普通高等教育“十二五”规划教材

材料力学学习指导

郭应征　编著

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

材料力学学习指导

编著　郭应征

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

内 容 提 要

本书为《普通高等教育“十一五”规划教材　材料力学》的配套教学用书。全书按照材料力学课程的教学内容，共分为十二章，每章均设有内容简介，例题解析和自测题与答案三个部分。内容简介简述了各章的教学基本要求以及重点和难点，是各章内容的小结，以便于读者复习和全面掌握；例题解析对精选的典型例题阐述了分析的方法和过程，列出了具体的解题步骤，进行了详细地解答，并对易出现的错误概念和解法进行简要的讨论和分析，力求将对概念和方法的理解引向深入。为满足读者考研和参加力学竞赛的需要，例题中精选了一定数量的难题，希望通过对难题的分析帮助读者攻克学习中的难点，起到举一反三的作用。自测题与答案从各高校往年研究生入学试卷中挑选出具有代表性的全真试题，按章分类编排，供读者自练以及自我检查，每题均附有答案。

本书可作为高等工科院校的学生学习材料力学课程的教学辅导书，也可作为报考相关工科专业硕士研究生以及参加大学生力学竞赛的复习指导书，还可供大学力学教师和一般工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

材料力学学习指导/郭应征编著. —北京：中国电力出版社，2013.7

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-5123-4367-2

Ⅰ.①材…　Ⅱ.①郭…　Ⅲ.①材料力学－高等学校－教学参考资料　Ⅳ.①TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 086237 号

中国电力出版社出版、发行
（北京市东城区北京站西街 19 号　100005　http://www.cepp.sgcc.com.cn）
北京丰源印刷厂印刷
各地新华书店经售
*
2013 年 7 月第一版　2013 年 7 月北京第一次印刷
787 毫米×1092 毫米　16 开本　19.25 印张　468 千字
定价 **34.00** 元

前　　言

材料力学是高等院校中一门与机械、土木、航空、交通、材料和工程力学等许多工科专业密切相关的重要的学科基础课，也是报考这些工科专业硕士研究生的考试课程，同时，也是国家级和省级大学生力学竞赛的必考科目。

要学好材料力学课程，首先要搞清基本概念，掌握基本理论和基本方法，然后必须亲自动手实践，分析和演算一定数量的习题，包括一些较难的题目。通过做题逐步加深对基本概念的理解，掌握基本理论和基本方法的实际应用，从而提高分析问题和解决问题的能力。这就需要一本能指导大学生通过扎实高效地自主学习，达到较满意的学习和备考要求的材料力学辅导教材。

本书是与中国电力出版社出版郭应征编的《材料力学》相配套的教学辅助教材，按照材料力学课程的教学内容，共分为十二章，每章均设有内容简介，例题解析和自测题与答案三个部分。

本书可作为高等工科院校的学生学习材料力学课程的教学辅导书，也可作为报考相关工科专业硕士研究生以及参加大学生力学竞赛的复习指导书，还可供大学力学教师和一般工程技术人员参考。

编　者

2013 年春于东南大学

目 录

第1章 拉伸与压缩

1.1 内容简介

1.1.1 基本要求

(1) 建立轴力的概念，熟练掌握轴力的计算和画轴力图的方法。

(2) 正确建立应力的概念，掌握拉、压直杆横截面和斜截面上正应力的计算。

(3) 了解低碳钢和铸铁在拉伸和压缩时的力学行为。了解应力集中的概念。

(4) 熟练掌握拉压杆三种强度问题的计算方法，建立安全因数的概念及了解确定许用应力的方法。

(5) 熟练掌握用胡克定律计算拉压杆变形的方法，明确弹性模量、泊松比、拉压刚度的概念。

(6) 熟练掌握拉压静不定问题（包括温度应力和装配应力）的解法，掌握"以切代弧"求桁架节点位移的方法。

(7) 建立应变能和应变能密度的概念，掌握拉压杆应变能和应变能密度的计算方法。

1.1.2 重点与难点

1. 轴向拉压杆的内力

轴向拉压杆横截面上的内力称为轴力，用符号 F_N 表示。求轴力采用截面法，以使物体产生的变形来规定内力的正负号，轴力以拉为正，压为负。

2. 拉压杆横截面上的应力

轴向拉压杆横截面上的应力垂直于截面，为正应力，在整个横截面上均匀分布，其计算公式为

$$\sigma = \frac{F_N}{A}$$

轴向拉压杆横截面上的正应力公式的适用范围：

(1) 适用于弹性和塑性变形。

(2) 适用于锥角小于 20°，横截面连续变化的直杆。

3. 轴向拉压杆的强度计算

轴向拉压直杆的强度条件为

$$\sigma_{\max}=\left(\frac{F_{\mathrm{N}}}{A}\right)_{\max}\leqslant[\sigma]$$

其中许用应力的计算式为

$$[\sigma]=\frac{\sigma_{\mathrm{u}}}{n}$$

式中，σ_{u} 为材料的极限应力，对于塑性材料为材料的屈服极限 σ_{s}，对于脆性材料为材料的强度极限 σ_{b}。n 为安全因数。

强度计算的三类问题为

校核强度 $$\sigma_{\max}=\left(\frac{F_{\mathrm{N}}}{A}\right)_{\max}\leqslant[\sigma]$$

设计截面 $$A\geqslant\frac{F_{\mathrm{N}}}{[\sigma]}$$

确定许可载荷 $$F_{\mathrm{N}}\leqslant[\sigma]A$$

4. 轴向拉压杆的变形计算

轴力 $F_{\mathrm{N}}(x)$ 和横截面积 $A(x)$ 沿轴线变化时，微段 $\mathrm{d}x$ 的轴向变形为

$$\mathrm{d}(\Delta l)=\frac{F_{\mathrm{N}}(x)\mathrm{d}x}{EA(x)}$$

直杆轴向总变形为

$$\Delta l=\int_0^l\frac{F_{\mathrm{N}}(x)\mathrm{d}x}{EA(x)}$$

上式适用于应力不超过材料比例极限的弹性范围。当 F_{N}、A、E 均为常数时，可得

$$\Delta l=\frac{F_{\mathrm{N}}l}{EA}$$

对于阶梯形拉压杆件，其总变形应分段计算，再代数相加，即

$$\Delta l=\sum_{i=1}^{n}\frac{F_{\mathrm{N}i}l_i}{EA_i}$$

拉压杆的轴向线应变为

$$\varepsilon=\frac{\Delta l}{l}=\frac{\sigma}{E}$$

拉压杆的横向线应变为

$$\varepsilon'=-\mu\varepsilon$$

式中 μ 为泊松比，其表达式为

$$\mu=\left|\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right|$$

5. 拉压杆的应变能

杆件在外力作用时杆内贮存的能量称为**应变能**。若变形是弹性的，则为弹性应变能。在静载作用下，杆内弹性应变能的数值等于外力所作的功。轴向拉压杆的弹性应变能为

$$V_{\varepsilon}=\frac{1}{2}F_{\mathrm{N}}\Delta l=\frac{F_{\mathrm{N}}^2l}{2EA}=\frac{EA\Delta l^2}{2l}$$

杆件单位体积内贮存的应变能称为**应变能密度**。若变形是弹性的，则为弹性应变能密度。轴向拉压杆的弹性应变能密度为

$$\nu_\varepsilon = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{E\varepsilon^2}{2}$$

6. 拉压超静定问题

未知力的数目多于独立的静力平衡方程数，仅用静平衡方程不能求出全部未知数的问题，称为超静定问题。未知力的数目与独立静平衡方程数的差值，为超静定次数。必须根据变形几何关系和物理关系，列出补充方程。

解超静定问题的一般步骤为：

（1）由静平衡条件列出平衡方程，确定超静定次数；

（2）根据结构变形的几何相容条件，列出变形的几何方程；

（3）由胡克定律，列出杆件变形与轴力之间的物理方程，代入几何方程，得补充方程；

（4）将补充方程和静平衡方程联立，求解全部未知数。

采用静力关系、几何关系、物理关系求解超静定问题的“三关系法”，是求解固体力学各种问题的基本方法，是材料力学方法的精髓。

1.2 例题解析

【例 1.1】 实心圆杆 1 在其外表面紧套空心圆管 2，如图 1.1 所示。设杆的拉压刚度分别为 E_1A_1 和 E_2A_2。假设圆杆和圆管之间无相对滑动，若此组合杆承受轴向拉力 F，试求其长度的改变量。

解 设杆 1 和管 2 的轴力分别为 F_1 和 F_2，由平衡条件得

$$F_1 + F_2 = F \tag{1}$$

2 个未知数 1 个方程，为一次超静定。由杆 1 和管 2 的伸长量相同可得几何方程

$$\Delta l_1 = \Delta l_2$$

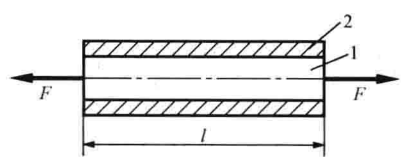

图 1.1

将物理关系代入上式，得力的补充方程

$$\frac{F_1 l}{E_1A_1} = \frac{F_2 l}{E_2A_2} \tag{2}$$

联立式（1）和（2），解得组合杆的伸长量为

$$\Delta l = \frac{F_1 l}{E_1A_1} = \frac{Fl}{E_1A_1 + E_2A_2}$$

【例 1.2】 拉杆受载如图 1.2（a）所示。已知均布载荷的集度为 q，试作拉杆的轴力图。

解 以拉杆左端为原点，建立水平向右的坐标轴 x，由截面法可得拉杆的轴力方程为

$$F_N(x) = qx \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

由对称性，可画出拉杆的轴力图如图 1.2 所示。

【例 1.3】 在图 1.3（a）所示结构中，杆 BC 和杆 BD 的材料相同，且受拉和受压时的许用应力相等，已知载荷 F，杆 BC 长 l，许用应力为 $[\sigma]$。试求使该结构的用料最省时

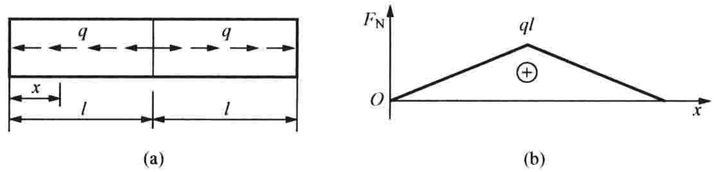

图 1.2

的 α 角。

解 研究点 B［图 1.3（b）］，设两杆轴力为 F_1 和 F_2。

由节点的平衡方程可得

$$F_1=\frac{F}{\sin\alpha},\quad F_2=F\cot\alpha$$

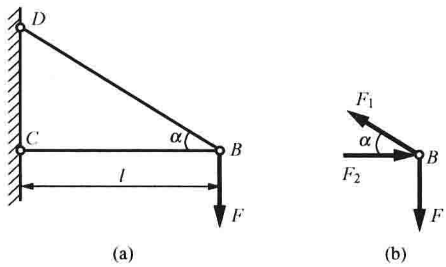

图 1.3

若使两杆的应力均达到许用应力值，则有

$$A_1=\frac{F_1}{[\sigma]}=\frac{F}{\sin\alpha[\sigma]},\quad A_2=\frac{F_2}{[\sigma]}=\frac{F\cot\alpha}{[\sigma]}$$

该结构体积为

$$V=A_1\frac{l}{\cos\alpha}+A_2l=\frac{Fl}{\sin\alpha\cos\alpha[\sigma]}+\frac{Fl\cos\alpha}{[\sigma]}$$

若 V 为最小，则有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\alpha}=0$$

即

$$\frac{\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=0$$

可得

$$\tan\alpha=\sqrt{2},\quad \alpha=54.74^\circ$$

当 $\alpha=54.74^\circ$时，结构的用料最省。

【例 1.4】 圆锥形杆长 l 如图 1.4 所示，已知两端的面积分别为 A_0 和 A_1，铅垂作用力 F，假设锥角 α 远小于 20°，试求：

(1) 杆的伸长量；

(2) 杆内贮存的应变能。

解 (1) 求杆的伸长量。

建立图示坐标系，由比例关系可得该杆横截面积为

$$A(x)=\frac{A_1x^2}{l_1^2}\tag{a}$$

锥形杆总伸长为

$$\Delta l=\int_{l_1-l}^{l_1}\frac{F\mathrm{d}x}{EA(x)}=\int_{l_1-l}^{l_1}\frac{Fl_1^2}{EA_1x^2}\mathrm{d}x=\frac{Fll_1}{(l_1-l)EA_1}\tag{b}$$

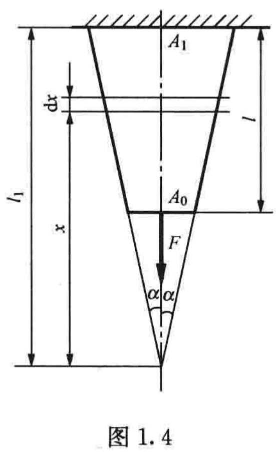

图 1.4

当 $x=l_1-l$ 时，$A=A_0$，由式（a）可得

$$A_0=A_1\frac{(l_1-l)^2}{l_1^2}$$

即

$$\frac{l_1}{l_1 - l} = \sqrt{\frac{A_1}{A_0}}$$

代入式（b）得

$$\Delta l = \frac{FL}{E\sqrt{A_1 A_0}}$$

（2）求杆内贮存的应变能。

认为横截面上的应力仍是均匀分布的，则 x 处横截面上正应力为

$$\sigma(x) = \frac{F}{A(x)} = \frac{Fl_1^2}{A_1 x^2}$$

应变能密度为

$$\nu_\varepsilon(x) \frac{[\sigma(x)]^2}{2E} = \frac{F^2 l_1^4}{2EA_1^2 x^4}$$

杆内总应变能为

$$V_\varepsilon = \int_V \nu_\varepsilon(x) \mathrm{d}V = \int_{l_1 - l}^{l_1} \nu_\varepsilon(x) A(x) \mathrm{d}x = \int_{l_1 - l}^{l_1} \frac{F^2 l_1^2}{2EA_1 x^2} \mathrm{d}x = \frac{P^2 l}{2E\sqrt{A_0 A_1}}$$

以上结果也可以由“外力功等于应变能”的功能原理得到

$$V_\varepsilon = W = \frac{1}{2} F \Delta l = \frac{F^2 l}{2E\sqrt{A_0 A_1}}$$

【例 1.5】 两端固定的等直杆 AB，如图 1.5 所示。已知沿轴向均匀分布的载荷集度为 q，杆长为 l，拉压刚度为 EA，试求：

（1）任一横截面的轴向位移；

（2）横截面最大的轴向位移及其位置。

解 （1）求杆 AB 任一横截面的轴向位移。

研究杆 AB（图 1.5），由平衡条件得

$$F_A + F_B - ql = 0$$

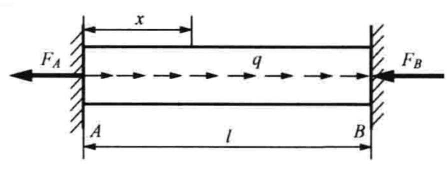

图 1.5

由截面法求得轴力方程为

$$F_N(x) = F_A - qx$$

由“杆的总伸长量为零”的变形几何条件

$$\Delta l = \int_0^l \frac{F_N(x) \mathrm{d}x}{EA} = \int_0^l \frac{(F_A - qx) \mathrm{d}x}{EA} = \frac{F_A l}{EA} - \frac{ql^2}{2EA} = 0$$

可得

$$F_A = \frac{ql}{2}$$

杆 AB 任一横截面的轴向位移为

$$\delta(x) = \int_0^x \frac{F_A - qx}{EA} \mathrm{d}x = \frac{F_A x}{EA} - \frac{qx^2}{2EA} = \frac{qx(l - x)}{2EA}$$

（2）求横截面最大轴向位移及其位置。

由 $\frac{\mathrm{d}\delta(x)}{\mathrm{d}x} = 0$ 得

$$ql - 2qx = 0$$

解得：$x=\dfrac{l}{2}$

即 $x=\dfrac{l}{2}$ 处横截面的轴向位移最大，其最大轴向位移为

$$\delta_{\max}=\delta\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{q\,\dfrac{l}{2}\left(l-\dfrac{l}{2}\right)}{2EA}=\frac{ql^2}{8EA}$$

【例 1.6】 支架如图 1.6（a）所示，杆 BCD 可视作刚体。已知：作用力为 F，杆 1 和杆 2 的材料和截面积均相同，即有 $E_1=E_2$，$A_1=A_2$，两杆的拉压许用应力分别为 $[\sigma_t]$ 和 $[\sigma_c]$，试求两杆的横截面积。

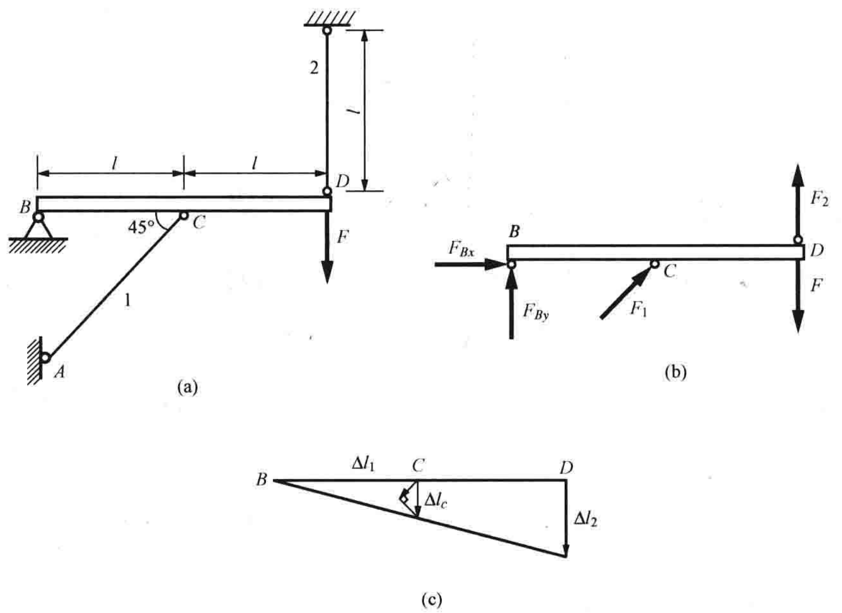

图 1.6

解 （1）静力关系。

研究杆 BCD，受力图如图 1.6（b）所示，得

$$\sum M_B=0,\quad F_1\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot l+F_2\cdot 2l-F\cdot 2l=0$$

可得
$$\sqrt{2}F_1+4F_2=4F \tag{a}$$

2 个未知数 1 个方程，为一次超静定。

（2）几何关系。

画杆 BCD 的变形图，如图 1.6（c）所示，得几何方程为

$$\Delta l_2=2\Delta l_C=2\sqrt{2}\Delta l_1 \tag{b}$$

（3）物理关系。

$$\Delta l_1=\frac{F_1\sqrt{2}l}{EA_1},\quad \Delta l_2=\frac{F_2 l}{EA_2}$$

代入式（b），得

$$\frac{F_2 l}{EA_2} = 2\sqrt{2}\,\frac{F_1\sqrt{2}l}{EA_1}$$

解得

$$F_2 = 4F_1 \tag{c}$$

联立求解式（a）和式（c），得

$$F_1 = \frac{4F}{\sqrt{2}+16},\quad F_2 = \frac{16F}{\sqrt{2}+16}$$

杆 1 为压杆，杆 2 为拉杆，可建立两杆的强度条件为

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{4F}{(\sqrt{2}+16)A_1} \leqslant [\sigma_c],\quad \sigma_2 = \frac{F_2}{A_2} = \frac{16F}{(\sqrt{2}+16)A_2} \leqslant [\sigma_t]$$

由上式解得

$$A_1 \geqslant \frac{4F}{(\sqrt{2}+16)[\sigma_c]},\quad A_2 \geqslant \frac{16F}{(\sqrt{2}+16)[\sigma_t]}$$

为保证安全，两杆的横截面积应为

$$A = \max(A_1, A_2)$$

【例 1.7】 组合杆由两种材料组成，如图 1.7（a）所示。已知拉力为 F，两种材料的弹性模量为 E_1 和 E_2，截面积分别为 A_1 和 A_2，截面形心到底边的距离分别为 y_1 和 y_2。若在拉伸变形过程中，组合杆两端面保持平行移动，试分别求各种材料所受到的轴力 F_1 和 F_2，应力 σ_1 和 σ_2，以及拉力作用点的位置 e。

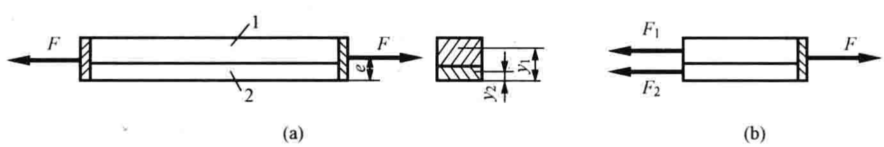

图 1.7

解 （1）静力关系。

研究组合杆右段［图 1.7（b）］的平衡

$$\sum F_x = 0,\quad F_1 + F_2 = F \tag{a}$$

$$\sum M = 0,\quad F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 = F \cdot e \tag{b}$$

3 个未知数 2 个方程，为一次超静定。

（2）几何关系。

杆端面平行移动，则有

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$$

（3）物理关系。

将物理关系代入几何方程可得

$$\frac{F_1}{E_1A_1} = \frac{F_2}{E_2A_2} \tag{c}$$

联立求解式（a）和式（c）得

$$F_1 = \frac{E_1A_1F}{E_1A_1 + E_2A_2},\quad F_2 = \frac{E_2A_2F}{E_1A_1 + E_2A_2}$$

可得应力表达式为

$$\sigma_1 = \frac{E_1 F}{E_1 A_1 + E_2 A_2}, \quad \sigma_2 = \frac{E_2 F}{E_1 A_1 + E_2 A_2}$$

由式（b）可解得拉力作用点的位置

$$e = \frac{E_1 A_1 y_1 + E_2 A_2 y_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2}$$

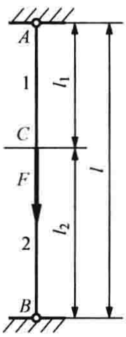

图 1.8

【例 1.8】 许用应力 $[\sigma]=160\text{MPa}$ 的钢丝绳沿铅垂方向绷紧在 A、B 两点之间，如图 1.8 所示，绳内预应力为 $\sigma_0=100\text{MPa}$。已知：绳长 $l=1\text{m}$，弹性模量 $E=200\text{GPa}$，截面积 $A=1\text{cm}^2$，在 $l_1=0.4\text{m}$ 处加一个向下的载荷 F。试求：

（1）许用载荷 $[F]$ 以及点 C 的位移 Δ_C；

（2）若要提高许用载荷，施力点 C 应取在何处？$[F]$ 可以提高到多少？

解 （1）求许用载荷 $[F]$ 以及点 C 的位移 Δ_C。

由于钢丝绳内已有预应力，假设：外力 F 所产生的应力与预应力叠加的结果不为压应力，则可将钢丝绳视为弹性杆求解。外力 F 在钢丝绳 AB 段和 BC 段内产生的轴力为

$$F'_1 = \frac{l_2}{l}F, \quad F'_2 = -\frac{l_1}{l}F \tag{a}$$

AC 段的应力为

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \frac{F'_1}{A} = \sigma_0 + \frac{l_2 F}{lA} = 100\times10^6 + \frac{0.6F}{1\text{m}\times1\times10^{-4}\text{m}^2} \leqslant [\sigma] = 160\times10^6\text{Pa} \tag{b}$$

可解得

$$F \leqslant 10\times10^3 = 10\text{kN}$$

由此，可求得 BC 段内应力叠加的结果为

$$\sigma_2 = \sigma_0 + \frac{F'_2}{A} = \sigma_0 - \frac{l_1 F}{lA} = 100\times10^6 - \frac{0.4\text{m}\times10\,000}{1\text{m}\times1\times10^{-4}} = 60\text{MPa}$$

为拉应力，因而前面的假设成立。可取许用载荷 $[F]=10\text{kN}$。在此外力作用下，点 C 的位移为

$$\Delta_C = \frac{F'_1 l_1}{EA} = \frac{0.6\times10\times10^3\times0.4}{1\times200\times10^9\times1\times10^{-4}} = 0.12\times10^{-3}\text{m} = 0.12\text{mm}(\downarrow)$$

（2）确定外载荷 F 的作用点及许用载荷的最大值 $[F]_{\max}$。

由式（b）可见，要提高许可载荷，应减小 l_2，同时，由式（a）可知，l_2 变小会使 BC 段内的压应力增加，与预拉应力叠加后有可能产生压应力。因此，应使 BC 段的轴力不低于零以及 AB 段的应力恰好达到许用值这两个条件同时满足，即

$$F_{BC} = \sigma_0 A - \frac{l_1}{l}F = 0$$

$$\sigma_{AC} = \sigma_0 + \frac{l_2}{l}\frac{F}{A} = \sigma_0 + \frac{l-l_1}{l}\frac{F}{A} = [\sigma]$$

联立求解以上两式，可得

$$F = A[\sigma] = 1\times10^{-4}\times160\times10^6 = 16\text{kN}$$

$$l_1=\frac{\sigma_0 l}{[\sigma]}=\frac{100\times 1}{160}=0.625\text{m}$$

即在距钢丝绳上端 0.625m 处可施加最大的许可载荷为 16kN。

【例 1.9】 桁架由杆 AB 和杆 BC 组成，如图 1.9（a）所示。已知两杆的横截面积均为 $A=20\text{mm}^2$，长度均为 $l=300\text{mm}$，$\theta=30°$，$F=5\text{kN}$。两杆材料相同，应力—应变曲线如图（b）所示，弹性模量为折线变化。试求点 B 的铅垂位移 Δ_B。

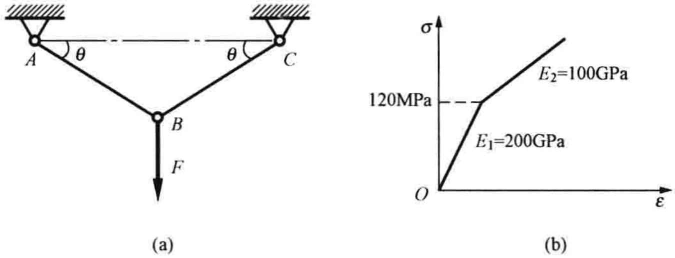

图 1.9

解 从桁架的对称性可知两杆的轴力相等，设为 F_N，由节点 B 的平衡方程可得

$$\sum F_y=0\quad 2F_N\sin 30°-F=0$$

$$F_N=F=5\text{kN}$$

当轴力 $F_{N0}=120\times 20=2.4\text{kN}$ 时，材料的弹性模量将会改变，可将加载过程分为两段来分析。

第一段：各杆轴力为 $F_N=0\sim 2.4\text{kN}$，各杆伸长为

$$\Delta l_1=\frac{F_{N1}l}{E_1A}=\frac{2.4\times 10^3\times 300}{200\times 10^3\times 20}=0.18\text{mm}$$

点 B 向下的铅垂位移为

$$\Delta_{B1}=\frac{\Delta l_1}{\sin 30°}=2\times 0.18=0.36\text{mm}$$

第二段：各杆轴力为 $F_N=2.4\sim 5.0\text{kN}$，各杆伸长为

$$\Delta l_2=\frac{F_{N2}l}{E_2A}=\frac{[(5-2.4)\times 10^3]\times 300}{100\times 10^3\times 20}=0.39\text{mm}$$

点 B 向下的铅垂位移为

$$\Delta_{B2}=\frac{\Delta l_2}{\sin 30°}=2\times 0.39=0.78\text{mm}$$

点 B 向下的总铅垂位移为

$$\Delta_B=\Delta_{B1}+\Delta_{B2}=1.14\text{mm}$$

【例 1.10】 图 1.10 所示刚性平台由截面积相同（即 $A_1=A_2=A_3=A$），但材料不同的三根短柱支承，其材料的弹性模量分别为 E_1、E_2、E_3。若要使平台在力 F 作用时水平下降，试求力 F 的作用点位置坐标 x_F 和 y_F。

解 （1）静力关系。

设三短柱对平台的支撑力分别为 F_1，F_2 和 F_3，平台受到空间平行力系的作用，有 3 个独立的静力平衡方程，即

$$\sum F_z=0,\quad F_1+F_2+F_3=F$$

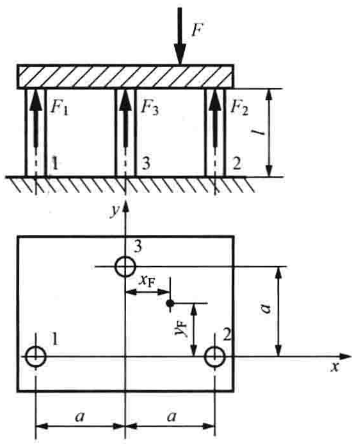

图 1.10

$$\sum M_x = 0,\quad F \cdot y_F - F_3 \cdot a = 0$$
$$\sum M_y = 0,\quad F \cdot x_F + F_1 \cdot a - F_2 \cdot a = 0$$

上述 3 个方程中有 F_1，F_2，F_3，x_F 和 y_F 共 5 个未知数，为二次超静定问题。需建立 2 个几何方程。

（2）几何关系。

欲使平台水平下降，则要求三柱的压缩变形量相同，由此可得二个几何方程为

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l_3$$

（3）物理关系。

$$\Delta l_i = \frac{F_i l}{E_i A}\quad (i = 1,2,3)$$

代入几何方程可得三柱压力的补充方程为

$$\frac{F_1 l}{E_1 A} = \frac{F_2 l}{E_2 A} = \frac{F_3 l}{E_3 A}$$

将上述补充方程与静力方程联立求解，可得三柱轴力和外力作用点坐标为

$$F_i = \frac{E_i}{E_1 + E_2 + E_3} F\quad (i = 1,2,3) \tag{a}$$

$$x_F = \frac{a}{F}(F_2 - F_1) = \frac{E_2 - E_1}{E_1 + E_2 + E_3} a \tag{b}$$

$$y_F = \frac{a}{F} F_3 = \frac{E_3}{E_1 + E_2 + E_3} a \tag{c}$$

讨论

由式（a）可以看出各杆的轴力 F_i 与该杆材料的弹性模量 E_i 成正比。实际上，静定结构各构件的内力只与结构的形状及其加载方式有关，而超静定结构各构件的内力还与其刚度有关，即超静定结构各构件的内力按其刚度分配。这是超静定结构的重要特性之一。

【例 1.11】 图 1.11（a）所示结构的三根杆用同一材料制成，弹性模量为 E，已知：杆 3 长为 l，杆 1 和杆 3 截面积 $A_1 = A_3 = A$，杆 2 的截面积 $A_2 = 2A$，载荷 F 作用在点 A，其作用线与铅垂线的夹角为 θ。试求各杆的内力。

解 （1）静力关系。

节点 A 在载荷 F 的作用下，将向右下方移动，三杆均将伸长，其内力均为拉力。研究节点 A，受力图如图 1.11（b）所示，静力平衡方程为

$$F_1 + F_2\cos 60^\circ - F\cos\theta = 0$$
$$-F_3 - F_2\cos 60^\circ + F\sin\theta = 0$$

2 个方程有 3 个未知数，为一次超静定问题。

（2）几何关系。

在载荷 F 的作用下，节点 A 向右下方移动至点 A'，过点 A' 作三根杆的垂线，垂足分别为 A_1，A_2，A_3，节点 A 的变形图如图 1.11（c）所示。注意到，$AA_1 = \Delta l_1$，$AA_2 = \Delta l_2$，

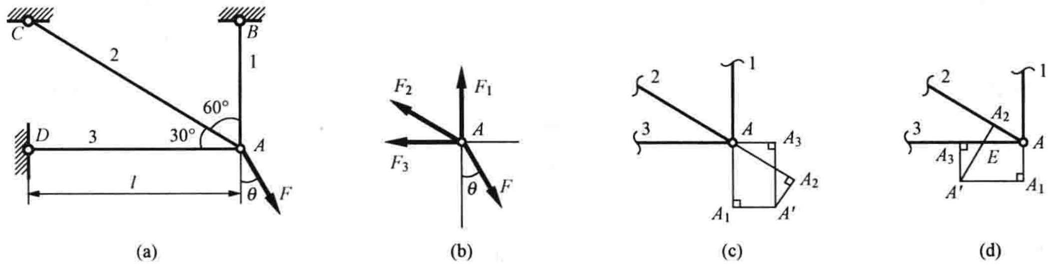

图 1.11

$AA_3=\Delta l_3$，由变形图可得几何方程为

$$\Delta l_3\cos30^\circ+\Delta l_1\sin30^\circ=\Delta l_2$$

（3）物理关系。

物理方程为

$$\Delta l_1=\frac{F_1l_1}{EA_1}=\frac{F_1l}{EA}\tan30^\circ$$

$$\Delta l_2=\frac{F_2l_2}{EA_2}=\frac{F_2l}{2EA\cos30^\circ}$$

$$\Delta l_3=\frac{F_3l_3}{EA_3}=\frac{F_3l}{EA}$$

将物理方程代入几何方程，可得力的补充方程，与静力方程联立求解得到

$$F_1=\frac{(3\sqrt{3}+4)\cos\theta-3\sin\theta}{3\sqrt{3}+5}F$$

$$F_2=\frac{2\cos\theta+6\sin\theta}{3\sqrt{3}+5}F$$

$$F_3=\frac{-\sqrt{3}\cos\theta+5\sin\theta}{3\sqrt{3}+5}F$$

由上述结果可见，当 $0^\circ\leqslant\theta<71.9^\circ$时，有 $F_1>0$，即 F_1 为拉力；当 $\theta>71.9^\circ$时，F_1 变为压力。当 $0^\circ\leqslant\theta<90^\circ$时，$F_2$ 始终为拉力。当 $0^\circ\leqslant\theta<19.1^\circ$时，有 $F_3<0$，即 F_3 为压力；当 $\theta>19.1^\circ$时，F_3 变为拉力；当 $\theta=19.1^\circ$时，F_3 等于零，即杆 3 的长度不变，点 A 只作铅垂向下的移动。

讨论

在上述解题过程中，无论内力和变形均按真实方向假设，其优点是：内力结果均为正号，避免了负号的干扰；内力与相应变形均按真实情况假设，自然满足约束条件，且协调一致，无须特别考虑其协调性。但需注意，位移方向不能假设成特殊方向，如铅垂或水平方向，这相当于又额外增加了约束，与实际情况不符。

实际上，可以假设点 A 发生任意方向的位移，且该位移并不一定是真实位移。但是，所假设的位移必须满足约束条件；内力与变形的假设必须协调一致；位移方向不能假设成特殊方向。根据求出的内力和变形的符号以及原先所作的假设，可确定其真实方向。例如，可