经济数学

总主编 赵斯泓

概率论与数理统计学习辅导

主编/雷 平

立信会计出版社
LIXIN ACCOUNTING PUBLISHING HOUSE

经济数学

总主编 赵斯泓

概率论与数理统计
学习辅导

主编/雷 平

立信会计出版社
LIXIN ACCOUNTING PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习辅导 / 雷平主编. —上海：立信会计出版社，2014.3

(经济数学)

ISBN 978-7-5429-4157-2

Ⅰ.①概… Ⅱ.①雷… Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 042503 号

责任编辑　蔡莉萍
封面设计　周崇文

概率论与数理统计学习辅导

出版发行	立信会计出版社		
地　　址	上海市中山西路 2230 号	邮政编码	200235
电　　话	(021)64411389	传　　真	(021)64411325
网　　址	www.lixinaph.com	电子邮箱	lxaph@sh163.net
网上书店	www.shlx.net	电　　话	(021)64411071
经　　销	各地新华书店		

印　　刷	上海天地海设计印刷有限公司	
开　　本	787 毫米×960 毫米	1/16
印　　张	32	
字　　数	510 千字	
版　　次	2014 年 3 月第 1 版	
印　　次	2014 年 3 月第 1 次	
印　　数	1-3100	
书　　号	ISBN 978-7-5429-4157-2/0	
定　　价	49.80 元	

如有印订差错，请与本社联系调换

《经济数学》编写组

总主编 赵斯泓（上海立信会计学院）

编　委 （以姓氏笔画为序）

王洁明（上海第二工业大学）
庄海根（上海应用技术学院）
孙　劼（上海应用技术学院）
李晓彬（上海金融学院）
沈春根（上海金融学院）
陈春宝（上海海事大学）
赵斯泓（上海立信会计学院）
钱　锦（上海海关学院）
雷　平（上海对外贸易学院）
车荣强（上海金融学院）
许建强（上海应用技术学院）
孙海云（上海应用技术学院）
杨敏华（上海立信会计学院）
宋殿霞（上海海洋大学）
周伟良（上海立信会计学院）
费伟劲（上海商学院）
徐　洁（上海海事大学）

前　言

随着我国高等教育的大众化和经管类专业的迅速发展，高校经管类数学课程的重要性日益凸现。数学课程教学必须按照培养高素质创新型人才的根本目标，适应新形势下大学本科学生的实际状况，立足经管类专业对数学知识能力的基本要求，深入研究教学内容、教学方法、教学手段的改革创新，使经管类数学课程的教学更具针对性和有效性。

《经济数学》是面向普通高校经管类专业数学基础课程的系列教材，包括《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》三册。由上海立信会计学院、上海对外贸易学院、上海金融学院、上海应用技术学院、上海第二工业大学、上海海事大学、上海海洋大学、上海海关学院等多所高校联合编写。

《经济数学辅导》是与《经济数学》系列教材配套出版的学习辅导书，对教材的知识结构，教学基本要求和每章的知识点进行归纳总结。通过范例分析解题思路和方法，提供教材习题全解，并配备每章的同步自测题及参考答案，以帮助学生更好地理解掌握教材内容和自我检测学习情况。

《经济数学辅导》由赵斯泓任总主编。第三册《概率论与数理统计辅导》由雷平任主编，孙劼、周伟良、宋殿霞任副主编。参加编写的有：宋殿霞（第一章），赵斯泓（第二章、第三章），孙劼（第四章），雷平（第五章、第六章、第八章第三部分），周伟良（第七章、第八章第一、第二、第四部分）。全书由雷平统稿，赵斯泓负责定稿。

由于编者水平有限，书中难免存在不妥之处，恳请广大专家、同行和读者批评指正。

赵斯泓

2014 年 3 月

目 录

第一章 随机事件及其概率

本章介绍概率论中最基本的概念与运算，包括：随机试验与样本空间，随机事件及其关系与运算，随机事件的概率的有关定义，概率的基本性质与计算公式，古典概型与几何概型，条件概率及相关公式，随机事件的独立性及伯努利概型.

一、知识结构与教学基本要求

(一) 知识结构

本章的知识结构见图 1-1.

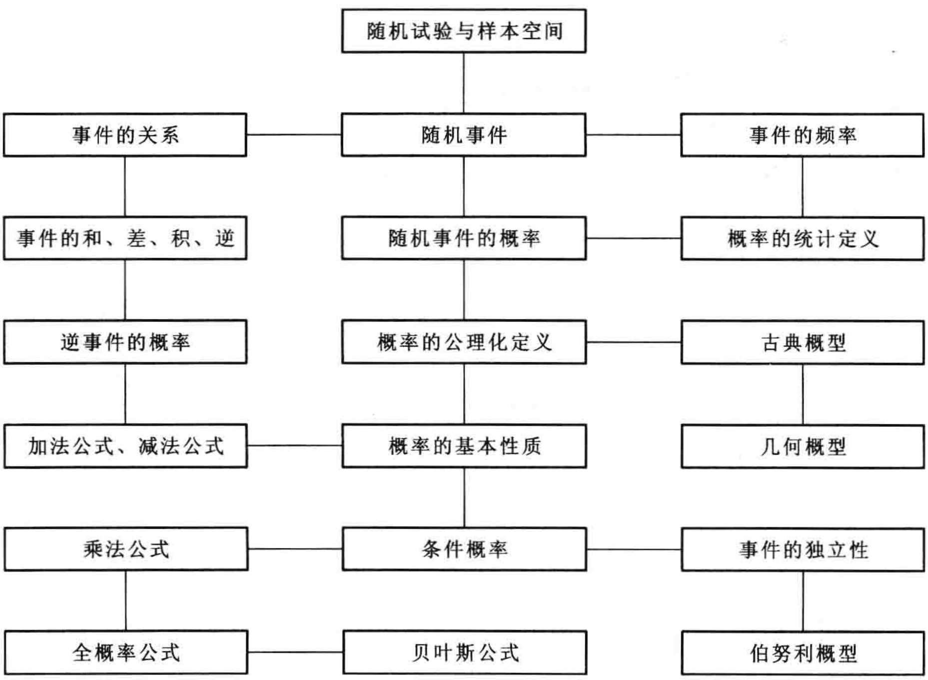

图 1-1 第一章知识结构

(二) 教学基本要求

(1) 了解随机现象与随机试验,了解样本空间的概念,理解随机事件的概念,掌握事件之间的关系与运算.

(2) 了解事件频率的概念,理解概率的统计定义,了解概率的古典定义,会计算简单的古典概率.

(3) 了解概率的公理化定义,理解概率的基本性质,了解概率的加法定理.

(4) 了解条件概率的概念、概率的乘法定理与全概率公式,会应用贝叶斯公式解决比较简单的问题.

(5) 理解事件的独立性概念.

(6) 了解伯努利概型和二项概率的计算方法.

二、内容简析与范例

(一) 随机事件

【概念与知识点】

1. 随机试验

在概率论中,将具有如下三个特征的试验称为随机试验,简称为试验.

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行.

(2) 每次试验的可能结果不止一个,但事先知道所有的可能结果.

(3) 在试验之前不能确定哪一个结果会出现.

2. 样本空间

随机试验的每一个可能结果称为一个样本点,记作 ω;全体样本点组成的集合称为样本空间,记作 Ω.

对于同一个随机试验,根据不同的试验目的,有着不同的样本点和样本空间.

3. 随机事件

由满足某种条件的样本点组成的样本空间 Ω 的子集称为随机事件,简称为事件,记作 A, B, C, …

随机事件可以用集合形式表示,也可以用带引号的文字形式表示.

每次随机试验必出现一个且仅出现一个样本点,如果所出现的样本点属于某个事件,则称该事件在试验中发生.

关于随机事件概念的说明:

(1) 仅含一个样本点事件称为基本事件;由两个及以上的样本点组成的事件称

为复合事件.

(2) 样本空间 Ω 称为必然事件.

(3) 空集 $\varnothing$ 称为不可能事件.

必然事件和不可能事件可以理解为随机事件的两个极端情形.

4. 事件的关系和运算

随机事件是样本空间的子集，事件的关系与运算等同于集合的关系与运算.

(1) 事件的包含：如果事件 A 的样本点都属于事件 B，则称 A 包含于 B，或称 B 包含 A，记作 $A\subset B$，或 $B\supset A$.

事件包含的意义：事件 A 包含于事件 B，意味着 A 发生时 B 必发生.

(2) 事件的相等(等价)：如果事件 A 与事件 B 相互包含，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等或等价，记作 $A=B$.

(3) 事件的和(并)：由事件 A 与事件 B 的所有样本点组成的事件，称为 A 与 B 的和事件或并事件，记作 $A\cup B$，即

$$A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}$$

有限个或可列个事件 A_1, A_2, …, A_n, …的和事件，可简记为 $\bigcup\limits_i A_i$，即

$$\bigcup_i A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$$

(4) 事件的积(交)：由事件 A 与事件 B 的共有样本点组成的事件，称为 A 与 B 的积事件或交事件，记作 $A\cap B$，简记为 AB，即

$$AB = A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\}$$

有限个或可列个事件 A_1, A_2, …, A_n, …的积事件，可简记为 $\bigcap\limits_i A_i$，即

$$\bigcap_i A_i = A_1A_2\cdots A_n\cdots$$

(5) 事件的差：由事件 A 中不属于事件 B 的所有样本点组成的事件，称为 A 与 B 的差事件，记作 $A-B$，即

$$A - B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 且 } \omega \notin B\}$$

(6) 事件的互斥(互不相容)：如果事件 A 与事件 B 满足 $AB=\varnothing$，则称 A 与 B 互斥或互不相容.

(7) 事件的互逆(对立)：如果事件 A 与事件 B 满足 $AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$，则称 A 与 B 互逆或对立，并称 B 为 A 的逆事件或对立事件，记作 $B=\overline{A}$.

逆事件 $\overline{A}$ 由样本空间 Ω 中不属于 A 的所有样本点组成，即

$$\overline{A}=\Omega-A=\{\omega \mid \omega\in\Omega \text{ 且 } \omega\notin A\}$$

在许多场合，用集合的方式表达事件更容易理解.重要的是要从事件的角度理解集合的关系与运算，并能用这些关系与运算表示各种复杂的事件.

集合与事件对照表见表 1-1.

表 1-1 集合与事件对照表

记号	集合的意义	事件的意义及解释
ω	元素	样本点，基本事件
Ω	全集	样本空间，必然事件：每次试验都发生
$\varnothing$	空集	不可能事件：每次试验都不发生
A	Ω 的子集	随机事件：每次试验不能确定是否发生
$A\subset B$	A 是 B 的子集	A 包含于 B：A 发生 B 必发生
$A=B$	A 与 B 相等	A 与 B 等价：A 发生当且仅当 B 发生
$A\cup B$	A 与 B 的并集	A 与 B 的和事件：$A\cup B$ 发生则 A 与 B 至少有一个发生
$A\cap B$	A 与 B 的交集	A 与 B 的积事件：$A\cap B$ 发生则 A 与 B 都发生
$A-B$	A 与 B 的差集	A 与 B 的差事件：$A-B$ 发生则 A 发生且 B 不发生
$A\cap B=\varnothing$	A 与 B 不交	A 与 B 互斥：A 与 B 不能同时发生
$\Omega-A=B$	A 与 B 互补	A 与 B 互逆：A 与 B 必有一个且仅有一个发生
$\overline{A}$	A 的补集	A 的逆事件：$\overline{A}$ 发生当且仅当 A 不发生

5. 事件的运算律

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$, $AB=BA$.

(2) 结合律：$A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $ABC=(AB)C=A(BC)$.

(3) 分配律：$A(B\cup C)=AB\cup AC$, $A\cup BC=(A\cup B)(A\cup C)$.

(4) 对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$, $\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

上述各运算律均可推广到有限个或可列个事件的情形.

【范例与方法】

例 1 写出下列随机试验的样本空间：

(1) 同时掷三颗骰子，记录三颗骰子的点数之和.

(2) 某班级有 n 个同学,记录该班数学考试的平均成绩.

(3) 生产产品直到得到 10 件正品,记录产品的总件数.

(4) 将一尺之棰折成三段,观察各段的长度.

分析 要正确写出随机试验的样本空间,必须明确试验的目的.

解 (1) 掷一颗骰子可能出现的点数为 1, 2, 3, 4, 5, 6,同时掷三颗骰子,可能出现的点数之和为 3, 4, …, 18,故样本空间 $\Omega=\{3, 4, 5, \cdots, 18\}$.

(2) 某班级有 n 个同学,每个同学考分可能为 0, 1, 2, …, 100,故平均分可为 $\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n\times 100}{n}$,故样本空间为 $\Omega=\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, 100\right\}$.

(3) 要得到 10 件正品,产品的总件数至少为 10 件,故样本空间为

$$\Omega=\{10, 11, 12, \cdots\}.$$

(4) 设 x, y, z 分别为折成的第一段、第二段、第三段的长度,它们应满足的关系为:

$$0<x<1,\quad 0<y<1,\quad 0<z<1,$$

故样本空间为

$$\Omega=\{(x, y, z)\mid x>0, y>0, z>0, x+y+z=1\}$$

例 2 某运动员射击目标是 3 个半径分别为 $r_1=0.1\text{ m}$, $r_2=0.2\text{ m}$, $r_3=0.3\text{ m}$ 的同心圆环域,令 $A_i=\{$击中半径为 r_i 的圆环域$\}(i=1, 2, 3)$,试以事件的集合表示下列情况:

(1) 击中 0.3 m 半径的圆环域外.

(2) 击中任一圆环域内.

(3) 击中 0.1 m 半径的圆环域内.

(4) 击中 0.1 m 半径的圆环域外,0.2 m 半径的圆环域内.

分析 对于事件的集合表示,重要的是要学会用概率的语言来解释集合间的关系和运算,并能运用它们.

解 (1) 击中 0.3 m 半径的圆环域外可表示为 $\overline{A}_3$.

(2) 击中任一圆环域内可表示为 $A_1\cup A_2\cup A_3$.

(3) 击中 0.1 m 半径的圆环域内可表示为 A_1.

(4) 击中 0.1 m 半径的圆环域外,0.2 m 半径的圆环域内可表示为 A_2-A_1.

例 3 一批产品中有合格品也有废品,从中有放回地抽取 3 件产品,以 A_i 表示

第 i 次抽到废品,则下列事件各表示什么含义:

(1) $A_1 \cup A_2$.　(2) $A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$.　(3) $A_1A_2A_3$.　(4) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

(5) $\overline{A}_1A_2A_3 \cup A_1\overline{A}_2A_3 \cup A_1A_2\overline{A}_3$.

分析　此题与例 3 属于同一个问题的两个不同的方面.

解　(1) $A_1 \cup A_2$ 表示第一次和第二次至少抽到一件废品.

(2) $A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$ 表示只有第一次抽到废品.

(3) $A_1A_2A_3$ 表示 3 次都抽到废品.

(4) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ 表示 3 次至少有一次抽到废品.

(5) $\overline{A}_1A_2A_3 \cup A_1\overline{A}_2A_3 \cup A_1A_2\overline{A}_3$ 表示恰有 2 次抽到废品.

例 4　化简下列事件:

(1) $(A \cup B)(A \cup C)$.　　(2) $\overline{(\overline{A}B \cup C)\overline{AC}}$.

分析　利用集合间的运算律.

解　(1) $(A \cup B)(A \cup C) = AA \cup BA \cup AC \cup BC = A \cup BC$

(2) $\overline{(\overline{A}B \cup C)\,\overline{AC}} = (\overline{\overline{A}B \cup C}) \cup AC = (\overline{\overline{A}B}\,\overline{C}) \cup AC = (A \cup \overline{B})\overline{C} \cup AC$

$= A\overline{C} \cup \overline{B}\overline{C} \cup AC = A \cup \overline{B}\overline{C}$

(二) 随机事件的概率

【概念与知识点】

1. 频率和概率

设在 n 次重复试验中,事件 A 的发生次数为 n_A,则称

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

为事件 A 发生的频率.

容易证明,频率具有如下基本性质:

(1) 非负性:对任一事件 A,有 $f_n(A) \geqslant 0$.

(2) 规范性:对必然事件 Ω,有 $f_n(\Omega) = 1$.

(3) 可加性:对任意有限个或可列个两两互斥的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$,有

$$f_n(\bigcup_i A_i) = \sum_i f_n(A_i)$$

事件发生的频率反映事件在重复试验中发生的频繁程度,频率的大小与事件发生可能性的大小密切相关.随着试验次数的增加,事件发生的频率会逐渐稳定地在某个数值附近摆动,因此在大量重复试验的基础上,频率可以作为事件发生可能性

大小的近似估计.

在相同条件下进行重复试验，如果事件 A 发生的频率在某个数值 p 附近摆动，并且摆动的幅度一般随着试验次数的增加而减小，则称数值 p 为事件 A 的概率，记作

$$P(A)=p$$

2. 概率的公理化定义

设随机试验的样本空间为 Ω. 如果对于试验中的每一个事件 A，都赋予一个实数值 $P(A)$，并且赋值规则满足下列三条公理：

(1) 非负性：对任一事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$.

(2) 规范性：对必然事件 Ω，有 $P(\Omega)=1$.

(3) 可加性：对任意有限个或可列个两两互斥的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$，有

$$P(\bigcup_i A_i)=\sum_i P(A_i)$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

概率的公理化定义揭示了概率的数学本质：概率是随机事件的满足三条公理的实值函数. 基于三条公理建立的概率公理化体系，为概率论奠定了严密的逻辑基础，使概率论成为一门严格的数学分支.

3. 概率的性质

(1) 对不可能事件 $\varnothing$，有 $P(\varnothing)=0$.

(2) 对于事件 A 的逆事件 $\overline{A}$，有

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

(3) 对任一事件 A，有

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1$$

(4)（减法公式） 对任意两个事件 A, B，有

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)$$

推论 如果 $B\subset A$，则有

$$P(A-B)=P(A)-P(B)$$

(5)（加法公式） 对任意两个事件 A, B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

特别地，当 A 与 B 互斥时，有 $P(AB)=0$，上式即为概率的可加性

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

一般地，对任意 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，有加法公式

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

利用概率的性质和公式，可以计算比较复杂的事件的概率.

【范例与方法】

例 1 已知 $P(\overline{A}\cup B)=0.75$，$P(\overline{A}\cup\overline{B})=0.8$，$P(B)=0.3$，求下列概率：

(1) $P(AB)$. (2) $P(A)$. (3) $P(A\cup B)$. (4) $P(\overline{A}\overline{B})$.

(5) $P(B-A)$. (6) $P(A\cup\overline{B})$.

分析 此例为基本的概率计算题，可利用事件的关系与运算以及概率的性质与公式计算.

解 根据已知条件，分别计算如下：

(1) $P(AB)=1-P(\overline{AB})=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-0.8=0.2$

(2) $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})=P(AB)+1-P(\overline{A}\cup B)$

$=0.2+1-0.75=0.45$

(3) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.45+0.3-0.2=0.55$

(4) $P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.55=0.45$

(5) $P(B-A)=P(B)-P(AB)=0.3-0.2=0.1$

(6) $P(A\cup\overline{B})=1-P(\overline{A\cup\overline{B}})=1-P(\overline{A}B)$

$=1-P(B-A)=1-0.1=0.9$

例 2 已知 $P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$，求 $P(\overline{A}\cup\overline{B})$.

分析 此例可利用对偶率及逆事件概率计算.

解 由 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$，可得

$$P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.7-0.3=0.4$$

从而所求概率为

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.4=0.6$$

例 3 设 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.3$，且 A 与 B 互斥，求下列概率：

(1) $P(A\cup B)$.

(2) $P(\overline{A}\cup B)$.

分析 此例要利用加法公式计算.

解 由 A 与 B 互斥，有 $P(AB)=0$. 根据加法公式，所求概率为

(1) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.4+0.3-0=0.7$

(2) $$\begin{aligned}P(\overline{A}\cup B)&=P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A}B)\\&=[1-P(A)]+P(B)-[P(B)-P(AB)]\\&=1-P(A)+P(AB)=1-0.4+0=0.6\end{aligned}$$

例 4 某市发行 A，B 两种报纸，经调查，在两种报纸的订户中，订阅 A 报的有 45%，订阅 B 报的有 35%，同时订阅 A，B 两种报纸的有 10%，求只订一种报纸的概率.

分析 令 $A=\{$订阅 A 报$\}$，$B=\{$订阅 B 报$\}$，则 $A\overline{B}\cup\overline{A}B=\{$只订阅一种报纸$\}$. 已知 $P(A)$，$P(B)$ 和 $P(AB)$，可利用概率的性质求 $P(A\overline{B}\cup\overline{A}B)$.

解 根据题意，有 $P(A)=45\%$，$P(B)=35\%$，$P(AB)=10\%$，故所求概率为

$$\begin{aligned}P(A\overline{B}\cup\overline{A}B)&=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)-P(A\overline{B}\cap\overline{A}B)\\&=[P(A)-P(AB)]+[P(B)-P(AB)]-P(\varnothing)\\&=P(A)+P(B)-2P(AB)\\&=45\%+35\%-2\times10\%=60\%\end{aligned}$$

例 5 设 $P(A)=a$，$P(B)=2a$，$P(C)=3a$，$P(AB)=P(BC)=b$，证明 $a\leqslant\dfrac{1}{4}$.

分析 此例可利用概率的性质证明.

证 根据题意及概率的性质，有

$$P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(BC)=2a+3a-b=5a-b\leqslant1$$

又由 $AB\subset A$，有 $b=P(AB)\leqslant P(A)=a$，从而有

$$4a\leqslant5a-b\leqslant1$$

由此可得 $a\leqslant\dfrac{1}{4}$.

(三) 古典概型与几何概型

【概念与知识点】

1. 古典概型

设随机试验仅有有限个可能结果,并且每次试验中各种结果出现的可能性相同,这类随机试验模型中的概率可通过计算样本点个数确定,称为古典概型.

古典概型中的概率定义为:设古典概型的样本空间 Ω 含有 n 个样本点,事件 A 含有 k 个样本点,则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{\text{事件 } A \text{ 所含样本点的个数}}{\text{样本空间 } \Omega \text{ 所含样本点的个数}}$$

按上述定义计算的概率称为古典概率. 计算古典概率的关键是求出样本空间和事件所含样本点的个数,通常需要用到排列组合知识.

2. 几何概型

设随机试验的样本空间为某个有界几何区域,并且每次试验中各样本点等可能出现,这类随机试验模型中的概率可通过几何方法确定,称为几何概型.

几何概型中的概率定义为:设几何概型的样本空间 Ω 为一有界区域,其测度为 $m(\Omega)$;事件 A 为样本空间 Ω 的子区域,其测度为 $m(A)$,则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{\text{事件 } A \text{ 的测度}}{\text{样本空间 } \Omega \text{ 的测度}}$$

按上述定义计算的概率称为几何概率. 计算几何概率的关键是求出样本空间和事件区域的测度,有时需要用到积分知识.

【范例与方法】

例 1 袋内有 m 个白球和 n 个黑球,求下列事件的概率:

(1) 有放回地每次任取 1 球,第 k 次取到白球.

(2) 无放回地每次任取 1 球,第 k 次取到白球.

分析 此例是古典概型中常见的摸球问题. 用排列组合知识求解古典概型问题时,要考虑事件是否与顺序有关,从而确定用排列还是用组合来计算事件的概率. 同此,此例反映了"抽签原理":不论是有放回取球还是无放回取球,取到白球的概率均与取球的先后次序无关,在体育比赛和其他一些机会均等的活动场合常用到这一原理.

解 令 $A=\{$第 k 次取到白球$\}$,下面分别讨论:

(1) 有放回地从 m 个白球和 n 个黑球中每次任取 1 球,连取 k 次,共有 $(m+n)^k$ 种取法;第 k 次取到白球有 $m(m+n)^{k-1}$ 种取法,所求概率为