余天庆 李厚民 毛为民 编著

张量分析及在力学中的应用

（第2版）

清华大学出版社

余天庆　李厚民　毛为民　编著

张量分析及在力学中的应用

（第2版）

清华大学出版社
北京

内容简介

本书系统阐述了张量分析及其在力学中的应用。全书共分9章，第1，2章介绍张量的基础知识，第3～6章介绍张量代数、张量分析和黎曼空间的曲率，第7，8章介绍张量分析在弹性力学和损伤力学中的应用。第9章介绍Matlab和Mathematica在矩阵和张量演算中的应用。附录A、B、C分别简述了经典的例题、正规正交化和曲线坐标系；附录D提供部分附录习题的证明或解题的全过程，可供教师和自学者参考。

本书可作为大学数学、物理、力学、天文、航空、航天、土木、水利、交通、信息和管理学科的研究生和高年级大学生的参考教材，还可供相关专业的研究人员和工程技术人员自学参考。

图书在版编目(CIP)数据

张量分析及在力学中的应用/余天庆，李厚民，毛为民编著.--2版.--北京：清华大学出版社，2014

ISBN 978-7-302-35443-[illegible]

Ⅰ．①张…　Ⅱ．①余…②李…③毛…　Ⅲ．①应用力学—张量分析—教材　Ⅳ．①O39

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第0230[illegible]号

责任编辑：佟丽霞　赵从棉
封面设计：常雪影
责任校对：王淑云
责任印制：何　芊

出版发行：清华大学出版社
　　网　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　编**：100084
　　社总机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印刷者：三河市君旺印装厂
装订者：三河市新茂装订有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：170mm×230mm　　**印　张**：18.5　　**字　数**：373千字
版　次：2006年8月第1版　2014年5月第2版　**印　次**：2014年5月第1次印刷
印　数：1～2500
定　价：39.00元

产品编号：048167-01

前　言

《张量分析及应用》2006年8月由清华大学出版社出版，6年中重印了3次，曾被评为清华大学出版社的精品教材，颇受高校师生的欢迎和好评。感谢广大读者对本书的喜爱。几年来，许多读者特别是使用本教材的老师们，指出了本书的刊误和对于进一步完善和修改的建议。根据读者的建议和我们多年的教学经验以及当前全国的教学改革的进展需要，本书的第2版做了如下的更改和修订。

一、将《张量分析及应用》改写为《张量分析及在力学中的应用》(第2版)和《张量概要及演算》。因为第1版书中附加了全部习题解答，影响了学生独立思考。

二、《张量分析及在力学中的应用》(第2版)中删除了内容非常简单的矢量分析，节省了篇幅，以场论为起点对张量分析的学习非常有利。

三、《张量分析及应用》书名没有表明张量分析的应用范围，将原书名改为《张量分析及在力学中的应用》(第2版)，第7,8两章专题讲述张力分析在弹性力学和损伤理论中的应用。

四、《张量分析及在力学中的应用》(第2版)第9章介绍Matlab进行张量分析演算的同时，增加了软件Mathematica在矩阵和张量演算解题中的运用。

五、《张量分析及在力学中的应用》(第2版)和《张量概要及演算》可以说是姊妹篇，后者侧重于习题的演算，既能帮助教师备课，又可以使自学者获得更好的自学效果。

汲取了广大读者的意见和建议，编纂两书花费了两年多的时间，在此我们向广大读者表示衷心感谢。湖北工业大学土木工程与建筑学院的历届硕士研究生在学习本

教材的过程中演算并校核了所有的习题，李厚民副教授、毛为民博士和硕士研究生熊睿投入了大量的精力，发挥了重要作用，在此一并致以谢意。

由于作者水平有限，如有不妥之处，恳请读者批评指正。

作　者
2014年4月

第1版 序

张量是数学、物理和力学等学科的必备工具，也是数学的一个重要分支，物理和力学等学科的发展又促进了这一数学分支的充实和完善。用数学描述自然界物理现象的变化及其运动规律需要引入坐标系。然而，本来与坐标系选择无关的自然规律，其数学表达形式却不得不与坐标系的选择联系在一起，而导致人们对其物理实质不易辨识。张量的引入，则是力图既采用坐标系而又摆脱具体坐标系影响的微妙方法。用张量描述自然界物理现象演变规律所得的结果，在任何坐标系下具有不变的形式，这给人们带来了极大的方便。由于用张量演绎的结果和获得的方程在坐标变化时具有不变性，所以在本质上具有普遍性，从而张量为基本方程（本构方程）的推导提供了非常有效的数学方法。同时，由此获得的方程对不同概念的统一和特殊概念的推广极有启发。

美是大自然的固有属性，数学中的美在张量的表达中显得尤为突出。张量演算中符号的简洁和对称的外观使得张量最适于对自然规律作精炼的描述。然而，张量演算中上下标的“多姿”变化却会使初学者产生一定的畏惧心态。其实，只要掌握其变换规律即会由“心烦”变为美的享受。

我执教的半个世纪中，一直都在从事数学、力学和与土木、机械相关的专业课程的教学和研究工作，对培养具有坚实的数学、力学基础的大学生和研究生体会得非常深刻。因而，20 世纪 80 年代初我在华中工学院讲授“张量分析”课程 8 年后，1996 年由华中理工大学出版社出版了我撰写的《张量分析及演算》，三年里该书畅销一空。多年来，我收到许多教师、研究生关于此书再版的要求。为了满足读者的需要，经过两年的努力，该书的修订版《张量分析及应用》终于和大家见面了。

本书第 1，2 章介绍矢量分析和矩阵，是学习张量的基础知识；第 3～6 章介绍张

量、张量代数、张量分析和黎曼空间的曲率，是本书的主题；第7,8章讲述张量分析在固体力学中的应用，特别是在损伤力学中的应用，其中第8章的内容取自我的《损伤理论及其应用》(国防工业出版社，1998)。鉴于现代教学和研究工作中计算机技术的广泛应用，新增了第9章，介绍Matlab在矩阵和张量运算中的运用，也是本书的特色之一。附录A～C分别简述经典的例题、正规正交化和曲线坐标系；附录D提供部分习题的证明或解题的全过程，可供教师和自学者参考。

本书系统阐述张量分析及其在弹性力学和损伤力学中的应用，可作为大学数学、物理、力学、材料、天文、土木、水利、交通、航空、航天、信息和管理学科的研究生、高年级本科生的教材，还可供相关专业的研究人员及工程技术人员参考。

从20世纪50年代末到80年代初，我受到李灏教授的谆谆教诲，在此对导师再一次表示深切的怀念。我的学生毛为民博士参与本书的修订工作，其中第7,9章由他撰写，全书由我统稿和审定。清华大学出版社的编辑佟丽霞、赵从棉给予了很大的支持，在此一并表示感谢。

我的许多朋友和学生，在使用和学习了我的原作后，对其提过很多宝贵的意见和建议，对本书的修订工作起到了积极作用。感谢同行的老师和学生们对本书的厚爱，希望今后给予更多的支持和关心。

作者水平有限，如有不妥之处，恳请给予批评指正。

余天庆

2005年10月于武昌

目　录

第 1 章 场　论

本章首先介绍标量场的梯度、矢量场的散度和矢量场的旋度，列出了梯度、散度和旋度的运算公式，有利于学生掌握矢量在场论中的应用。重点是梯度、散度、旋度的演算以及格林(Green)公式、斯托克斯(Stokes)定理和高斯(Gauss)散度定理的推导和应用。

1.1 标量场的梯度

1. 标量场及其等值面

如果空间里的每一点都对应着每个物理量的一个确定的值，则称在此空间里存在着该物理量的场。如果物理量是纯数量，则称这个场是标量场，例如温度场、密度场等都是标量场。如果物理量是矢量，则称这个场是矢量场，例如力场、速度场等是矢量场。

在标量场中，当选定了 $Oxyz$ 坐标系后，各点处的物理量可表示为

$$\Phi = \Phi(x,y,z)$$

即一个标量场，可以用一个单值连续函数表示，我们假定这个函数具有一阶连续偏导数。

标量场中具有相同数值的物理量的各点所构成的曲面，称为等值面，等值面方程是

$$\Phi(x,y,z) = C, \quad C \text{ 为常数} \tag{1.1}$$

在二维空间里，$\Phi(x,y)=C$ 则表示等值线。

2. 标量场的梯度与方向导数

为了解标量场中标量 Φ 的变化情况，需要研究标量场的梯度与方向导数。

下面考察标量 Φ 在场中各点处的邻域内沿某一方向的变化情况。

若在标量场 $\Phi(P)$ 中的一点 P 处，存在这样的矢量 $\boldsymbol{G}$，其方向为函数 $\Phi(P)$ 在 P 点处变化率最大的方向，其模是这个最大变化率的数值，则称矢量 $\boldsymbol{G}$ 为函数 $\Phi(P)$ 在点 P 处的梯度，记作 $\mathrm{grad}\Phi$，即

$$\mathrm{grad}\Phi = \boldsymbol{G} \tag{1.2}$$

在直角坐标系 $Oxyz$ 里，设点 P 的坐标为 $P(x,y,z)$，对于定义在空间某区域上的标量场 Φ，点 P 处的梯度为

$$\mathrm{grad}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{1.3}$$

为了方便起见，引入哈密顿算子

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.4}$$

于是

$$\mathrm{grad}\Phi = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi = \nabla\Phi \tag{1.5}$$

∇ 是一个微分运算符号，同时又应当做矢量看待，这一点在下面讨论矢量场的散度与旋度时更为重要。

标量场中函数 Φ 在某点 P 的梯度 $\mathrm{grad}\Phi$ 是一个矢量，其方向是函数 Φ 变化最快的方向，其大小是 Φ 沿该方向的变化率，即函数 Φ 的最大变化率。下面讨论沿任意给定方向，函数 Φ 的变化率。

点 P 与单位矢量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 给定时，过 P 点沿 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 的方向作直线 l（图 1.1）。在 l 上取与 P 点邻近的一点 Q，令 $\overline{PQ}=s$，当 $Q\to P$ 时，比例式

$$\frac{\Delta\Phi}{s} = \frac{\Phi(Q)-\Phi(P)}{\overline{PQ}}$$

的极限存在，则称上式的极限为函数 $\Phi(P)$ 在点 P 处沿 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 的方向导数，记作

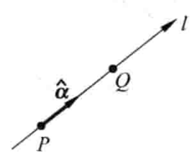

图 1.1

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s}=\lim_{Q\to P}\frac{\Phi(Q)-\Phi(P)}{\overline{PQ}}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s}&=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Phi(x(s),y(s),z(s))\right]_{s=0}\\&=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\\&=\mathrm{grad}\Phi\cdot\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}=\boldsymbol{G}\cdot\hat{\boldsymbol{\alpha}}\end{aligned}\tag{1.6}$$

上式表明，梯度 $\boldsymbol{G}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}$ 方向上的投影正好等于函数 Φ 在该方向上的方向导数。

如果 Φ 的梯度矢量 $\mathrm{grad}\Phi$ 与单位矢量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 的夹角为 θ，则 $\mathrm{grad}\Phi\cdot\hat{\boldsymbol{\alpha}}=|\mathrm{grad}\Phi|\cos\theta$，由此可见，$|\mathrm{grad}\Phi|$ 显然是 Φ 变化率的最大值。

例 1.1 对于标量场 $\Phi(x,y,z)=x^2+y^2+2z^2+2xy$，求 $\Phi(x,y,z)$ 的梯度以及在点(1,2,1)处、沿 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}=\frac{1}{3}\boldsymbol{i}+\frac{2}{3}\boldsymbol{j}+\frac{2}{3}\boldsymbol{k}$ 方向上 Φ 的方向导数。

解
$$\begin{aligned}grad\Phi=\nabla\Phi&=\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{x}}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{k}\\&=(2x+2y)\boldsymbol{i}+(2y+2x)\boldsymbol{j}+4z\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

在点(1,2,1)处

$$\nabla\Phi=6\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$$

于是方向导数

$$\nabla\Phi\cdot\hat{\boldsymbol{\alpha}}=\frac{1}{3}[6\times1+6\times2+4\times2]=\frac{26}{3}$$

例 1.2 试证：(1)$\nabla(F+G)=\nabla F+\nabla G$；(2)$\nabla(FG)=F\,\nabla G+G\,\nabla F$，式中 F 和 G 均为 x,y,z 的可导标量函数。

证明

(1)
$$\begin{aligned}\nabla(F+G)&=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(F+G)\\&=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}(F+G)+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}(F+G)+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}(F+G)\\&=\boldsymbol{i}\frac{\partial F}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial F}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial F}{\partial z}+\boldsymbol{i}\frac{\partial G}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial G}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial G}{\partial z}\\&=\nabla F+\nabla G\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\nabla(FG)&=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(FG)\\&=\frac{\partial}{\partial x}(FG)\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}(FG)\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}(FG)\boldsymbol{k}\\&=\left(F\frac{\partial G}{\partial x}+G\frac{\partial F}{\partial x}\right)\boldsymbol{i}+\left(F\frac{\partial G}{\partial y}+G\frac{\partial F}{\partial y}\right)\boldsymbol{j}+\left(F\frac{\partial G}{\partial z}+G\frac{\partial F}{\partial z}\right)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

$$=F\left(\frac{\partial G}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial G}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial G}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)+G\left(\frac{\partial F}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial F}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial F}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$$

$$=F\,\nabla G+G\,\nabla F$$

1.2 矢量场的散度

设 $\boldsymbol{a}$ 为定义在空间某区域上的矢量场，在直角坐标系中 $\boldsymbol{a}=[a_x(x,y,z),a_y(x,y,z),a_z(x,y,z)]$，在任一点 $P(x,y,z)$处的散度定义为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z} \tag{1.7}$$

标量场 div$\boldsymbol{a}$ 又可写成$\nabla\cdot\boldsymbol{a}$：

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a}=\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$$

对于标量场 Φ，

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\mathrm{grad}\Phi)&=\nabla\cdot\nabla\Phi\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\\&=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\end{aligned} \tag{1.8}$$

上式右端称为标量场 Φ 的拉普拉斯(Laplace)算符，用$\nabla^2\Phi$ 或 $\Delta\Phi$ 表示，算子

$$\nabla^2=\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.9}$$

叫做拉普拉斯算子。偏微分方程

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0 \tag{1.10}$$

叫做拉普拉斯方程。满足拉普拉斯方程的函数叫做调和函数。

例 1.3 设矢量场 $\boldsymbol{a}=x^2z\boldsymbol{i}-2y^3z^2\boldsymbol{j}+xy^2z\boldsymbol{k}$，求点 $P(1,-1,1)$处的散度。

解 $\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(x^2z\boldsymbol{i}-2y^3z^2\boldsymbol{j}+xy^2z\boldsymbol{k})$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(x^2z)+\frac{\partial}{\partial y}(-2y^3z^2)+\frac{\partial}{\partial z}(xy^2z)$$

$$=2xz-6y^2z^2+xy^2$$

在点 $P(1,-1,1)$处

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a}\,|_P=2\times1\times1-6\times(-1)^2\times1^2+1\times(-1)^2=-3$$

例 1.4 试证$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=0$,其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

证明 $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$$
$$=-x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\frac{\partial}{\partial x}[-x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}]$$
$$=3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}-(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$
$$=\frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

同理可得

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\frac{2y^2-z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\frac{2z^2-y^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

三式相加得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=0$$

可见所证的是拉普拉斯方程,$\phi=\frac{1}{r}$就是这个方程的解。

例 1.5 对于常矢量 $\boldsymbol{a}$,试证 $\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=0$,其中 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$。

证明 设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$,则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ x & y & z\end{vmatrix}$$
$$=(a_yz-a_zy)\boldsymbol{i}+(a_zx-a_xz)\boldsymbol{j}+(a_xy-a_yx)\boldsymbol{k}$$

从而 $\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=\frac{\partial}{\partial x}(a_yz-a_zy)+\frac{\partial}{\partial y}(a_zx-a_xz)+\frac{\partial}{\partial z}(a_xy-a_yx)=0$。

1.3 矢量场的旋度

设坐标系$(Oxyz)$为右手系的正交坐标系,对于矢量场 $\boldsymbol{a}(x,y,z)=a_x(x,y,z)\boldsymbol{i}+a_y(x,y,z)\boldsymbol{j}+a_z(x,y,z)\boldsymbol{k}$,由

$$\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \tag{1.11}$$

所定义的矢量场叫做 $\boldsymbol{a}$ 的旋度，记作 $\mathrm{curl}\boldsymbol{a}$。式(1.11)可写成 $\nabla\times\boldsymbol{a}$，即

$$\nabla\times\boldsymbol{a}=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix} \tag{1.12}$$

例 1.6 设 $\boldsymbol{a}=xz^3\boldsymbol{i}-2x^2yz\boldsymbol{j}+2yz^4\boldsymbol{k}$，求点 $P(1,-1,1)$ 处的旋度 $\mathrm{curl}\boldsymbol{a}$。

解
$$\begin{aligned}\mathrm{curl}\boldsymbol{a}&=\nabla\times\boldsymbol{a}\\
&=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(xz^3\boldsymbol{i}-2x^2yz\boldsymbol{j}+2yz^4\boldsymbol{k})\\
&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xz^3 & -2x^2yz & 2yz^4\end{vmatrix}\\
&=\left[\frac{\partial}{\partial y}(2yz^4)-\frac{\partial}{\partial z}(-2x^2yz)\right]\boldsymbol{i}+\left[\frac{\partial}{\partial z}(xz^3)-\frac{\partial}{\partial x}(2yz^4)\right]\boldsymbol{j}\\
&\quad+\left[\frac{\partial}{\partial x}(-2x^2yz)-\frac{\partial}{\partial y}(xz^3)\right]\boldsymbol{k}\\
&=(2z^4+2x^2y)\boldsymbol{i}+3xz^2\boldsymbol{j}-4xyz\boldsymbol{k}\\
&=3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}\quad(\text{在点 } P(1,-1,1)\text{ 处})\end{aligned}$$

1.4 关于梯度、散度、旋度的公式

设 F,G 为标量场，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为矢量场，并设它们连续且存在二阶偏导数。

$$\mathrm{grad}(F+G)=\nabla(F+G)=\nabla F+\nabla G \tag{1.13}$$

$$\mathrm{grad}(FG)=\nabla(FG)=G\,\nabla F+F\,\nabla G \tag{1.14}$$

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\nabla\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\nabla\cdot\boldsymbol{a}+\nabla\cdot\boldsymbol{b} \tag{1.15}$$

$$\mathrm{curl}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\nabla\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\nabla\times\boldsymbol{a}+\nabla\times\boldsymbol{b} \tag{1.16}$$

$$\mathrm{div}(F\boldsymbol{a})=\nabla\cdot(F\boldsymbol{a})=(\nabla F)\cdot\boldsymbol{a}+F(\nabla\cdot\boldsymbol{a}) \tag{1.17}$$

$$\mathrm{curl}(F\boldsymbol{a})=\nabla\times(F\boldsymbol{a})=(\nabla F)\times\boldsymbol{a}+F(\nabla\times\boldsymbol{a}) \tag{1.18}$$

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b}) \tag{1.19}$$

$$\mathrm{curl}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}(\nabla\cdot\boldsymbol{a}) \tag{1.20}$$

$$\mathrm{grad}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b}) \tag{1.21}$$

$$\mathrm{div}\ \mathrm{grad}F=\nabla\cdot(\nabla F)=\nabla^2F \tag{1.22}$$