高等学校教材

$$A^{T}A=\begin{pmatrix}\alpha_1^{T}\\ \alpha_2^{T}\\ \vdots\\ \alpha_n^{T}\end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=E$$

线性代数

XIANXING DAISHU

主 编 崔 唯
副主编 姚志鹏 胡大红 何 丹
主 审 陈盛双

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

高等学校教材

$$A^{T}A=\begin{pmatrix}\alpha_1^{T}\\ \alpha_2^{T}\\ \vdots\\ \alpha_n^{T}\end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=E$$

线性代数

XIANXING DAISHU

主　编　崔　唯
副主编　姚志鹏　胡大红　何　丹
主　审　陈盛双

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/崔唯主编. —武汉:武汉大学出版社,2013.8
ISBN 978-7-307-11301-5

Ⅰ.线…　Ⅱ.崔…　Ⅲ.线性代数—高等学校—教材　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 145082 号

责任编辑:孙　丽　　责任校对:郭　芳　　装帧设计:吴　极

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:whu_publish@163.com　网址:www.stmpress.cn)
印刷:武汉鑫泰和印务有限责任公司
开本:787×960　1/16　印张:12.25　字数:244 千字
版次:2013 年 8 月第 1 版　　2013 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-11301-5　　定价:25.00 元

前　言

线性代数作为理工类、经管类高等院校本、专科学生的一门重要基础课，对于培养大学生的计算和抽象思维能力十分必要. 线性代数工具几乎可应用于现代社会所有的学术领域，它与现代计算技术的交互有广泛的实际应用已是无须多言的事实. 汉口学院的数学老师们编写的这本《线性代数》教材适用于大学非数学专业的本、专科学生.

本书的主要内容包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的相似、二次型、线性空间与线性变换. 由于高等学校对不同层次的非数学专业的线性代数课程教学提出了不同的基本要求，所以本教材在编写过程中，力求概念清晰，推证严谨，内容紧凑，在一些内容处理上力求简洁明了，概念陈述通俗易懂，尽可能使学生融会贯通，学好这门课.

全书习题丰富，每节配备练习题，每章配备总习题，最后还附有 2004—2013 年硕士研究生入学考试试题(线性代数部分). 习题形式多样化，便于自学.

本书由崔唯老师担任主编并进行统稿，姚志鹏、胡大红、何丹老师担任副主编. 在本书的编写过程中，陈盛双教授对编写大纲、书稿内容进行了深入、细微的审查和审订，提出了许多宝贵的修改意见和建议，并逐一指出了书中的不完善之处，在此特向参与本书编写的所有老师表示衷心的感谢.

由于编者水平有限，加之编写时间仓促，书中难免有不妥之处，希望使用本教材的教师和学生能提出宝贵的意见和建议.

编　者
2013 年 2 月

目　　录

1 行　列　式

> 一个国家只有数学蓬勃发展，才能表现她的国力强大.
>
> ——拉普拉斯(Laplace)

行列式源于解线性方程组的需要，它是线性代数的一个重要研究对象，也是现代数学中一个十分有用的工具. 在经济、管理及工程技术等领域，行列式也有着极其广泛的应用. 本章主要介绍行列式的定义、性质及其计算方法，此外，还介绍了用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克莱姆(Cramer) 法则.

1.1　行列式的定义

1.1.1　二阶与三阶行列式

1. 二阶行列式

解二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1-1}$$

用消元法，以 a_{22} 与 a_{12} 分别乘以上列两方程的两端，然后将两方程相减消去 x_2，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

类似地，消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组(1-1) 的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{1-2}$$

为了便于记忆，研究二元线性方程组(1-1) 的解的规律后发现，式(1-2) 中的分子、分母都是四个数两对相乘再相减而得，其中分母 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 是由方程组(1-1) 的四个系数确定的，把这四个数按其在方程组(1-1) 中的位置，排成两行两列(横排称**行**，竖排称**列**) 的数表，并在左右两侧各加一竖线得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1-3}$$

称式(1-3) 为**二阶行列式**,表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

数 $a_{ij}\,(i=1,2;j=1,2)$ 称为二阶行列式的**元素**,元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为**行标**,第二个下标 j 称为**列标**. 上述二阶行列式的定义,可用对角线法则来记忆,记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

即实线连接的两个元素的乘积减去虚线连接的两个元素的乘积,实线称为**主对角线**,虚线称为**副对角线**.

利用二阶行列式的概念,方程组(1-1) 的解可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

这里的分母 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 是由方程组(1-1) 的系数所确定的二阶行列式(称为**系数行列式**). x_1 的分子 $D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11},a_{21} 所得的二阶行列式;x_2 的分子 $D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$ 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12},a_{22} 所得的二阶行列式.

【例 1.1】 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2=8 \\ 2x_1+\ x_2=1 \end{cases}.$$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=5\neq 0,\quad D_1=\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=10,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-15$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{10}{5}=2,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-15}{5}=-3$$

2. 三阶行列式

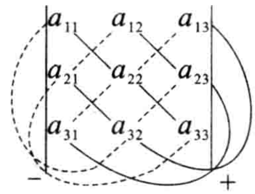
定义 1 将 9 个数排成三行三列,并在左右两侧各加一竖线,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1-4}$$

称式(1-4)为三阶行列式. 它表示

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

上述定义表明三阶行列式含 6 项，每项均为不同行、不同列的 3 个元素的乘积，再冠以正负号，其规律遵循式(1-5)所示的对角线法则：



(1-5)

【例 1.2】 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 8 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 按对角线法则有

$$\begin{aligned} D &= 1\times(-3)\times 2+(-1)\times 0\times 4+0\times 2\times 8-0\times(-3)\times 0 \\ &\quad -8\times(-1)\times 1-2\times 4\times 2 \\ &=-14 \end{aligned}$$

【例 1.3】 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0$ 的充分必要条件是什么？

解 按对角线法则有

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= a\times a\times 1+1\times 1\times 0+4\times 0\times 1-0\times a\times 4-0\times 1\times a-1\times 1\times 1 \\ &= a^2-1>0 \end{aligned}$$

当且仅当 $|a|>1$ 时，$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0$.

因此，$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0$ 的充分必要条件是 $|a|>1$.

1.1.2 全排列与逆序数

定义 2 由 n 个不同的元素排成一列，叫作这 n 个元素的**全排列**(也简称排

列),记为 $i_1 i_2 \cdots i_n$.

例如,12345 及 24531 都是 5 级排列,342165 是一个 6 级排列.

定义 3　在一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中,如果有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 前面 $(i_s < i_t)$,则称 i_t 与 i_s 构成一个**逆序**,一个 n 级排列中逆序的总数,称为它的**逆序数**,记为 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

定义 4　逆序数是奇数的排列称为**奇排列**,逆序数是偶数的排列称为**偶排列**.

例如,$N(32514) = 2+1+2+0 = 5$,所以,32514 是奇排列;$N(412536) = 3+0+0+1+0 = 4$,所以,412536 是偶排列;$N(1234\cdots n) = 0$,所以,$1234\cdots n$ 是偶排列.

定义 5　在一个排列 $i_1 i_2 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n$ 中,如果仅将它的两个元素 i_s 与 i_t 对调,其他元素不变,得到另一排列 $i_1 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$,这样的变换称为**一个对换**,记为**对换** (i_s, i_t).

例如,对排列 21354 施以对换(1,4) 后得到排列 24351. 21354 为偶排列,而 24351 为奇排列,可见对换后奇偶性改变.

定理 1　任意一个排列经过一个对换后奇偶性改变.

定理 2　n 个数$(n > 1)$ 共有 $n!$个 n 级排列,其中奇偶排列各占一半.

1.1.3　n 阶行列式的定义

观察三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

容易看出:

(1) 三阶行列式的展开式的每一项均是三个元素的乘积,这三个元素位于不同行、不同列. 而所有不同行、不同列的三个元素乘积的代数和即是此行列式的值. 三个元素的乘积可表示为 $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$,$j_1 j_2 j_3$ 是一个 3 级排列,当 $j_1 j_2 j_3$ 取遍所有的 3 级排列时,即得三阶行列式的所有项(不包含符号),共有 $3!(=6)$ 项.

(2) 每一项的符号是:当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后,如果对应的列标构成的排列是偶排列,则取正号;是奇排列,则取负号.

所以,三阶行列式可写成:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2 j_3)} (-1)^{N(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

推广到 n 阶:

定义 6 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

称为 **n 阶行列式**. 其中横排称为行,纵排称为列. a_{ij} 称为第 i 行、第 j 列的元素. n 阶行列式还可记为 $D_n=|a_{ij}|$ 或 $D_n=\det(a_{ij})$.

n 阶行列式的展开式共有 $n!$ 项. $j_1j_2\cdots j_n$ 是一个 n 级排列,当 $j_1j_2\cdots j_n$ 取遍所有 n 级排列时,则得到 n 阶行列式表示的代数和中所有的项. 各项的符号是:当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后,若对应的列标构成的排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列,则取正号;是奇排列,则取负号.

一阶行列式 $|a|=a$,注意不要与绝对值记号相混淆.

例如,$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 的列标的逆序数 $N(4312)=5$. 所以,$-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 为 D_4 的一项,而 $a_{15}a_{23}a_{31}a_{45}a_{52}$ 却不是 D_5 的一项.

【例 1.4】 用行列式的定义计算

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 由定义 6 得

$$D=\sum_{j_1j_2j_3j_4}(-1)^{N(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

只有当 $j_1=4,j_2=1,j_3=2,j_4=3$ 时,

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}\neq 0$$

所以

$$D=(-1)^{N(4123)}a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}=-a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}=-1\times1\times1\times1=-1$$

【例 1.5】 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 因为 $D_n=\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,而第一行只有 $a_{11}\neq 0$,所以,一般项中第一个元素 a_{1j_1},$j_1=1$. 而第二行只有 $a_{21}\neq 0,a_{22}\neq 0$,则 j_2 只取 1,2. 第一元素 a_{11} 已取自第一列,因此,第二个元素不能再取自第一列,故第二个元素只能取 a_{22}. 依次类推,可得 $j_3=3,j_4=4,\cdots,j_n=n$. 因此,D_n 中只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项不为 0,而其他项均为 0. 又 $N(123\cdots n)=0$,所以这一项取正号,即

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

主对角线以上(下)的元素都为 0 的行列式叫作**下(上)三角行列式**. 同理可得

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

也可得对角行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

习题 1.1

1. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 8 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

2. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix} > 0$ 的充分必要条件是什么?

3. 求下列排列的逆序数:

(1) 3712456; (2) 36715284;

(3) $n(n-1)\cdots 321$; (4) $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$.

4. 选择 k,l 使 $a_{13}a_{2k}a_{34}a_{42}a_{5l}$ 成为 5 阶行列式中前面为负号的项.

5. 用行列式的定义计算下列行列式的值:

(1) $D_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; (2) $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

(3) $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

6. 试求函数 $f(x) = \begin{vmatrix} 0 & 2x & x & -x \\ 2x & 2 & 1 & 5x \\ x & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & x & 3x \end{vmatrix}$ 中 x^4 的系数.

1.2 行列式的性质

直接利用行列式的定义计算行列式一般很困难,行列式的阶数越高,计算越复杂. 为了简化行列式的计算,我们来研究行列式的性质.

1.2.1 行列式的性质

将行列式 D 的行与列互换得到的行列式,称为 D 的**转置行列式**,记为 D^{T} 或 D',即若

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1 行列式与其转置行列式相等,即 $D = D^{\mathrm{T}}$.

证 设 $D = \det(a_{ij})$,其转置行列式 $D^{\mathrm{T}} = \det(b_{ij})$,因为 $b_{ij} = a_{ji}\,(i,j = 1, 2,\cdots,n)$,则由行列式的定义得

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{nj_n} \\ &= \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} = D \end{aligned}$$

由此性质可知,行列式中行与列具有同等地位,行列式的性质若是对行成立,

则对列也必定成立,反之也一样.

性质 2 交换行列式的两行(列),行列式变号.

证 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ (i\text{ 行}) \\ \\ (m\text{ 行}) \\ \\ \\ \end{array}$$

交换 D 的第 i 行与第 m 行对应的元素,得

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ (m\text{ 行}) \\ \\ (i\text{ 行}) \\ \\ \\ \end{array}$$

显然,

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{mj_m}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{mj_m}\cdots a_{nj_n}=-D \end{aligned}$$

D 的一般项中 n 个元素的乘积也是 D_1 的一般项中 n 个元素的乘积,且都是 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$. 而由排列 $j_1j_2\cdots j_i\cdots j_m\cdots j_n$ 变换为 $j_1j_2\cdots j_m\cdots j_i\cdots j_n$ 后,排列的奇偶性改变,所以 $D_1=-D$.

推论 1 如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式等于 0.

性质 3 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘以此行列式.

证 设

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

显然，$D_1=k\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=kD.$

推论 2 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

性质 4 如果行列式有两行(列)的元素对应成比例，则此行列式等于 0.

性质 5 若行列式某行(列)的元素都是两数之和，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 D 等于下列两个行列式之和，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6 把行列式的某一行(列)的所有元素同乘以数 k，再加到另一行(列)对应的元素上，行列式的值不变.

例如，以数 k 乘以第 j 行，再加到第 i 行上.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示第 i 列，则交换 i,j 两行(列)记作 $r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$. 第 i 行(列)乘以 k，记作 $r_i\times k(c_i\times k)$. 以数 k 乘以第 j 行(列)加到第 i 行(列)上，记作 $r_i+kr_j(c_i+kc_j)$.

利用行列式的性质计算行列式，可以使计算简化.

【例 1.6】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&3&-4\\-4&6&8\\7&-12&-14\end{vmatrix}.$$

解　因为第一列与第三列对应元素成比例，则由性质 4 得 $D=0$.

【例 1.7】 计算

$$D_4=\begin{vmatrix}1&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&0\\4&-2&-1&-1\\-2&1&2&1\\-4&3&2&1\end{vmatrix}.$$

解　利用性质3及推论2，以 2 乘以第 1 行，再以$\frac{1}{2}$乘以行列式，使行列式的元素都为整数，然后利用性质 6，将其化为上三角行列式. 即

$$D_4\xlongequal{2r_1}\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2&3&1&0\\4&-2&-1&-1\\-2&1&2&1\\-4&3&2&1\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+2r_1]{\substack{r_2-2r_1\\r_3+r_1}}\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2&3&1&0\\0&-8&-3&-1\\0&4&3&1\\0&9&4&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2+r_4}\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2&3&1&0\\0&1&1&0\\0&4&3&1\\0&9&4&1\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-9r_2]{r_3-4r_2}\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2&3&1&0\\0&1&1&0\\0&0&-1&1\\0&0&-5&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-5r_3}\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2&3&1&0\\0&1&1&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-4\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\times2\times1\times(-1)\times(-4)=4$$

【例 1.8】 计算

$$D_4=\begin{vmatrix}a&b&b&b\\b&a&b&b\\b&b&a&b\\b&b&b&a\end{vmatrix}.$$

解　本行列式的特点是各行元素之和相等，可利用性质 6，将第 2，3，4 列都加到第 1 列，再将公因子提出，对行作运算，就可化为上三角行列式. 即

$$D_4\xlongequal{c_1+c_2+c_3+c_4}\begin{vmatrix}a+3b&b&b&b\\a+3b&a&b&b\\a+3b&b&a&b\\a+3b&b&b&a\end{vmatrix}=(a+3b)\begin{vmatrix}1&b&b&b\\1&a&b&b\\1&b&a&b\\1&b&b&a\end{vmatrix}$$