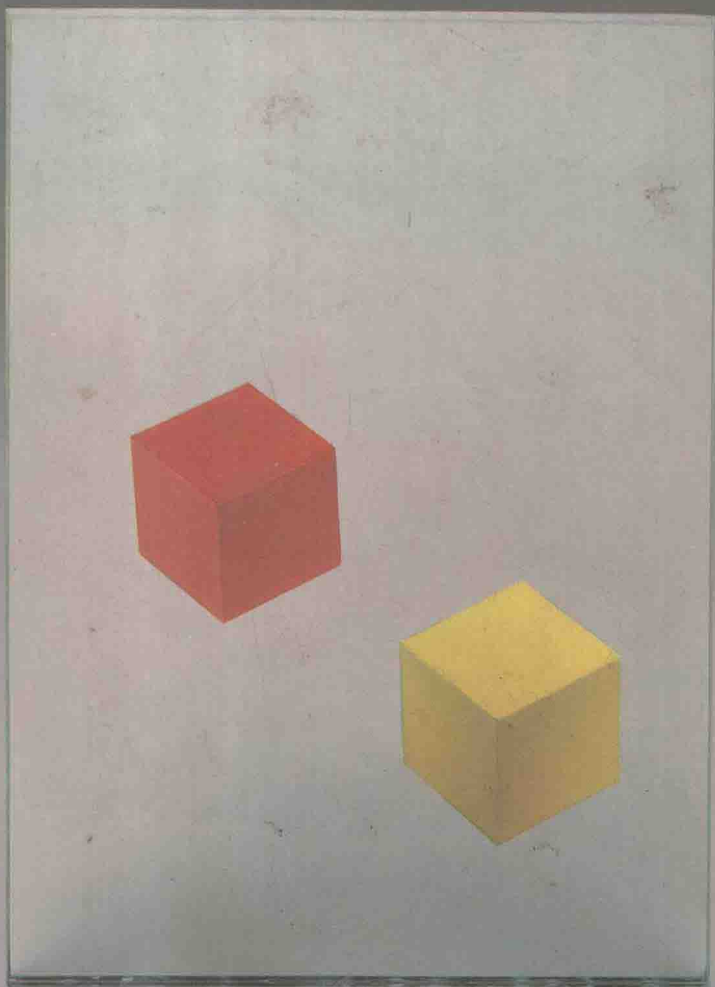


數 學 遊 戲

鄭肇植編著
商務印書館



數 學 遊 戲

鄭肇楨編著
商務印書館

數學遊戲

編著者——鄭肇楨

出版者——商務印書館香港分館

香港皇后大道中35號

印刷者——中華商務聯合印刷(香港)有限公司

香港九龍炮仗街75號

版次——1980年9月初版

1983年1月重印

© 1980 1983 商務印書館香港分館

ISBN 962·07·2000·8

目 錄

1. 遊戲與學習	1
2. 讓梨遊戲	8
3. 秤量遊戲	22
4. 幻方與魔陣	35
5. 拓撲遊戲	60
6. 劃鬼腳與羣論	79
7. 火柴遊戲	91
8. 在棋盤上的包圍戰	99
9. 骨牌遊戲	117
10. 獨子棋	130
11. 多方垛片	140
12. 七巧與十五巧	153
13. 拉丁方陣	163
14. 數學歸納	170

遊戲與學習



遊戲和學習是很有關係的，人類甚至是動物的學習，本來就是藉着遊戲來進行。試看一隻小貓和牠的同伴追追逐逐，作出咬和撲擊狀，這不是牠藉着遊戲來學習捕食嗎？許多動物也是在小的時候，以遊戲的方式，來學得各種賴以生存的技能。

遊戲對於我們的祖先，相信也是有同一的功能的。小孩子在遊戲中學得獵狩的技術，發展心智及體能，使能在其環境中生存及繁衍。

隨着人類文明的進步，遊戲愈來愈多式樣和變化，以致於逐漸在形式上脫離了直接的生活外貌。不過它們的內涵，仍然是和訓練、發展智慧、體能和羣性都是有關係的。

近代學者對於遊戲進行了不少的研究。

他們認為遊戲具有多種功能。從人類學家的觀點來看，遊戲是人類文化活動的一種形式，故此，研究遊戲的源流及傳播，可提示民族發展及其源流歷史的綫索；從行為學家的觀點來看，遊戲具有識知技巧的訓練作用，也可用以控制行為；從社會學家的觀點來看，遊戲表現了社會組織及活動模式，藉着遊戲可探討人際關係；從心理學家的觀點來看，遊戲可應用於心理分析，診斷思想、情緒變化狀態；從科學家的觀點來看，遊戲可視為某些現實

的變換(Transformation)。因此，它們可能是簡化的事物結構；從教育學家的觀點來看，遊戲是很好的活動教材，使學生參與有趣的學習；從軍事學家的觀點來看，某些遊戲却是戰爭的摹仿，遊戲是戰略連續運用的過程。由此可見，近代學者對遊戲的重視了。

有些人類學家更提出人類文化實可分為兩類：一類是“富遊戲文化”，而另一類是“缺遊戲文化”(Nongame culture)，富遊戲文化的民族，不但在其文化體系中有着種類繁多的遊戲，構成了他們社會中日常活動的一部份，而且這些遊戲的存在也是可追溯至遠古的。缺遊戲文化的種族，通常都是文明低落、歷史貧缺的。他們多是原始的民族社會，沒有或僅具政治組織的雛型，缺乏社會分層結構，技術落後僅能勉強維持起碼的生活(Subsistence)。這類社會多存在於酷熱地帶。在缺遊戲文化族類中，觸發遊戲的現實環境極度貧乏，人們缺少人際接觸的機會，因而很難有產生遊戲的條件。在生活上，他們基本上是以自我為單位，彼此並無多大的協作，羣性的發展較低，而兒童也不作任何羣體遊戲。

人類學家更提出，人類種族的進化程度，可以用其存在的遊戲數量來作指標。即是說，遊戲數目愈多的民族，其文化愈是先進。

中華民族無疑是具有最豐富的遊戲文化的民族，我們在老遠的古代中，便有各種的玩藝。例如棋，早就是六藝之一。其他具有長遠文明的國家，無一不可舉出豐富的遊戲歷史。當西歐進入文明的時候，遊戲便在文明的中心迅即積集下來。這現象可從沙士比亞的作品中獲得印證。他在作品中所提及的遊戲，不下於五十種之多。

有良好結構的遊戲，往往能超越地域限制而遠播他方。因此世界各地，都流傳着許多來自中華民族的遊戲。例如根據泰勒

(E. Tylor)的研究，認為北美洲西岸一些印第安人的“圍石堆”遊戲是來自中國的。如果這屬實，則可知中國人實比歐洲人更早發現及到達北美洲。

在近一個世紀中，研究中國遊戲的學者以加連 (S. Culin) 為最著名。他寫過 65 種有關遊戲的研究，其中很多是描述或涉及中國人喜歡的遊戲的。例如他 1889 年寫的“中國骰子遊戲”，1891 年的“美洲華人的賭博遊戲”，1892 年的“中國骰子及骨牌遊戲”及 1924 年的“麻雀牌遊戲”等。

研究者亦認為遊戲是人類基本行為之一。裴亞譜 (J. Piaget) 描述一個兩個月大的嬰兒，他偶然發現把頭向後仰，便看見天花板上的燈。他覺得很好玩，於是經常把頭向後翻，看見了燈便笑起來。這個行為竟持續了好幾個星期，直至玩膩了才消失。他又描述一個四個月大的嬰兒。他在吃奶時偶然伸手捉着母親的手指，這樣便觸發了他捕捉母親手指的興趣。母親把手指移開了，他又再追捉，捉到便得意地笑了。四個月大的嬰兒已懂得“捉迷藏”的遊戲了。

研究者又認為遊戲不但與文化有關，而且它本身亦帶有多種功能的。以下且看一些學者對遊戲的看法：

- 遊戲是兒童把我們祖先的，自然的，必需的動作，在現在已改變得近乎沒有相同的環境中，重做出來的活動。(Stanley Hall)
- 兒童遊戲表現了人類需要發展身體官能技巧。因此，遊戲基本上是由一些本性促發的，例如身體接觸（摔跤）及互相追逐等本性。(K. Groos)
- 遊戲在某一程度上可視為對生活中的工作及責任負擔的一種演習。(E. Claparede)

- 遊戲讓兒童把過剩的精力發洩出來，因為現在的兒童已無須自行找尋食物及保護自己。(Herbert Spencer)
- 遊戲是兒童對被壓制的慾念作出補償或代替的行為。(Sigmund Freud)
- 兒童遊戲發展感性機動技巧及藉此對新的事物產生同化作用 (Assimilation)。(J. Piaget)

以上的言論只反映了遊戲的部份作用。近代主張多用遊戲來作教育用途的人，大概有以下的見解：

- (1) 遊戲比傳統的課室學習更能引起兒童的興趣，因此，它可以解決學習上的一大問題——如何吸引兒童學習。
- (2) 在遊戲中，兒童是全心全意地投入的。因此他們更易體察到此遊戲所代表的模式中的技巧、原則及結構。
- (3) 兒童對經過遊戲的學習，有較良好及長久的記憶。
- (4) 兒童在遊戲中，獲得更多思考機會及決策的訓練。
- (5) 以遊戲方式進行的學習，更能傳達該學習的情感態度的內涵。
- (6) 在遊戲中學習，兒童是採取主動的，他們是活動中的主體，而在傳統的課堂講授式學習中，兒童只是被動的一羣。

這樣看來，使用遊戲來進行教育是一件值得嘗試的事，因為它可以大大地改變了現在傳統的刻板式的課堂教學。

研究者除了探討遊戲的作用外，還進一步分析遊戲一些要素：

(1) **身體接觸**：身體接觸可分間接和直接兩種。例如拉手、擁抱、推拉、摔角等便是直接的接觸，而玩球遊戲則是藉着球的傳送，傳遞身體的接觸。有人以為近代文明已使人與人之間的身

體接觸減至幾近於零的地步。這樣是違背了人類本來愛互相接觸的天性的。

(2) **官能活動**：由於機械代替了人的勞動，人的體力活動機會大為減少。遊戲正可補救這一缺點。它使人多作肌肉官能活動，而且往往要求活動的配合，例如手眼並用等。

(3) **識知技巧**：識知技巧 (Cognitive skills)，在遊戲中很可能更有機會作完整的運用。因為在一般的學習中，大多數教師傾向於使學生運用較低層次的識知技巧。例如記憶，敘述等（根據 B. Bloom 的分類，這是最低的第一、二層次）。但是在遊戲中，遊戲者往往要求作出分析、綜合及評價的思想活動（這分別是第四、五、六的較高知識層次）。例如在棋類遊戲中，參與者必須全盤了解局勢，分析每步的可能後果，綜合全局而作出決策。這樣的思維活動，並不常發生在傳統注入式的學習環境中。

(4) **把握時機**：遊戲往往把人帶入一個自己不能控制的環境中，這使遊戲的結果不能預見。這一現象是符合現實環境的。因為在現實社會中，多種變素交互作用。遊戲者只有把握時機，應付變化。這樣可使遊戲者學習如何應付多變的局面。

(5) **適者生存**：遊戲中的競爭性，使人了解競爭的要義。競爭是提高遊戲技巧的激素，參與者學習如何面對挑戰及爭取最後的勝利。

遊戲與數學學習又比其他的學習，更有深一層的關係。因為數學本身其實就是遊戲。數學和遊戲是同樣具有相類的元素及結構的。

數學的基本元素有二：一是選定了的集合。這可能是某些數字的集合；一些點的集合；一些幾何形體的集合；一些函數的集

合等等。另一是一些定義了的運算。這可稱為運算法則。例如規定了集內的元如何結合，相加，相乘等等。

遊戲亦具有這兩個基本要素：其一是一些物體的集合。這可能是一堆棋子，一副撲克牌，一套骰子更或至是一羣遊戲的人也可以。其二是一些規定了的遊戲法則。例如棋子如何走法；牌應如何排列，如何獲得分數等等。

數學許多來自現實生活中量的變化與關係，由此而抽象純化而成。遊戲也有許多是如此演變出來的。人類的活動，經過了純化和假借，便藉着遊戲的形式而或明或暗地重現出來。例如象棋一類遊戲，雙方搏奕，攻守兼備，實是兩軍對陣的摹擬。

遊戲中引致的智力活動，亦與數學學習中所要運用的智力活動，有相似的地方。棋類及一般思考性的遊戲，必然要求參與者作思考分析，在某一局勢之下，或特定之條件下，作出最理性的行為反應。這樣和解決數學問題，決定應採取何種運算，以求得所需答案，所經的歷程和體驗，實是大致相同的。

遊戲帶來的受益往往不是內容（content）方面而是遊戲本身的過程（process）。因為遊戲的內容往往是十分簡單，本身亦無關重要的。例如多少棋子，如何佈局等等的知識，學了亦無甚獲益。但是却在行棋中的過程，參與者不斷地接受挑戰，局勢在變化。要綜觀全局，衡量各種因素，不停地作出有智慧的決策。這個歷程使人經歷思考分析，這才是最有意義的活動。

數學的學習雖然內容與過程兩者兼備。內容就是數學的知識，這部份固然有用，但是它的過程——數學方法却是最值得重視的學習。如果用強記來接受了內容，而沒有走過數學的途徑，這種數學學習是不值得要的。因為學習數學的主要目的，並非為

了那些對大部份的人，都不會有應用機會的內容，而是藉着數學的學習，學得觀察，分析，類比，推理演繹及歸納吧了。

本書所選的數學遊戲，是適合中學生或一般有興趣於思考遊戲的人的。當然，正如上文所講，遊戲是以歷程為主體的活動（process-oriented），所以進行數學遊戲，亦不必存有學習甚麼數學內容的過分希望和企圖。因為在遊戲中實在已是切切實實地在運用了數學的方法，接受了數學的薰陶了。

2 讓梨遊戲

這個遊戲既然稱作“讓梨”，所以遊戲的目的，就是爭取最後有“子”吃便是勝利。

這遊戲據說是中國人首先發明的。玩的時候可用硬幣作子，又或可用任何籌碼、火柴枝等作子。在課堂中玩時沒有大量籌碼，亦可由學生撕些紙片碎代替。

進行時由兩人對玩，先在桌上擺出數行任意個數的籌碼，行數和每行的籌碼數目是沒有規定的。但是初玩時是以三行為宜，而每行的子（籌碼）的數目最好不超過 10，亦不要相同。下面圖所示是一些常見的擺法。

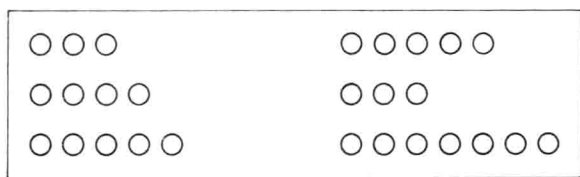
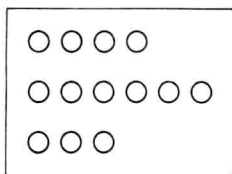


圖 2·1

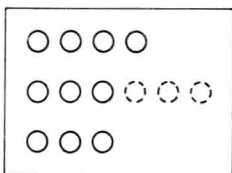
擺好子後，便可輪流行子。行子的辦法很簡單，只是在同一行中取去若干個子。可以全取一整行的子，也可以最少只取其中一個。但決不可以在多過一行中取子。如此輪流進行，以至最後取子的人獲勝為止。

現在舉出下面一個遊戲的例：

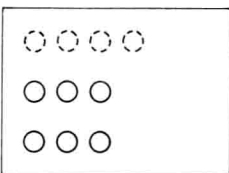
開局擺子為



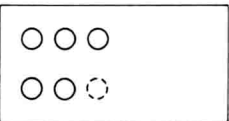
甲取去中行三子餘下



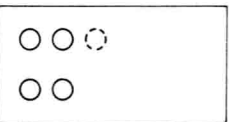
乙全取去上行



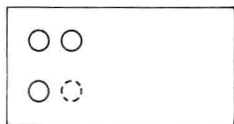
甲取去下行一子



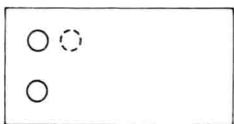
乙取去上行一子



甲取去下行一子



乙取去上行一子



當然到此乙肯定是勝了，因甲必須只能取上行或下行的子，最後餘下的一子是給乙吃的，所以乙便是最後吃。

玩這個遊戲有甚麼數學呢？原來這遊戲有個必勝之道。而這必勝之道是可用“二進制”加法來指引如何行子，所以如果要獲勝，便得要用二進制來看排出的子數。

以下就是一個由 1 至 13 的二進制的寫法表，讀者如果不知道或忘記了二進制的記數法，可參攷下表。

十進數	二進制的寫法
1	1
2	1 0
3	1 1
4	1 0 0
5	1 0 1
6	1 1 0
7	1 1 1

8	1 0 0 0
9	1 0 0 1
1 0	1 0 1 0
1 1	1 0 1 1
1 2	1 1 0 0
1 3	1 1 0 1

知道了二進制數目的寫法，我們便可把一局子用二進制寫出來。例如上例的遊戲，上行是 4，中行是 6，下行是 3，記出來便有：

上行	4	1 0 0
中行	6	1 1 0
下行	3	1 1

現在把每一列(即直行)的二進制數加起來，則只有奇數(如 1, 3 等)和偶數(如 0, 2 等)兩種情形。例如

$$\begin{array}{r}
 1\ 0\ 0 \\
 1\ 1\ 0 \\
 \underline{1\ 1} \\
 2\ 2\ 1
 \end{array}$$

這裏數字之和的最右一個是奇數，其他的都是偶數。如果偶數稱作“安全”的話，則奇數便是顯示“危險”，獲勝的秘訣在於能把危險化為安全，如果每步都能保持安全，則最後必獲勝。

以上面的甲、乙所玩的一局為例，甲開局時是一個有危險的

局。但他不懂得這個秘訣，所以胡亂地在中行取去 3 子，這樣便有

$$\begin{array}{r}
 4 \quad 1 \ 0 \ 0 \\
 3 \quad \quad 1 \ 1 \\
 3 \quad \quad \underline{1 \ 1} \\
 \quad \quad 1 \ 2 \ 2
 \end{array}$$

既有奇數，對甲便不安全。輪到乙行子，乙是懂得秘訣的，要化這危險為安全，便得使數字之和全為偶數。故此他只能把上行的 4 子全取，變為：

$$\begin{array}{r}
 3 \quad 1 \ 1 \\
 3 \quad \underline{1 \ 1} \\
 \quad \quad 2 \ 2
 \end{array}$$

這樣乙便安全了。

甲隨着取下行 1 子，餘下

$$\begin{array}{r}
 3 \quad 1 \ 1 \\
 2 \quad \underline{1 \ 0} \\
 \quad \quad 2 \ 1
 \end{array}$$

他又作出對自己危險之局，乙一計算之下，知道要在上行取去一子，便能化為對自己安全之局

$$\begin{array}{r}
 2 \quad 1 \ 0 \\
 2 \quad \underline{1 \ 0} \\
 \quad \quad 2 \ 0
 \end{array}$$

甲再行子後餘下

$$\begin{array}{r}
 2 \quad 1 \ 0 \\
 1 \quad \underline{1} \\
 \quad \quad 1 \ 1
 \end{array}$$

乙又隨着把它變為安全之局

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ 1 \quad 1 \\ \hline 2 \end{array}$$

這樣乙便穩獲最後吃子的勝利。

明白了運用這二進制的取勝之法，我們可以分析以下三局的走子方法。

(1)	○○○○○○○	7	1 1 1
	○○○○	4	1 0 0
	○○○○○	5	1 0 1
			3 1 2
		危險	↑ ↑

要使這兩個奇數改變為偶數，只能考慮最上行的7

$$\begin{array}{r} \text{移去} \leftarrow \boxed{11} 1 \\ 1 0 0 \\ \hline 1 0 1 \end{array}$$

所以上行7子中要移去6子才化為安全。

(2)	○○○○○○○○○	8	1 0 0 0
	○○○○	4	1 0 0
	○○○	3	1 1
	○○○○○○○○○○○○○○○	13	1 1 0 1
			2 2 1 2
		危險	↑

顯然這局面的危險是在第三行的3