高等学校教材

多复变函数论基础

史济怀

高等教育出版社

高等学校教材

多复变函数论基础

史济怀

高等教育出版社·北京

内容提要

多复变函数理论是当代数学研究的主流方向之一，发展非常迅速．本书是学习多复变函数理论的一本入门教材．内容分为六章：多复变数全纯函数、全纯映射、正交系与 Bergman 核函数、Cauchy 积分公式、全纯凸域和拟凸域、$\bar{\partial}$ 问题及其应用．凡学过数学分析、线性代数、复变函数、实变函数及少许泛函分析的读者都能读懂本书．有了本书的知识，再深入到多复变的各个领域会方便得多．本书可作为数学系高年级学生和研究生的教材，也可作为相关领域研究人员的参考书．

本书于 1996 年出版，恰逢高等教育出版社建社 60 周年，甲午重印，以飨读者．

图书在版编目(CIP)数据

多复变函数论基础 / 史济怀编著．— 北京：高等教育出版社，2014.7

ISBN 978－7－04－039634－8

Ⅰ．①多… Ⅱ．①史… Ⅲ．①多复变函数论－高等学校－教材 Ⅳ．①O174.56

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 073344 号

策划编辑	蒋　青	责任编辑	蒋　青	封面设计	杨立新
版式设计	于　婕	责任校对	刁丽丽	责任印制	毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400－810－0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京中科印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	850mm × 1168mm　1/32		http://www.landraco.com.cn
印　　张	10.75	版　　次	2014年 7 月第 1 版
字　　数	270 千字	印　　次	2014年 7 月第 1 次印刷
购书热线	010－58581118	定　　价	22.80 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　39634－00

出版说明

1954 年 5 月，高等教育出版社正式成立。60 年来，在教育部领导的关怀下，在数学教育工作者的支持下，高教社出版了众多数学教材，可谓群贤毕至，精品迭出，伴随着青年学子们度过了难忘的大学时光。

由于各种原因，部分优秀教材没有机会再版或重印。这其中有我国第一部高等数学教学大纲的制定者朱公谨先生编写的《高等数学（初稿）》；教材编审委员会主任赵访熊先生主编的《高等数学》；西安交通大学陆庆乐先生主编的《高等数学（基础部分）》；清华大学程紫明主编的《高等数学（基础部分）》；还有项武义先生的《微积分大意》，谷超豪、李大潜、沈玮熙的《应用偏微分方程》，吴大任先生的《微分几何讲义》（修订版），北京大学的《数学分析》及其习题集……这些教材，不仅是数学专家、广大数学教师的教学经验的积累，也是历届数学教材编审委员会的集体智慧的结晶，更是各个时期数学教学改革的成果代表，它们呈现了数学教材建设的真实历史，深深影响了几代人。

虽然这些教材出版时间较早，但从数学学科的发展和教学改革的趋势来看，它们对现在的数学课程教学仍然有一定的借鉴意义。为了使广大读者能够对比各时期高校数学教学要求、教学内容体系的变迁，更好地传承数学的教学思想、教学方法，促进当前数学教学改革，提高教学质量，我们遴选了 60 年来具有代表性的经典数学教材进行重新印刷。

这套教材的重版，牵动各方专家的关注，凝结了很多前辈的厚

爱和支持。在联系原作著作权人的过程中，西安交通大学马知恩教授、上海交通大学乐经良教授、清华大学盛祥耀教授都给予了我们帮助。已故作者的子女也积极地配合我们工作。高等教育出版社的郭思旭编审从选题到提供样书给予了很大帮助，胡乃冏、徐刚编审提供了部分资料和样书，王雎老师为这套书的封面从选纸到配色做了精美的设计，使得这套教材不仅保持了原有的风貌，更融入了现代元素。

在本套教材的重版编辑过程中，我们克服了重重困难，本着古建筑修复中“整旧如旧”的原则，尽管这套书中提及的有些算法已经不再用了，我们仍然保留了这些部分，以求保持经典教材的原汁原味，仅做了规范方面的微小改动。重温经典，不仅让老专家、老前辈们抚今追昔，也让我们倍感自豪和使命感，我们还会进一步增加重版的品种，奉献给读者更多优秀教材。

由于本套教材的重版在较短时间内完成，虽竭尽全力，疏漏之处在所难免，恳请各位专家和广大读者批评指正

高等教育出版社

2014 年 4 月

序 言

1906 年 Hartogs 发现，在 n 个复变数的空间 $\mathbf{C}^n(n>1)$ 中存在这样的域，在这种域中，每一个全纯函数都可全纯开拓到更大的域中去. 球环 $\{(z_1,\cdots,z_n): r^2<|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2<R^2\}$ 就是这样的域. 在复平面上，这样的域是不存在的. 多复变函数论在许多方面与单复变函数论有着本质的区别（上面提到的 Hartogs 现象只是其中之一），这些区别使得在研究单复变函数时行之有效的工具和方法，在研究多复变函数时不再适用. 于是，在多复变函数的研究工作中，不断出现新的工具和方法. 许多现代数学（例如，偏微分方程、泛函分析、微分几何、代数几何、李群等）的概念和方法常被用来解决多复变中的问题，而多复变的发展又推动着这些学科的发展.

鉴于多复变函数论在近代数学中的重要地位，一些高等学校希望把它作为数学系高年级本科生的选修课，或低年级研究生的基础课. 编写本书的目的就是想为这个课程提供一本入门教材.

本书的第一章介绍多复变数全纯函数的基本性质，阐明 Hartogs 现象是如何发生的. 特别是，通过引入次调和函数来证明重要的 Hartogs 定理. 第一章的内容是全书的基础. 第二章介绍全纯映射的基本性质. 除了介绍 H. Cartan 定理和球的全纯自同构等基本内容外，还特别介绍了多圆柱和球上的星形映射和凸映射，以及与之有关的增长定理和偏差定理. 这里有不少是我国学者最近获得的新结果. 第三章介绍经典的 Bergman 核函数. 特别介绍了我国已

故著名数学家华罗庚教授关于计算四类典型域的核函数的方法.多复变数 Cauchy 积分公式与单复变数 Cauchy 积分公式有着本质的区别.一般说来,全纯函数在部分边界上的值就能确定它在域内的值,而且不同的域有不同的 Cauchy 积分公式.第四章专门讨论这个问题.这里也特别介绍了华罗庚教授在这方面的杰出工作.第四章最后介绍了 Bochner-Martinelli 积分公式,它的作用之一是为第六章构造全纯的 Henkin 核埋下伏笔.第五章介绍全纯凸域的 Cartan-Thullen 理论,Levi 拟凸域和拟凸域,以及强拟凸域的基本知识,并讨论了它们和全纯域的关系,从而引出了重要的 Levi 问题.第六章介绍 $\bar{\partial}$ 问题及其应用,证明 $\bar{\partial}$ 问题在拟凸域上是有解的,从而证明了 Levi 猜测.最后给出了强拟凸域上 $\bar{\partial}$ 问题解的一致估计.

本书是作为多复变函数论的一本入门教材来编写的,凡具有数学分析、线性代数、复变函数、实变函数以及少许泛函分析知识的读者都能读懂本书(凡涉及上述内容以外的知识,诸如微分形式和 Stokes 公式、弱导数和 Sobolev 空间等,书中都作了专门的介绍).有了本书的知识作为基础,再深入到多复变的各个领域就会方便得多.希望有志于进入多复变研究领域的青年能从本书中得到一些帮助.

作者曾多次为中国科学技术大学基础数学的研究生讲授多复变函数论.本书是在这些讲稿的基础上编写的,以后又在既有高年级本科生又有研究生参加的班上讲授过.在教学过程中,学生们提出的问题和建议使作者改进了某些内容的讲法,在此作者向他们表示感谢.

参加 1994 年理科数学与力学教学指导委员会分析与函数论教材建设组会议的专家,特别是本书的主审人复旦大学张锦豪教授,仔细审阅了本书的初稿,提出了很多宝贵的意见,对本书的修改提供了有益的帮助.对此,作者对他们表示衷心的感谢.

由于作者水平有限,书中的缺点错误在所难免,希望得到读者的批评指正.

史济怀

1995 年 3 月

于中国科学技术大学

目 录

第一章

多复变数全纯函数

§1.1 全纯函数

1.1.1 全纯函数的定义

我们用 $\mathbf{C}$ 表示复数域，$\mathbf{C}^n$ 表示复数域上的线性空间：

$$\mathbf{C}^n = \{(z_1, \cdots, z_n) : z_j \in \mathbf{C}, \quad j = 1, \cdots, n\}.$$

设 $z = (z_1, \cdots, z_n)$，$w = (w_1, \cdots, w_n)$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中两个点，定义它们的内积为

$$\langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^{n} z_j \bar{w}_j,$$

由此产生 z 的模为 $|z| = \langle z, z \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. 这样 $\mathbf{C}^n$ 就是一个 n 维 Hilbert 空间.

$\mathbf{C}^n$ 中的连通开集 Ω 称为**域**. 当 Ω 有界时，就称 Ω 为**有界域**. 下面两类简单的有界域值得我们特别注意.

设 $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbf{C}^n$，$r = (r_1, \cdots, r_n)$，$r_j > 0$，$j = 1, \cdots, n$，称

$$P(a, r) = \{(z_1, \cdots, z_n) : |z_j - a_j| < r_j, \quad j = 1, \cdots, n\}$$

为以 a 为中心、r 为半径的**多圆柱**. 特别，当 $a = 0$，$r_j = 1$，$j = 1, \cdots, n$ 时，称它为单位多圆柱，记为 U^n，即

$$U^n = \{(z_1, \cdots, z_n) : |z_j| < 1, j = 1, \cdots, n\}.$$

显然,当 $n=1$ 时,它就是单位圆盘.

以 $a=(a_1,\cdots,a_n)$ 为中心,$\rho>0$ 为半径的**球**是指

$$B(a,\rho)=\left\{(z_1,\cdots,z_n):\sum_{j=1}^{n}|z_j-a_j|^2<\rho^2\right\}.$$

特别,当 $a=0,\rho=1$ 时,称它为单位球,记为 B_n,即

$$B_n=\left\{(z_1,\cdots,z_n):\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2<1\right\}.$$

当 $n=1$ 时,它也是单位圆盘.

U^n 和 B_n 都是单位圆盘在 $\mathbf{C}^n$ 中的推广. 下面我们将看到(见定理 2.3.9 和定理 2.5.15),它们不是全纯等价的. 因此,U^n 和 B_n 上的函数论有很大的区别.

为了引进全纯函数的概念,我们要讨论多重幂级数的性质. 先从多重级数讲起.

给定依赖两个指标的数列 $\{a_{jk}\}$,称 $\sum\limits_{j,k=1}^{\infty}a_{jk}$ 为**二重级数**,数 $S_{m,n}=\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{jk}$ 称为它的部分和. 如果 $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}S_{m,n}=S$ 存在,就说上述二重级数收敛,S 是它的和.

用同样的方法可以定义一般**多重级数**收敛的概念.

级数

$$\sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n=0}^{\infty}a_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(z_1-a_1)^{\alpha_1}\cdots(z_n-a_n)^{\alpha_n}$$

称为 n **重幂级数**,它在点 $b=(b_1,\cdots,b_n)$ 收敛是指 n 重级数

$$\sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n=0}^{\infty}a_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(b_1-a_1)^{\alpha_1}\cdots(b_n-a_n)^{\alpha_n}$$

收敛.

关于多重幂级数,也有类似于单变数中的 Abel 定理. 为简单起见,我们讨论 $a=0$ 的情形.

命题 1.1.1 如果 n 重幂级数

$$\sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n=0}^{\infty}a_{\alpha_1\cdots\alpha_n}z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n} \tag{1}$$

在点 $b=(b_1,\cdots,b_n)$ 收敛，这里 $b_j\neq 0, j=1,\cdots,n$，那么它在闭多圆柱

$$\bar{P}(0,r)=\{(z_1,\cdots,z_n):|z_j|\leqslant r_j,\quad j=1,\cdots,n\}$$

中绝对且一致收敛，这里 $r=(r_1,\cdots,r_n), r_j<|b_j|, j=1,\cdots,n.$

证 因为幂级数 $\sum\limits_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n=0}^{\infty} a_{\alpha_1\cdots\alpha_n} b_1^{\alpha_1}\cdots b_n^{\alpha_n}$ 收敛，所以存在常数 M，使得对任意 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\geqslant 0$，有

$$|a_{\alpha_1\cdots\alpha_n}|\leqslant \frac{M}{|b_1|^{\alpha_1}\cdots|b_n|^{\alpha_n}}.$$

故当 $|z_j|\leqslant r_j<|b_j|\,(j=1,2,\cdots,n)$ 时，

$$|a_{\alpha_1\cdots\alpha_n} z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}|\leqslant M\left|\frac{z_1}{b_1}\right|^{\alpha_1}\cdots\left|\frac{z_n}{b_n}\right|^{\alpha_n}\leqslant M\left(\frac{r_1}{|b_1|}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{r_n}{|b_n|}\right)^{\alpha_n},$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n=0}^{\infty}|a_{\alpha_1\cdots\alpha_n} z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}| &\leqslant M\sum_{\alpha_1=0}^{\infty}\left(\frac{r_1}{|b_1|}\right)^{\alpha_1}\cdots\sum_{\alpha_n=0}^{\infty}\left(\frac{r_n}{|b_n|}\right)^{\alpha_n}\\ &= M\left(1-\frac{r_1}{|b_1|}\right)^{-1}\cdots\left(1-\frac{r_n}{|b_n|}\right)^{-1}.\ \square\end{aligned}$$

为简化记号，我们采用下面的习惯记法. 对于有序数组 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，其中 α_j 都是非负整数，记

$$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n,\quad \alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_n!,\quad z^{\alpha}=z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n},$$

其中 $z=(z_1,\cdots,z_n)$. 这样，幂级数(1)就可简记为 $\sum\limits_{\alpha} a_\alpha z^\alpha$ 或者 $\sum\limits_{\alpha\geqslant 0} a_\alpha z^\alpha$.

定义 1.1.2 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，$f:\Omega\to\mathbf{C}$ 是定义在 Ω 上的一个复值函数. 如果对每一点 $a\in\Omega$，存在多圆柱 $P(a,\rho)\subset\Omega$ 和幂级数 $\sum\limits_{\alpha} c_\alpha(z-a)^\alpha$，使得

$$f(z)=\sum_{\alpha} c_\alpha(z-a)^\alpha \tag{2}$$

在 $P(a,\rho)$ 中成立，则称 f 为 Ω 中的**全纯函数**.

我们用 $H(\Omega)$ 记 Ω 上全纯函数所成的集.

设 $f\in H(\Omega)$，则对每个 $a\in\Omega$，(2) 在 a 附近成立. 容易看出

$$\left.\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}f(z)}{\partial z_1^{\alpha_1}\cdots\partial z_n^{\alpha_n}}\right|_{z=a}=\alpha!\,c_\alpha.$$

如果记

$$(\mathrm{D}^\alpha f)(a)=\left.\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}f(z)}{\partial z_1^{\alpha_1}\cdots\partial z_n^{\alpha_n}}\right|_{z=a},$$

那么 f 在 a 点的展开式 (2) 可写为

$$f(z)=\sum_\alpha\frac{(\mathrm{D}^\alpha f)(a)}{\alpha!}(z-a)^\alpha.$$

1.1.2 Cauchy-Riemann 方程组

设 $f=u+\mathrm{i}v\in H(\Omega)$. 当固定 $z_1,\cdots,z_{j-1},z_{j+1},\cdots,z_n$ 时，记

$$D_j=\{z_j\in\mathbf{C}:(z_1,\cdots,z_{j-1},z_j,z_{j+1},\cdots,z_n)\in\Omega\},$$

那么 $z_j\mapsto f(z_1,\cdots,z_{j-1},z_j,z_{j+1},\cdots,z_n)$ 作为单变数函数在 D_j 中全纯，因而有 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}=\frac{\partial v}{\partial y_j},\quad\frac{\partial u}{\partial y_j}=-\frac{\partial v}{\partial x_j},$$

其中 $z_j=x_j+\mathrm{i}y_j$.

引进记号

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_j}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y_j}\right),\\ \frac{\partial}{\partial\bar z_j}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y_j}\right),\end{aligned}\tag{3}$$

那么上面的 Cauchy-Riemann 方程可写为

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial\bar z_j}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y_j}\right)(u+\mathrm{i}v)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}-\frac{\partial v}{\partial y_j}\right)+\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y_j}+\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)=0,\quad j=1,\cdots,n,\end{aligned}$$

称它为 Cauchy-Riemann 方程组.

下面我们将证明,如果$\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}=0$ 在 D_j $(j=1,\cdots,n)$上成立,那么$f\in H(\Omega)$. 这就是著名的 Hartogs 定理(定理 1.5.14).

1.1.3 唯一性定理

在单复变中有如下的唯一性定理:"设 G 是复平面 $\mathbf{C}$ 上的域,$f\in H(G)$. 如果点列$\{z_k\}$在 G 中有聚点,且$f(z_k)=0,k=1,2,\cdots$,那么f 在 G 上恒等于0."这样的唯一性定理在多复变中不再成立. 例如,$f(z_1,z_2)=z_1z_2$ 在双圆柱$\{(z_1,z_2):|z_1|<1,|z_2|<1\}$中全纯,点列$\left\{\left(0,\dfrac{1}{k}\right)\right\},k=2,3,\cdots$,以$(0,0)$为聚点,且$f\left(0,\dfrac{1}{k}\right)=0$,但$f$ 在双圆柱中不恒等于0. 在多复变中有下面的

定理 1.1.3(唯一性定理) 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域,$f\in H(\Omega)$. 如果f 在非空开集 $E\subset\Omega$ 上恒等于0,那么f 在 Ω 上恒等于0.

证 命 $K=\{z\in\Omega:(\mathrm{D}^\alpha f)(z)=0$,对所有 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\}$,

$K_\alpha=\{z\in\Omega:(\mathrm{D}^\alpha f)(z)=0$,对某个 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\}$.

由假定 $E\subset K$,所以 K 不是空集. 显然 $K=\bigcap\limits_\alpha K_\alpha$. 因为 $\mathrm{D}^\alpha f$ 是连续函数,所以 K_α 是闭集,因而 K 也是闭集. 任取 $a\in K$,因为f 在 Ω 中全纯,故存在多圆柱 $P(a,r)\subset\Omega$,使得

$$f(z)=\sum_\alpha\frac{(\mathrm{D}^\alpha f)(a)}{\alpha!}(z-a)^\alpha=0$$

在 $P(a,r)$中成立,因而 $P(a,r)\subset K$,这说明 K 是一个开集. 由于 $\Omega\setminus K$也是开集,下面的等式

$$\Omega=K\cup(\Omega\setminus K)$$

和 Ω 的连通性矛盾,因为 K 不是空集,故只能 $\Omega=K$,即f 在 Ω 上恒等于0. □

作为唯一性定理的应用,我们可以证明下面的

定理 1.1.4(开映射定理) 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域,f 是 Ω 上的非

常数的全纯函数,那么 f 把 Ω 中的开集映成 $\mathbf{C}$ 中的开集.

证 $n=1$ 时,定理是成立的. 现设 $n>1$. 设 $a\in\Omega$,命 Q 为 a 的一个凸邻域(例如可以取 Q 为包含 a 的多圆柱),$Q\subset\Omega$. 由定理 1.1.3 知,f 在 Q 上不能恒等于 $f(a)$,故能找到 $b\in Q$,使得 $f(a)\neq f(b)$. 命 $D=\{\lambda\in\mathbf{C}:\ a+\lambda(b-a)\in Q\}$,显然 D 非空,且由于 Q 是开集,D 也是 $\mathbf{C}$ 中的开集. 命

$$g(\lambda)=f(a+\lambda(b-a)),\quad \lambda\in D,$$

则 g 是 D 上的全纯函数,且 $g(0)=f(a)\neq f(b)=g(1)$,即 g 不是常数. 利用单复变的结果,$g(D)$是包含 $g(0)$的一个开集,而 $g(D)\subset f(Q)$,所以 $f(Q)$是一个开集. □

利用开映射定理又可得到下面的最大模原理.

定理 1.1.5(**最大模原理**) 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域,f 是 Ω 上的非常数的全纯函数,那么 f 的模不可能在 Ω 的内点达到最大值.

证 如果存在 $a\in\Omega$,使得 $|f(z)|\leqslant|f(a)|$对所有 $z\in\Omega$ 成立. 根据定理 1.1.4,$f(\Omega)$是开集,它含在圆盘$\{|w|\leqslant|f(a)|\}$之中,但因是开集,必含在$\{|w|<|f(a)|\}$之中,这就导致 $|f(a)|<|f(a)|$的矛盾. □

§1.2 多圆柱的 Cauchy 积分公式及其应用

1.2.1 多圆柱的 Cauchy 积分公式

在单复变中,Cauchy 积分公式的重要性是众所周知的,对于不同的域,Cauchy 积分公式有相同的形式. 但在多复变中,情况则复杂得多,对于不同的域,有不同的 Cauchy 积分公式. 下面先给出多圆柱上的 Cauchy 积分公式.

定理 1.2.1 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域,$f\in H(\Omega)$. 如果$\overline{P}(a,r)\subset\Omega$,

则对 $z\in P(a,r)$,我们有

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{|\zeta_1-a_1|=r_1}\cdots\int_{|\zeta_n-a_n|=r_n}\frac{f(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)}{(\zeta_1-z_1)\cdots(\zeta_n-z_n)}d\zeta_1\cdots d\zeta_n. \tag{1}$$

证 当 $n=1$ 时,这是熟知的圆盘上的 Cauchy 积分公式. 今设定理对 $n-1$ 个变数的全纯函数成立. 分别在圆周 $|\zeta_2-a_2|=r_2,\cdots,|\zeta_n-a_n|=r_n$ 上固定 $\zeta_2,\cdots,\zeta_n$,则 $f(z_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)$ 是圆盘 $|\zeta_1-a_1|\leqslant r_1$ 上的全纯函数,由单复变的 Cauchy 积分公式得

$$f(z_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta_1-a_1|=r_1}\frac{f(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)}{\zeta_1-z_1}d\zeta_1 \tag{2}$$

对函数 $(z_2,\cdots,z_n)\mapsto f(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ 用归纳法的假定,并用(2)即得

$$\begin{aligned}
&f(z_1,\cdots,z_n)\\
&=\frac{1}{(2\pi i)^{n-1}}\int_{|\zeta_2-a_2|=r_2}\cdots\int_{|\zeta_n-a_n|=r_n}\frac{f(z_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)}{(\zeta_2-z_2)\cdots(\zeta_n-z_n)}d\zeta_2\cdots d\zeta_n\\
&=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{|\zeta_1-a_1|=r_1}\cdots\int_{|\zeta_n-a_n|=r_n}\frac{f(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)}{(\zeta_1-z_1)\cdots(\zeta_n-z_n)}d\zeta_1\cdots d\zeta_n.
\end{aligned}$$

□

如果记 $D_j=\{z_j\in\mathbf{C}:|z_j-a_j|<r_j\}$,那么多圆柱 $P(a,r)$ 是这 n 个圆盘的拓扑积

$$P(a,r)=D_1\times\cdots\times D_n.$$

它的边界 ∂P 由若干部分组成. 例如,$\partial D_1\times D_2\times\cdots\times D_n$,$\partial D_1\times\partial D_2\times D_3\times\cdots\times D_n$,$\cdots$,$\partial D_1\times\cdots\times\partial D_n$ 都是它的边界的组成部分,其中维数最低的那一部分

$$\partial D_1\times\cdots\times\partial D_n=\{(z_1,\cdots,z_n):\ |z_j-a_j|=r_j,j=1,\cdots,n\}$$