：